

研究会報告

curvature をもつように見える。(Bardeen 達の現象論的相互作用は positive curvature をもつ) dilute gas model によれば、ガスパラメータ程度の補正は、フォノン spectrum への効果として、curvature を negative な方向へ向けようとするが、準粒子-フォノン間の vertex part への k に依存した補正は positive な方向に働き、前者を打消して、全体として positive curvature を与えるようになることを示した。

更に準粒子の chemical potential, effective mass, excitation spectrum の表式を与えた。

He^4 にとけた He^3 の相互作用

大 見 哲 巨 (名大・理)

He^4 の中に He^3 を少量と加したときの有効相互作用を求める。

§ 1 ユニタリー変換による方法

Fermion を Boson の中に入れたとき、Fermion の量が少いとすれば、Fermion の存在による Boson への影響は一応無視出来ると考えられるので、Boson に対しては、Bogolubov 近似をとる。

次にユニタリー変換を行つて phonon の吸収放出の項を消す。実際には、ユニタリー変換を展開して、phonon と Fermion の運動エネルギー (H_0) の一次の展開が、phonon の吸収、放出の項 (H') を打消すように変換の係数をきめる。

このユニタリー変換が、物理的には Fermion が phonon の mode に参画し、Fermion 自身は着物を着たことになるということが、Fermion 及び phonon operator の変換を見れば見当がつくし又、運動方程式の方法で確かめることが出来る。

Fermion-Fermion の相互作用の項は H_0 の二次及び H' の一次の展開から

出てくる。これ以外にも Fermion-Fermion 相互作用と考えられる項が出てくるが、それらはすべて $\left(\frac{\text{分子間距離}^3}{\text{ヒーリング・ディスタンス}}\right)$ の高次の項になり、low density limit では上の二項を考えればよい。

このようにして得られる有効相互作用は、Feynman の backflow に対応して、Boson の運動エネルギーの部分から出てくる $\frac{(p,k)(p',k)}{k^2}$ という dipole-dipole type の相互作用が Fermion の運動エネルギーからでてくるものによつて完全に打消されてしまう。そのかわりに、 $\frac{(p,k)^2 + (p',k)^2}{k^2}$ という形の相互作用が現われる。又 Boson の interaction の部分から (phonon エネルギーに含まれる) Fermion-Fermion の生の相互作用を Fermion と Boson の質量が等しいとすれば打消す項が出てくる。

結局、着物を着た Fermion の相互作用、 $a_{p-k}^+ a_{p'+k}^+ a_p a_{p'}$ の係数として Fermion の量が少なく、又その間の距離がはなれているときには

$$\left(v_k'' - \frac{v_k'^2}{v_k}\right) + \frac{m}{2n_0 m_3^2} \left(\frac{v_k'}{v_k}\right)^2 \frac{(p,k)^2 + (p',k)^2}{k^2}$$

v_k, v_k', v_k'' はそれぞれ、Boson-Boson, Boson-Fermion, Fermion-Fermion の元の相互作用、生のままでは全部等しいと考えられるが effective なものを使うことを考え区別した。 m, m_3 は Boson 及び Fermion の質量である。

さらに、Fermion-Boson 間の correlation を計算すると、 $m_3 = m$ で Boson 間の correlation に一致する。これは以前報告した定理 (物性研究 6 No. 5) に一致する。また Fermion 間の correlation は Boson-Fermion correlation の積に比例する。得られた相互作用の物理的意味をはつきりさせるため Feynman にならつて back flow を位相の形でとり入れて調べた。

§ 2 位相の変分法

研究会報告

○ Boson の中に Fermion を 1 個入れた時

ground state としては Boson は Bogolyubov の ground state にあり、それに運動量 0 の Fermion を 1 個付け加えたものを先に得られたユニタリー変換で変換し、着物を着せる。

次に Fermion に p だけの運動量を与え、それに back flow $e^{im\sum \phi_p(x-x_a)}$ を掛けておく。

エネルギーを最小にするように ϕ_p をきめると、その Fourier 変換 ϕ_k は $(x-x_a)$ が大きい すなわち k の小さい所で

$$\phi_k = -\frac{1}{n_0 m_3} \frac{i(p, k)}{k^2} (s'_k - 1).$$

s'_k : Boson Fermion correlation

で与えられる。

○ Boson の中にスピンが逆向きの 2 コの Fermion を入れた時

trial function $|\psi_{p,q}\rangle$ は

$$e^{imx(x_a-x_b)} e^{im\sum \phi_p(x_l-x_a)} e^{im\sum \phi_q(x_l-x_a)} \\ \times e^{ip \cdot x_a} e^{iq \cdot x_a} |\psi_0\rangle.$$

$|\psi_0\rangle$: ground state (Boson は Bogolyubov の ground state)

Fermion が Fermion の back flow となるということを考えて $x(x_a-x_b)$ を掛けておく。

ϕ_p, ϕ_q は上のものを用いて x について変分をとつて、 x をきめる。

Fourier 成分 x_k は

$$x_k = \frac{1}{2n_0 m_3} \frac{i(p-q) \cdot k}{k^2} (s'_k - 1) \left\{ \frac{m_3}{m} \frac{s''_k - 1}{s'_k - 1} + 1 - s'_k \right\}$$

s''_k : Fermion-Fermion correlation

これは momentum q の Fermion の質量を Boson の質量と等しいとし、さらに $q=0$ とすると、Boson が与える back flow と等しくなり物理的直観と

あり。

○ Fermion-Fermion 有効相互作用

$\langle \psi_{p,q} | \hat{H} | \psi_{p,q} \rangle$ において $x_a - x_b$ を含む項を拾う。

有効相互作用は、 k の小さい所で、

$$-\frac{m}{4n_0m_3^2} \cdot \frac{(p \cdot k)^2 + (q \cdot k)^2}{k^2} (s'_k - 1) \left\{ \frac{m_3}{m} \frac{s''_k - 1}{s'_k - 1} - s'_k + 1 \right\}.$$

となり、ユニタリ変換の場合と等しい結果を与える。

この相互作用において、 $m_q = m$ $q = 0$ 及び $m_p = m$, $p = 0$ において残る項はそれぞれ運動量 p 及び q の Fermion の self energy となるべきものである。

これを引き去ると相互作用は、

$$+\frac{m}{2n_0m_3^2} \frac{(p, k)^2 + (q, k)^2}{k^2} \frac{v'_k}{v_k} \left[\frac{v'_k}{v_k} - \frac{m_3 + 3m}{2(m_3 + m)} \right]$$

この手続きは、ユニタリ変換では無限の和で保証されるであろう。

ユニタリ変換によつて出てきた effective interaction

$\frac{(p, k)^2 + (q, k)^2}{k^2}$ は Fermion が Fermion の back flow として流れるために現われるものであり、又この back flow が Boson の back flow から出てくる dipole-dipole 相互作用を打消している。dipole-dipole type の相互作用は展開パラメーターの高次から出てくるらしい。

実際のヘリウムについては、相互作用が強いので勿論上の摂動法は適用出来ない。しかし上に得られた picture に従つて、位相の変分法で、相互作用を求めることは可能だと思ふ。