

三次元フリーク波の形状パターンに対する 非線形性の影響

東京大学新領域創成科学研究科 藤本 航, 早稻田 卓爾
Wataru Fujimoto, Takuji Waseda
Graduate School of Frontier Sciences, the University of Tokyo

1. 序論

本研究では, 海洋で突発的に生じる巨大波「フリーク波」を取り上げる. フリーク波は一般には有義波高の二倍程度を超える波と定義され, 波浪場のエネルギーが局所的に集中した波である.

特にフリーク波の形状は, 船舶・海洋構造物にどうフリーク波が作用するかを推定する際に重要であり, 限界状態設計に応用できる. 今回はそういった応用を念頭に, 深海域の多方向波浪場のフリーク波の形状について考察した.

深海域でのフリーク波の発生原因として重要であるのが, 3 次の非線形性による 4 波準共鳴である[1]. 4 波準共鳴を記述できる 3 次の Zakharov 方程式から, 自由表面波の変調不安定波を説明でき[2], この変調不安定波がフリーク波の基礎的なモデルとして考えられている. この Zakharov 方程式に対し, 波スペクトル幅を制限して近似を行うと, 非線形シュレディンガー方程式 (Nonlinear Schrödinger Equation, NLS) と Dysthe 方程式が導ける[3,4]. NLS は狭帯スペクトルを持つ波の 4 波準共鳴を記述する. さらに, Dysthe 方程式は NLS を拡張したものであり, 広帯スペクトルで計算できるよう高次の分散項や平均流項を含む. そして, 空間方向に関して対称な波群の時間発達を Dysthe 方程式で計算すると, 波群の形状が水平方向に三日月状に変形することが知られている[5]. さらに, 波頂の後側の振幅が前側の振幅を上回るという前後の非対称性も起こる[6]. このような三日月変形や前後の非対称性は, NLS では現れない. すなわち, 3 次の非線形性による 4 波準共鳴が, ある程度広いスペクトルを持った波浪場で起こると, 三日月変形や前後の非対称性が起こると考えられる.

一方で線形集中波の完全非線形シミュレーションにおいても, 非線形性による波形の三日月変形や前後の非対称性が報告されている[7]. さらに, 位相の集中のさせ方によって, 4 次の非線形性とそれによる Class 2 不安定が影響する場合がある[8]. Class 2 不安定は 4 次の非線形性による 5 波共鳴の特殊なケースであり, 擾乱のある規則波で

三日月形状を生じる[9].

では、ランダムな位相をもつ波浪場において、Dysthe 方程式で生じたような三日月変形や前後の非対称性は起こるのだろうか. また、Class 2 不安定は影響するのであるか. これら二つの問題は解明されていない. こういったフリーク波の形状に関する力学がわかれば、ランダムな波浪場でのフリーク波をモデリングできる. これはフリーク波を考慮した高精度な限界状態設計を実現するにあたり重要である.

過去にいくつかの研究が多方向不規則波浪場におけるフリーク波の形状を調べている. Ducrozet & Bonnefoy (2007)は、多方向のフリーク波を数値的に生成し、形状を解析した[10]. しかし、初期波形を構成するのに用いた JONSWAP スペクトルのパラメタセット数は3セットのみであり、少ない. Xiao et al. (2013)は多方向のフリーク波を数値的に生成し、解析した[11]. JONSWAP スペクトルのパラメタセットを多く取り、調査を行っている. また、固有直交分解などを用い、様々な JONSWAP スペクトルのフリーク波形状を解析した. しかし彼らは、多くのスペクトルパラメタで得られたフリーク波を、混合して解析しており、スペクトルパラメタが形状に与える影響を見ていない. また、彼らは数値解析で考慮する非線形性を固定しており、フリーク波の形状に対する各非線形オーダーの効果を調べていない. これらの研究は、上で挙げたような観点でフリーク波の形状の解析を行っていない.

そこで本研究では、上で挙げた二つの問題について検証を行った. 既存研究と同様に数値解析を用い、初期波の位相をランダムに与え、アンサンブルシミュレーションを行う. そして、波浪スペクトルのパラメタを変えながら、系統的に計算を行う. しかし本研究の特徴として、各スペクトルでの結果を分けて解析し、波浪スペクトルとフリーク波形状の関係を調べた. さらに、どの非線形オーダーがフリーク波の形状にどのような影響を及ぼすか確かめるため、数値解析で考慮する非線形オーダーを変化させ、結果を比較した.

2. 手法

船舶・海洋構造物のスケールの波では粘性を無視できるので、ポテンシャル流れを仮定できる. それにより深海域での自由表面波は、以下の連続の式(ラプラス方程式)、水底境界条件、そして二つの自由境界条件(オイラー方程式)で記述できる[2].

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\nabla^2 \phi, \quad -\infty \leq z \leq \eta \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -h \quad (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \eta = (1 + (\nabla \eta)^2) W \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + g \zeta = \frac{1}{2} (1 + (\nabla \eta)^2) W^2 \quad (4)$$

ここで、 $\phi(x, y, z, t)$ は任意水深の速度ポテンシャル、 $\eta(x, y, t)$ は水位、 $\Phi(x, y, t) = \phi(x, y, z = \eta, t)$ は表面上の速度ポテンシャル、 $W = \partial_z \phi(x, y, z = \eta, t)$ は表面上での鉛直方向流速を表す。座標はデカルト座標系で z 方向が鉛直方向で、 x, y 方向が水平方向、 $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ である。 g は重力加速度である。

上のような方程式系を解く数値計算法として、HOSM (Higher Order Spectral Method, HOSM) [12,13]を用いた。HOSMは弱非線形で砕波しない範囲で、波浪場の時間発展を解くモデルである。また、スペクトル法を使用しているため、高速高精度である。

HOSMでは弱非線形仮定から、二つの自由境界条件(3)(4)を、波形勾配についての摂動展開、さらに $z = 0$ 周りのテイラー展開を行っている。得られた次の二式において、数値解析で含める項を変えることで、考慮する非線形性のオーダーを変化させることが出来る。ここで $w^{(i)}$ は摂動展開された W であり、 $W = w^{(1)} + w^{(2)} + w^{(3)} + \dots$ である。この展開法には Dommermuth & Yue の手法[12]と West らの手法[13]がある。後者のほうが計算精度が高いため、本研究では後者を使用している。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} = & w^{(1)} - \nabla \phi \cdot \nabla \eta + w^{(2)} + w^{(3)} + w^{(1)} |\nabla \eta|^2 + w^{(4)} + w^{(2)} |\nabla \eta|^2 \\ & + w^{(5)} + w^{(3)} |\nabla \eta|^2 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} = & -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{2} w^{(1)} w^{(1)} + w^{(1)} w^{(2)} + \frac{1}{2} (2w^{(1)} w^{(3)} + w^{(2)} w^{(2)}) \\ & + \frac{1}{2} w^{(1)} w^{(1)} |\nabla \eta|^2 + w^{(1)} w^{(4)} + w^{(2)} w^{(3)} + w^{(1)} w^{(2)} |\nabla \eta|^2 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

以後、 M_1 次までの非線形項を含め、それ以上のオーダーの非線形項を打ち切った場合の計算を、HOSM $M = M_1$ と呼ぶ。例えば、HOSMにおける二次非線形計算はHOSM $M=2$ と表される。

また, HOSM はスペクトル法的一种であり, フーリエ変換で空間差分を評価し, そこで FFT を活用して高速・高精度に計算できる. 水平方向の x, y 微分に加え, 鉛直方向の z 微分も, ラプラス方程式(1)と水底境界条件(2)から, 水平方向のフーリエ変換 $\mathcal{F}$ で表現できる. よって, 展開された鉛直速度 $w^{(i)}$ を求める際の z 微分も高速化できる.

$$\partial_x f = \mathcal{F}^{-1}[k_x \mathcal{F}[f]], \partial_y f = \mathcal{F}^{-1}[k_y \mathcal{F}[f]], k_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \partial_z f = \mathcal{F}^{-1}[k_z \mathcal{F}[f]] \quad (7)$$

3. HOSM の非線形オーダーと Class 2 不安定

まず, 擾乱のある規則波の Class 2 不安定を HOSM で計算した先行例が無いので, 本研究で計算を行った. 初期波の主波の振幅 a_0 は $a_0 = 0.2810[\text{m}]$, 主波の波長 λ_0 を $\lambda_0 = 5[\text{m}]$ とした. 擾乱の振幅 $a_{\pm}$ を $a_{\pm} = 10^{-8}a_0$ とし, 主波の波数を $\mathbf{k}_0 = (k_0, 0)$ $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ として擾乱の波数を $\mathbf{k}_{\pm} = (1.5, 1)k_0$ と置いた. McLean の理論において Class 2 不安定を生じる条件である[9]. 領域サイズを一辺 $10[\text{m}]$ の正方形, タイムステップ Δt は $\Delta t = 0.178[\text{sec}] \doteq T_p/100$ とした.

HOSM の範囲内では, $M=2$, $M=3$ は 4 次非線形項を含まないので, Class 2 不安定は起こらないと予想できる. $M=2$ ではたしかに Class 2 不安定が起こらないことを確認できた (図 1). しかしながら, 予想と反し HOSM $M=3$ では Class 2 不安定が現われた (図 1, 図 2). すなわち HOSM $M=3$ で, 5 波共鳴が起こりうることを示唆している. また, HOSM で考慮する非線形性オーダー M と計算波数領域の広さ $k_{\max}$ (考慮する最大波数) によって成長率が変化した (図 4, 図 3).

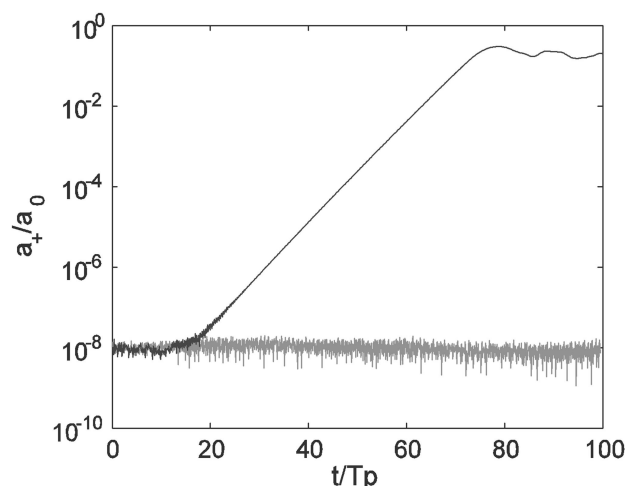


図 1 $k_{\max} = 6k_0$ における Class 2 不安定の擾乱成長 グレー : $M=2$ 黒 : $M=3$

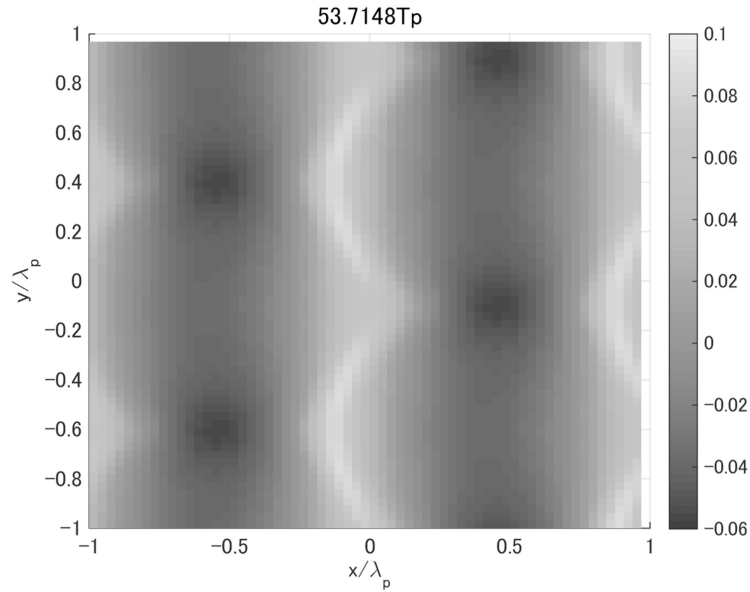


図 2 $k_{\max} = 8k_0$, HOSM M=3 計算における Class 2 不安定波の波面 η/λ_p

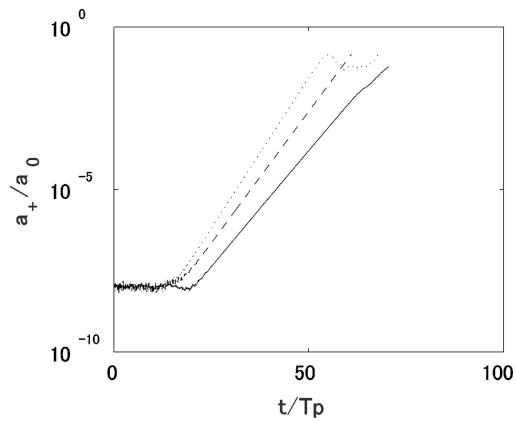


図 3 $k_{\max} = 8k_0$ における Class 2 不安定の擾乱成長 点線: M=3 破線: M=4 実線: M=5

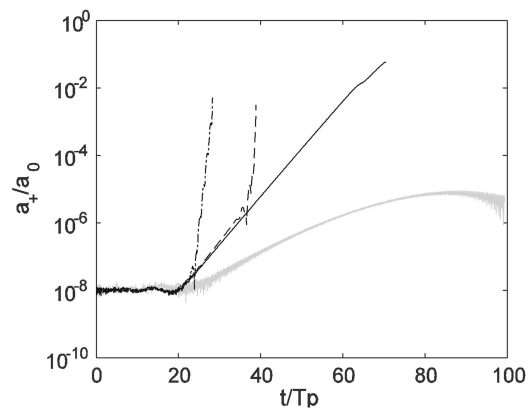


図 4 M=5 における Class 2 不安定の擾乱成長 グレー: $k_{\max} = 6k_0$ 黒実線: $k_{\max} = 8k_0$ 黒破線: $k_{\max} = 10.7k_0$ 黒点線: $k_{\max} = 13.3k_0$

4. JONSWAP スペクトルにおける計算

4.1 計算設定

初期波スペクトルとして JONSWAP スペクトルを用いた。波形勾配は 0.11 とし、方向集中度を $\gamma = 3.3$ とした。波の非線形性と分散性のバランスを変えるため、方向分布関数として $\cos^N \theta$ 型を用い、 $N=10 \sim 1000$ まで変化させた。 $N=50$ 以下でこれらのパ

ラメタは実海域でも十分存在し、フリーク波の生成を増大させる条件である[14]。ただし、 $N > 100$ の条件はかなり方向性が狭い条件だが、非線形性の影響が大きく表れるため、参考のために計算した。また、各次数の非線形性の効果を見るため、考慮する非線形オーダーを変えて計算した。さらに、波数領域とその最大波数 $k_{\max}$ を変えた計算も行った（表 1）。Case D のみ $k_{\max}$ が大きい。ピーク波長 $\lambda_p = 4\text{m}$ （別の研究[15]の実験結果と合わせるため）に対し、波進行方向に $10\lambda_p$ 、

直角方向に $20\lambda_p$ の計算領域長さを設定した。格子の数はそれぞれの方向に 512 点、時間幅は 0.01sec でおおよそ $T_p/160$ に相当する（ T_p はピーク周期）。計算時間は 85sec（約 $50T_p$ ）を 10 アンサンブル計算した。Case A のみ 30 アンサンブル計算した。

表 1 その他の計算設定

Case No.	HOSM M	$k_{\max}$
A	2	$8.5 k_p$
B	3	$8.5 k_p$
C	5	$8.5 k_p$
D	3	$12.8 k_p$

全ての格子それぞれについて、時間方向のゼロアップクロス法とゼロダウncロス法を組み合わせで波高 H を定義した。ある波頂に対し、ゼロアップクロス法とゼロダウncロス法で波高が定義できる。両者のうち大きいほうを波高とした。そして有義波高 H_s との比が $H/H_s > 2$ となった波をフリーク波とした。

4.2 三日月変形

各ケース、各方向集中度 N の計算において、生成されたフリーク波の個数は表 2 のようになった。多方向不規則波浪場においてフリーク波の三日月変形が見られた（図 5）。これはフリーク波の平均形状にも表れており（図 6）、多くのフリーク波が三日月状に変形していることを示している。この変形を解析するため、三日月形状（図 7）を表す式(8)をフリーク波の波頂高さの 1/2 以上を取る領域に最小二乗法で当てはめ、長径 a 、短径 b 、三日月変形度 c を求めた。

表 2 生成されたフリーク波の個数

Case No.	HOSM M	$k_{\max}$	アンサンブル数	N=10	N=25	N=50	N=100	N=250	N=500	N=1000
A	2	$8.5 k_p$	30	549	570	499	357	236	178	154
B	3	$12.8 k_p$	10	243	176	141	123	75	103	90
C	5	$8.5 k_p$	10	231	139	148	109	83	69	98
D	3	$8.5 k_p$	10	203	174	155	104	60	59	73

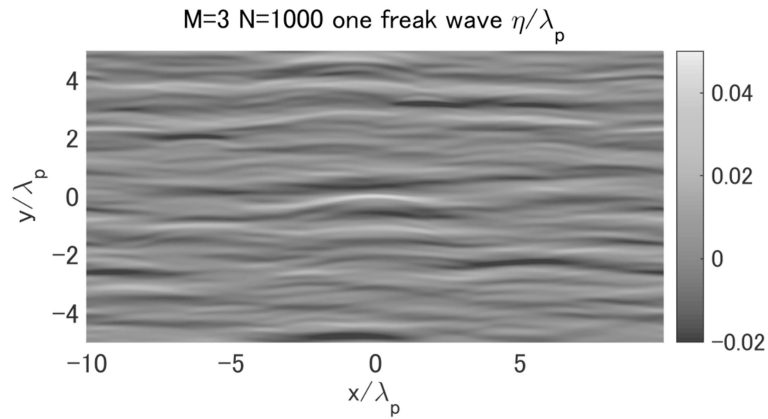


図 5 三日月状に変形したフリーク波 (Case B. $M=3$ $N=1000$ 中央がフリーク波)

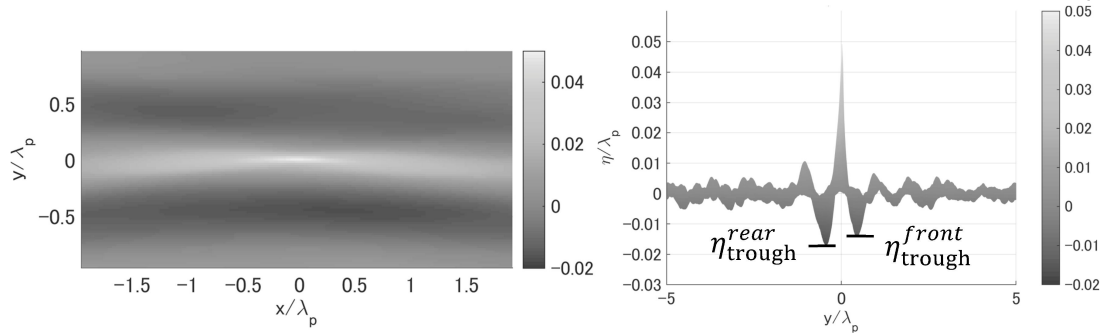


図 6 Case D $M=3$ におけるフリーク波の平均形状 η/λ_p (左) 上からの図 (右) 進行方向 (右に進行) と直角方向から見た図

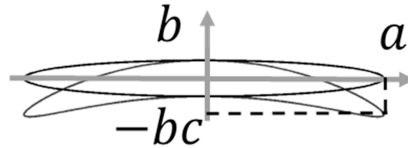


図 7 三日月形状と式(8)のパラメタの関係

$$\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{y}{b} + c \frac{x^2}{a^2} \right)^2 = 1 \quad (8)$$

図 8 を見ると, Case A ($M=2$) で三日月変形が起きていることがわかる. 一方, 先ほど見たように $M=2$ では Class 2 不安定は起きないが, 4 波準共鳴による変調不安定 (Class 1 不安定) は起きる [16]. そのため, 今回の多方向不規則波浪場での三日月変形は, 広帯スペクトルを持つ波での 4 波準共鳴で起きていると考えられる. すなわち,

Dysthe 方程式で見られるメカニズムと同じである。また、 $M=2$ において変調不安定の成長率は $M=3$ よりも小さいが[16]、これは今回 $M=2$ でフリーク波の三日月変形が $M=3$ (Case B) を下回ったのに対応していると解釈できる。

もしフリーク波の三日月変形に Class 2 不安定が影響するならば、波数領域の広さや HOSM の非線形オーダーによって、三日月変形度が変化するはずである。しかし、Case B と Case C を比較し、Case B と Case D を比較すると、実際にはそういった変化は見られない (図 8)。フリーク波の三日月変形は Class 2 不安定によらず、やはり 4 波準共鳴によるものだと考えられる。

多方向不規則波浪場のフリーク波平均形状に、Dysthe 方程式で現われるような三日月変形や前後の非対称性が現われていることを上で指摘した。Dysthe 方程式は振幅に関する方程式であり、波群の挙動を記述する。そのため、多方向不規則波浪場のフリーク波にも、平均的には波群の形成が影響していると考えられる。この結果は、広帯域のスペクトルを持つランダム位相の波浪場では自明ではなく、興味深い。

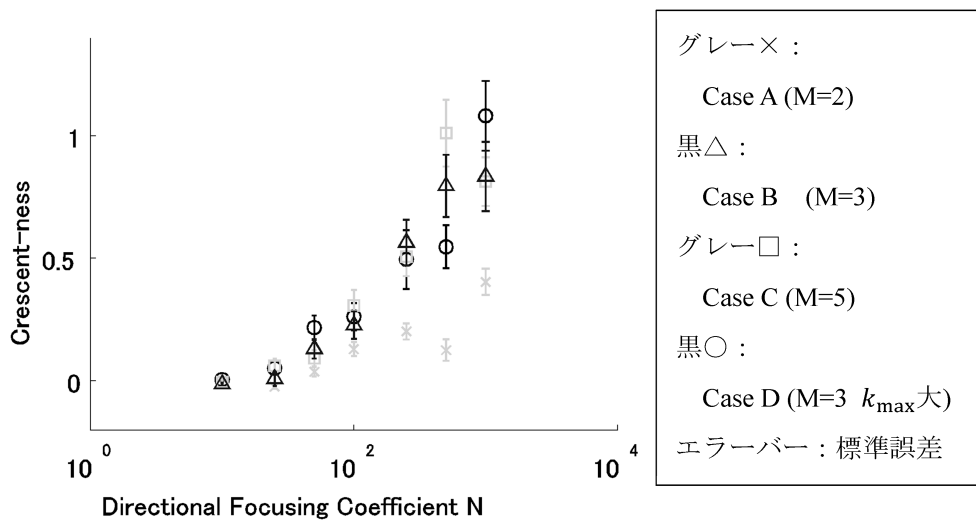


図 8 三日月変形度と非線形性，方向性の関係

4.3 前後の非対称性

平均形状を見ると、波頂に対し後側の振幅が大きく、前側の振幅が小さくなっている (図 6)。この非対称性を調べるために、谷深さの前後差 $\Delta\eta_{\text{trough}} = \eta_{\text{trough}}^{\text{rear}} - \eta_{\text{trough}}^{\text{front}}$ (図 6) を求め、図 9 に示した。

まず、 $M=3$ (Case B, C, D) 以上で非対称性が現われたのは、Dysthe 方程式のよう

な4波準共鳴と、スペクトル幅による高次の分散性によるものだと考えられる。4波準共鳴が弱いCase A ($M=2$)では非対称性も弱くなっている。 $N=10$ において前後の非対称性が弱まっている。これは既存の研究（例えば[17]）が示すように、方向性が広い $N=10$ の場合では4波準共鳴は弱いため考えられる。

今回計算したフリーク波で見られた前後の非対称性の原因は、Class 2 不安定のような4次非線形性による短い時間スケールによる波相互作用の結果とは考えにくい。なぜならば、図 2 を見るとわかるように、Class 2 不安定波においては、前の谷よりも後の谷のほうが浅く、今回計算したフリーク波における非対称性とは逆だからである[6]。やはり、3次の非線形性による4波準共鳴の効果が支配的であり、フリーク波の局所的な形状に、長期的な波-波非線形相互作用が影響していると言える。

また、 $N=25, 50$ という今回計算した中では比較的スペクトルの方向性が広く、実海域で十分存在する条件でも、前後の非対称性が見られた。今回得られたフリーク波の前後の非対称性は、浮体構造物の限界状態設計に有用な情報である可能性がある。

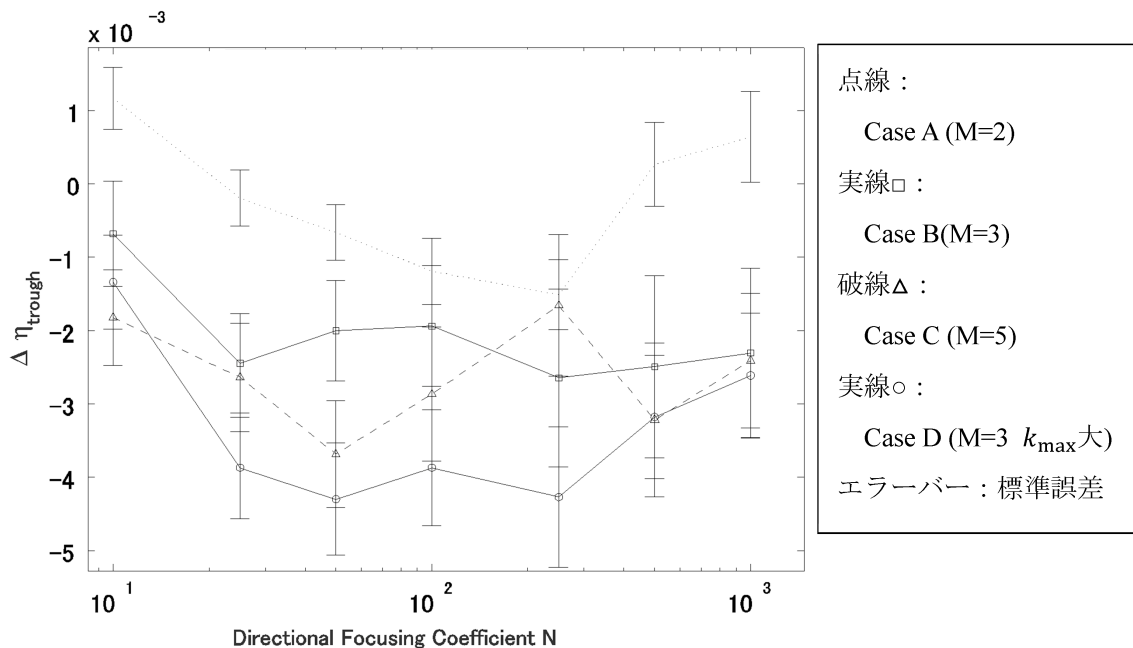


図 9 谷深さの前後差 $\Delta \eta_{trough} = \eta_{trough}^{rear} - \eta_{trough}^{front}$ と非線形性, 方向性

5. 結論

多方向不規則波浪場のフリーク波においても、Dysthe 方程式で見られたような三日月変形や前後の非対称性が見られた。すなわち、フリーク波のこのような変形のメカ

ニズムは、3次の非線形性による4波準共鳴+広帯スペクトルによるものと考えられる。一方、Class 2不安定の影響を否定する結果が得られた。多方向不規則波浪場のフリーク波の局所的な形状に、長期の波-波相互作用が影響していると言える。前後の非対称性については、 $N=25, 50$ という比較的スペクトルの方向性が広く、実海域で十分存在する条件においても確認できた。

形状については、波数領域を同じにしてHOSMの非線形性 M を $M=3$ と $M=5$ と変えたケース(Case B, C)で、フリーク波の形状には明瞭な違いが無い。そのため本研究のような、波形勾配0.11, JONSWAPの周波数集中度 $\gamma=3.3$ 程度の波浪場で、50周期程度の計算の場合、HOSMで $M=3$ までの非線形オーダーを取ればフリーク波の形状を十分計算できると言える。

謝辞

HOSMのプログラムはProf. Toffoli (Swinburne University of Technology) に提供されたものを元に作成した。

参考文献

- [1] Janssen, P. a. E. M., 2003, "Nonlinear Four-Wave Interactions and Freak Waves," (1974), pp. 863–884.
- [2] Zakharov, V. E., 1968, "Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid," J. Appl. Mech. Tech. Phys., 9(2), pp. 190–194.
- [3] Stiassnie, M., 1984, "Note on the modified nonlinear Schrödinger equation for deep water waves," Wave Motion, 6(4), pp. 431–433.
- [4] Dysthe, K. B., 1979, "Note on a Modification to the Nonlinear Schrodinger Equation for Application to Deep Water Waves," Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci., 369(1736), pp. 105–114.
- [5] Lo, E. Y., and Mei, C. C., 1987, "Slow evolution of nonlinear deep water waves in two horizontal directions: A numerical study," Wave Motion, 9(3), pp. 245–259.
- [6] Lo, E., and Mei, C. C., 1984, "A numerical study of water-wave modulation based on a higher-order nonlinear Schrödinger equation," J. Fluid Mech., 150(-1), p. 395.

- [7] Gibbs, R. H., and Taylor, P. H., 2005, "Formation of walls of water in 'fully' nonlinear simulations," *Appl. Ocean Res.*, **27**(3), pp. 142–157.
- [8] Gibson, R. S., and Swan, C., 2007, "The evolution of large ocean waves: the role of local and rapid spectral changes," *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **463**(2077), pp. 21–48.
- [9] McLean, J. W., 1981, "Instabilities of finite-amplitude water waves," *J. Fluid Mech.*, **114**(-1), p. 315.
- [10] Ducroz, G., and Bonnefoy, F., 2007, "3-D HOS simulations of extreme waves in open seas," *Nat. Hazards ...*, (2003), pp. 109–122.
- [11] Xiao, W., Liu, Y., Wu, G., and Yue, D., 2013, "Rogue wave occurrence and dynamics by direct simulations of nonlinear wave-field evolution," *J. Fluid Mech.*, **720**, pp. 357–392.
- [12] Dommermuth, D. G., and Yue, D. K. P., 1987, "A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves," *J. Fluid Mech.*, **184**(-1), p. 267.
- [13] West, B. J., Brueckner, K. A., Janda, R. S., Milder, D. M., and Milton, R. L., 1987, "A new numerical method for surface hydrodynamics," *J Geophys. Res.*, **92**(C11), pp. 11803–11824.
- [14] Bitner-Gregersen, E., and Toffoli, A., 2012, "On the probability of occurrence of rogue waves," *Nat. Hazards Earth ...*, **12**(3), pp. 751–762.
- [15] 宝谷英貴, 早稻田卓爾, 藤本航, 清松啓司, 茂住研人, and 谷澤克治, 2014, "任意の波浪スペクトルから発生しうるフリーク波を実験水槽に再現する手法," *日本船舶海洋工学会春季講演会論文集*, pp. 109–112.
- [16] 藤本航, 2013, "第三世代波浪モデルと高次スペクトル法による フリーク波の再現とその形状," *東京大学工学部 卒業論文*.
- [17] Onorato, M., Osborne, a. R., and Serio, M., 2002, "Extreme wave events in directional, random oceanic sea states," *Phys. Fluids*, **14**(4), p. L25.