

多項式環上の a_2 構造について

山口大 文理 菅原民生

§1. Allowable sequences

Def 正数の増加列 $A = (i_1, i_2, \dots, i_r)$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r$ を sequence という. sequence A に対して Z_2 上の多項式環

$$P_A = Z_2[X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_r}], \quad \deg X_{i_j} = i_j$$

を考える.

$$D' = \{x \in P_A \mid \deg x > 0\}$$

として帰納的に $D^n = D^{n-1} \cdot D'$ を定義する:

P_A に mod 2 Steenrod algebra a_2 が作用すれば, その truncated algebra $TPA = P_A/D^3$ にも作用する.

Def TPA に a_2 が作用するとき, A は allowable という.

Thomas は [1] で次の定理を証明した.

定理 (Thomas)

A を allowable とするとき $n \in A$ について

$$\binom{n-t-1}{t} \equiv 1 \pmod{2}$$

ならば $n-t \in A$ で, さらに

$$S_q^t X_{n-t} \equiv X_n, \quad S_q^t X_n \equiv 0 \pmod{D^2}$$

が成り立つ.

Def. A に関する定理の条件を T 条件といい, T 条件を満たす sequence を T sequence という. n を含む最小の T sequence を minimum sequence といい, T_n で表わす.

Proposition 1

A, B を n の disjoint T sequences で共に allowable (又は T sequences) とすればその union $A+B$ も allowable (又は T sequence) である.

証明 U_2 は Cartan formula によって Hopf algebra であり, $TP_{A+B} \approx (TP_A \otimes TP_B)/D^3$ だから明らかである.

Def. T sequence A が n の T sequences の disjoint union にならないとき irreducible という.

Proposition 2.

$A = (i_1 i_2 \dots i_r)$ が allowable (又は T sequence) ならば $2A = (2i_1 2i_2 \dots 2i_r)$, $\frac{A}{2} = \{A \text{ から奇数を除き, 偶数を半分にした } T\text{-sequence}\}$ も allowable (又は T sequence) である.

証明 $\varphi: U_2 \rightarrow U_2$, $\varphi(S_i^{2i+1}) = 0$, $\varphi(S_i^{2i}) = S_i^i$ は Adem relation と両立して algebra homo となることから allowable の case がわかる. また T sequence についても $\binom{n-t-1}{t} \equiv \binom{2n-2t-1}{2t} \pmod{2}$ から明らかである.

Def. Tsequence A が奇数を含むとき simple という.

Def $A = (1)$, 又は $A = (2 \sim n)$ を simple classical
 といい, simple classical sequence の 2^t 倍を単に
 classical という.

Def simple allowable sequence で classical でない
 ものを simple exceptional といい, simple exceptional
 sequence の 2^t 倍を単に exceptional という.

Classical sequences は $H^*(BO(1), \mathbb{Z}_2)$, $H^*(BSO(n), \mathbb{Z}_2)$
 と Proposition 2 によって allowable である. 従って $\equiv$
 では simple exceptional sequences をすべて求めることが
 当面の目標である.

§2

定理 1

A を allowable とする. このとき $t \geq 2$ に対して

$$2^{t+1}, 2n \in A \quad \text{ならば} \quad 2^t + 2 \leq 2n \leq 2^{t+1} + 2, \quad 2n \neq 2^{t+1}$$

ならば $2n-1 \in A$.

この定理と Proposition 2 からただちに次の系を得る.

系

A を allowable とする. $t > s > 0$ なる t と s に対して

$2^t + 2^{s-1}, 2^s m \in A, 2^t + 2^s \leq 2^s m \leq 2^{t+1} + 2^s, 2m \neq 2^{t+1}$
 ならば $2^s m - 2^{s-1} \in A$.

定理1の証明のため, Lemma をいくつか用意する. 以下
 すべて $\text{mod } D^3$ で, すなわち TPA において考えよう.

Lemma 1.

$$S_q^m D_{n+1}^2 = 0$$

証明. $\forall \chi_k \chi_{n-k+1} \in D_{n+1}^2$ に対して

$$\begin{aligned} S_q^m(\chi_k \chi_{n-k+1}) &= \sum_{i=0}^m S_q^i \chi_k \cdot S_q^{m-i} \chi_{n-k+1} \\ &= S_q^k \chi_k \cdot S_q^{m-k} \chi_{n-k+1} + S_q^{k-1} \chi_k \cdot S_q^{m-k+1} \chi_{n-k+1} \\ &= \chi_k^2 \cdot S_q^{m-k} \chi_{n-k+1} + S_q^{k-1} \chi_k \chi_{n-k+1}^2 = 0 \end{aligned}$$

系

$$a \neq b, S_q^a \chi_{b+1} \in D^2 \text{ ならば } S_q^{2a} S_q^b \chi_{b+1} = 0$$

証明 $a > b$ のときは明らかに $S_q^{2a} S_q^b \chi_{b+1} = 0$. $a < b$ の
 ときは, $S_q^{2a} S_q^b \chi_{b+1} = \sum_{j=0}^a \binom{b-1-j}{2a-2j} S_q^{2a+b-j} S_q^j \chi_{b+1} = S_q^{a+b} S_q^a \chi_{b+1}$.
 Lemma 1 から $S_q^{2a} S_q^b \chi_{b+1} = 0$.

Lemma 2.

$$\binom{b}{a} \equiv 0 \pmod{2} \text{ ならば } S_q^{2a} S_q^b \chi_{b+1} = 0$$

証明. $a \neq b$ で: Thomas の定理から $S_q^a \chi_{b+1} \in D^2$. よって
 Lemma 1 の系より明らか!

$k \in A$ に対して $\{\chi_i \mid i \geq k\}$ で生成される TPA の ideal
 を R_k で表す.

Lemma 3

A is allowable とする.

$$2^{t+1} \in A, \quad 2^{t-1} + 1 \leq n \leq 2^t, \quad 2n+1 \notin A$$

$$\text{ならば, } S_2^n \chi_{n+1} \equiv \sum_{i=0}^{2^t-n} \chi_{n-i} \chi_{n+1+i} \pmod{R_{2^{t+2}}}.$$

証明. 以下すべて $\pmod{R_{2^{t+2}}}$ とする.

$$S_2^n \chi_{n+1} = \sum_{i=0}^{2^t-n} a_i \chi_{n-i} \chi_{n+1+i}$$

とある.

1) n が偶数の時.

$$\chi_{n+1}^2 = S_2^1 S_2^n \chi_{n+1} = a_0 \chi_{n+1}^2 + \sum_{j=1}^{2^{t-1}-\frac{n}{2}} (a_{2j-1} + a_{2j}) \chi_{n-2j+1} \chi_{n+2j+1}$$

だから $a_0 = 1, \quad a_{2j-1} = a_{2j} \quad (j=1, 2, \dots, 2^{t-1}-\frac{n}{2})$ を得る.

$$S_2^2 S_2^n \chi_{n+1} = \binom{n-1}{2} S_2^{n+2} \chi_{n+1} + S_2^{n+1} S_2^1 \chi_{n+1} = 0$$

1-1) $n \equiv 0 \pmod{4}$ の時.

$$0 = S_2^2 S_2^n \chi_{n+1} = (1 + a_1) \chi_{n+1} \chi_{n+2}$$

$$+ \sum (a_{4j+2} + a_{4j+4}) \chi_{n-4j-2} \chi_{n+4j+5} + (a_{4j+3} + a_{4j+5}) \chi_{n-4j-3} \chi_{n+4j+6}$$

よって $1 = a_1 = a_2 = \dots = a_{2^t-n}$ を得る.

1-2) $n \equiv 2 \pmod{4}$ の時.

$$0 = S_2^2 S_2^n \chi_{n+1}$$

$$= \sum (a_{4j} + a_{4j+2}) \chi_{n-4j} \chi_{n+3+4j} + (a_{4j+1} + a_{4j+3}) \chi_{n-1-4j} \chi_{n+4j+4}$$

二の場合も同様 $1 = a_1 = a_2 = \dots = a_{2^t-n}$ を得る.

2) n が奇数の時

$$\binom{2n+1-1}{2} \equiv \binom{n}{1} \equiv 1 \quad (2) \quad \text{だから } 2n-1 \notin A \text{ ならば } 2n-3 \notin A$$

である. 1) の場合によつて

$$S_q^{n+1} \chi_{n+2} \equiv \sum_{i=0}^{2^t-1-n} \chi_{n+1-i} \chi_{n+2+i} \pmod{R_{2^t+2}}.$$

$$0 = S_q^1 S_q^n \chi_{n+1} = \sum_{j=0}^{2^t-1-n+1} (a_{2j} + a_{2j+1}) \chi_{n-2j} \chi_{n+2+2j}$$

が成り立つので, $a_{2j} \equiv a_{2j+1} \pmod{2}$ を得る.

$$\begin{aligned} S_q^{n+1} \chi_{n+2} &= S_q^{n+1} S_q^1 \chi_{n+1} = S_q^2 S_q^n \chi_{n+1} + \binom{n-1}{2} S_q^{n+2} \chi_{n+1} \\ &= S_q^2 S_q^n \chi_{n+1} \end{aligned}$$

2-1) $n \equiv 1 \pmod{4}$ の時.

$$\begin{aligned} S_q^{n+1} \chi_{n+2} &= S_q^2 S_q^n \chi_{n+1} \\ &= \sum a_{4j+1} (\chi_{n-1-4j} \chi_{n+4+4j} + \chi_{n+1-4j} \chi_{n+2+4j}) \\ &\quad + \sum a_{4j+2} (\chi_{n-2-4j} \chi_{n+5+4j} + \chi_{n-4j} \chi_{n+3+4j}) \end{aligned}$$

よつて $1 = a_0 = a_2 = \dots = a_{2^t-n}$ を得る.

2-2) $n \equiv 3 \pmod{4}$ の時.

$$\begin{aligned} S_q^{n+1} \chi_{n+2} &= S_q^2 S_q^n \chi_{n+1} \\ &= \sum a_{4j} (\chi_{n-4j} \chi_{n+3+4j} + \chi_{n+2-4j} \chi_{n+1+4j}) \\ &\quad + \sum a_{4j+3} (\chi_{n-3-4j} \chi_{n+6+4j} + \chi_{n-1-4j} \chi_{n+4+4j}) \end{aligned}$$

よつて $1 = a_1 = a_3 = \dots = a_{2^t-n}$ を得る.

q.e.d.

定理1の証明

1) $2n = 2^t + 2$ ならば明らか.

2) $2n = 2^{t+1} + 2$ のとき. $2^t = s$ とおき $2s+1 \notin A$ と仮定する.

$$S_q^s \chi_{s+1} = \sum_{j=0}^s a_j \chi_{s-j} \chi_{s+1+j}$$

とおく.

$$\begin{aligned} \chi_{s+1}^2 &= S_2^1 S_2^s \chi_{s+1} = \sum_{j \geq 0} a_j S_2^1 (\chi_{s-j} \chi_{s+1+j}) \\ &\equiv a_0 \chi_{s+1}^2 \pmod{R_{s+3}}. \end{aligned}$$

これから $a_0 \equiv 1(2)$ を得る.

$$\begin{aligned} 0 &= (S_2^{s+2} + S_2^{s+1} S_2^1) \chi_{s+1} = S_2^2 S_2^s \chi_{s+1} \\ &\equiv \sum_{j \geq 0} a_j S_2^2 (\chi_{s-j} \chi_{s+1+j}) \\ &\equiv (a_0 + a_1) \chi_{s+2} \chi_{s+1} \pmod{R_{s+3}} \end{aligned}$$

これから $a_0 \equiv a_1 \equiv 1(2)$ を得る.

$$S_2^s S_2^s \chi_{s+1} = S_2^{s+\frac{s}{2}} S_2^{\frac{s}{2}} \chi_{s+1} + \sum * S_2^{2s-i} S_2^i \chi_{s+1} = 0$$

ここで第一項は Lemma 1 と $\left(\frac{s}{\frac{s}{2}}\right) \equiv 0(2)$ によって、第二項は

$2s-i > i+s+1$ によってそれぞれ 0 になる.

$$\begin{aligned} \text{他方} \quad S_2^s S_2^s \chi_{s+1} &= \sum_{j=0}^{s-2} a_j S_2^s (\chi_{s-j} \chi_{s+1+j}) \\ &= \sum_{j \geq 0} a_j \left\{ \sum_{i=0}^s S_2^{s-i} \chi_{s-j} \cdot S_2^i \chi_{s+1+j} \right\} \\ &= \sum_{j \geq 0} a_j \left\{ \sum_{i=0}^s \binom{s-j-1}{s-i} \binom{s+j}{i} \chi_{2s-i-j} \chi_{s+1+j+i} \right\} \end{aligned}$$

ここで $i < s$ とすると $\binom{s+j}{i} \equiv 1(2)$ から $i < j$, そのとき $\binom{s-j-1}{s-i} \equiv 0(2)$.

よって $i = s$ の項のみが残る

$$= \sum_{j \geq 0} a_j \chi_{2s-j} \chi_{2s+1+j}.$$

$$0 = S_2^s S_2^s \chi_{s+1} \equiv a_1 \chi_{s+1} \chi_{2s+2} \pmod{R_{2s+3}}.$$

これは矛盾である. よって $2s-1 \in A$.

3) $2^t + 4 \leq 2n \leq 2^{t+1} - 2$ の場合.

ここで $2^t = s$ とする. $2n-1 \in A$ と仮定すると Lemma 3 から

$$S_2^{n-1} \chi_n \equiv \sum_{j=0}^{s+1-n} \chi_{n-1-j} \chi_{n+j} \pmod{R_{s+2}}.$$

$S_2^{2n-s} S_2^{n-1} \chi_n$ について考えると,

$$\binom{n-1}{n-\frac{s}{2}} \equiv \binom{n-1}{\frac{s}{2}-1} \equiv 1 \pmod{2} \iff n \equiv \frac{s}{2} \pmod{2}$$

であり, 今条件から右辺が成り立たないので $\binom{n-1}{n-\frac{s}{2}} \equiv 0 \pmod{2}$

であって, Lemma 2 から $S_2^{2n-s} S_2^{n-1} \chi_n = 0$ である.

他方, $k = 2n - s$ とおいて $S_2^k \left(\sum_{i=0}^{s+1-n} \chi_{n-1-j} \chi_{n+j} \right)$ の $\chi_{k-1} \chi_{s+k}$ の項は $i = j + k - n$ とし, $S_2^k \left(\sum_{i \geq 0} \chi_{k-i-1} \chi_{s+i} \right)$ について調べればよく,

$$S_2^i \chi_{k-i-1} \cdot S_2^{k-i} \chi_{s+i} = \binom{k-i-2}{i} \binom{s+i-1}{k-i} \chi_{k-1} \chi_{s+k}.$$

今 $i > 0$ とすると $k-i < 2^t$ だから

$$\binom{k-i-2}{i} \binom{s+i-1}{k-i} \equiv \binom{k-i-2}{i} \binom{i-1}{k-i} \pmod{2}$$

ところが $k \geq 2i$ ならば $k-i \geq i > i-1$ で $\binom{i-1}{k-i} \equiv 0 \pmod{2}$.

他方 $k \leq 2i-1$ ならば $k-i-2 \leq i-3 \leq i$ で $\binom{k-i-2}{i} \equiv 0 \pmod{2}$

よって $i=0$ の時だけが残って

$$0 = S_2^k S_2^{n-1} \chi_n = \chi_{k-1} \chi_{2n} + \text{other terms}$$

となつて矛盾. よって $2n-1 \in A$.

q.e.d.

定理 2

A は allowable, irreducible とする.

このとき $2 \in A$ ならば A は simple classical である.

証明 $t = \max \{t' \mid 2^{t'+1} \in A\}$ とし, $m_0 = \max \{m \in A \mid 2^{t+1} \leq m < 2^{t+1}\}$ とすると, 定理 1 から $(2 \sim m_0) \subset A$ である.

$2^{t+1} < n < 2^{t+1} + 2^t$ なる n が存在すると仮定し, その最小のもの n_0 とする.

$$n_0 = 2^{t+1} + 2^s(2a+1), \quad 0 \leq s < t$$

とかくと,

$$\binom{2^{t+1} + 2^s(2a+1) - 2^s - 1}{2^s} \equiv \binom{2^{s+1} - 1}{2^s} \equiv 1 \pmod{2}$$

であるから $2^{t+1} + 2^{s+1}a = n_0 - 2^s \in A$. n_0 の最小性から

$a=0$ で $n_0 = 2^{t+1} + 2^s$. t の最大性から $0 < s < t$ である.

$$\text{次に } \binom{2^{t+1} + 2^s - 2^{s+1} - 1}{2^{s+1}} \equiv \binom{2^{s+1} + 2^s - 1}{2^{s+1}} \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{だから}$$

$2^{t+1} - 2^s = 2^{t+1} + 2^s - 2^{s+1} \in A$. m_0 の最大性から

$$m_0 \geq 2^{t+1} - 2^s \geq 2^t + 2^{s-1}.$$

よって $2^t + 2^{s-1} \in A$.

他方, $2^{t+1} + 2^s \in A$ だから定理1の系から $2^{t+1} + 2^{s-1} \in A$.

これは n_0 の最小性に反する. よって上の n は存在しない.

従って $B = A - (2 \sim m_0) \neq \emptyset$ とすれば $B \ni n$ は

$n = 2^{t+1}$ か $n \geq 2^{t+1} + 2^t$ である. 今 $n = 2^{t+1}$ とすると

$$\binom{n-k-1}{k} \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{ならば } k=0 \text{ で } n = n-k \in B \text{ である.}$$

また $n \geq 2^{t+1} + 2^t$ とし $n-k \notin B$ と仮定すると $n-k \in$

$(2 \sim m_0)$, すなわち $m_0 \geq n-k$, よって $k \geq 2^{t+1} + 2^t - m_0 > 2^t$.

$$\binom{n-k-1}{k} \equiv 1 \pmod{2} \text{ と仮定し, } k = 2^t b + b', \quad 0 \leq b' < 2^t, \quad 0 < b$$

とすると,

$$\binom{n-k-1}{k} \equiv \binom{n-k-1}{2^t b + b'} \equiv \binom{n-k-1}{2^t b} \binom{n-k-1}{b'} \pmod{2}$$

だから $\binom{n-k-1}{2^t b} \equiv 1 \pmod{2}$ である.

$b > 1$ とすると $2^t b \geq 2^{t+1} > m_0 \geq n-k-1$ で矛盾.

$b = 1$ とすると

$$\binom{n-b-1}{b} \equiv \binom{n-k+2^t-1}{b} \equiv \binom{n-k-1}{b} \equiv 1 \pmod{2}$$

だから $n-k+2^t \in A$ で $n-k+2^t \leq m_0+2^t < 2^{t+1}+2^t$.

他方, $n-k+2^t = n-b \geq 2^{t+1}+2^t-b > 2^{t+1}$ で矛盾.

以上で $n \in B$, $\binom{n-k-1}{k} \equiv 1 \pmod{2}$ ならば $n-k \in B$ で
 B は T sequence となるが, A は irreducible だから $B = \emptyset$.

よって $A = (2 \sim m_0)$. q. e. d.

次の Proposition が成り立つ.

Proposition 3

A は allowable とする. このとき

$$2^t-1, 2^t+2 \in A, \quad 2^t+1 \notin A \quad \text{ならば} \quad 2^{t+1}-3, 2^{t+1}-1 \in A.$$

証明. $2^t = s$ とおき, $s-1, s+2 \in A$, $s+1, 2s-3 \notin A$ と仮定する.

$$S_2^{s-2} \chi_{s-1} = \sum_{j=0}^{s-4} a_j \chi_{s-2-j} \chi_{s-1+j}$$

とおく.

$$\chi_{s-1}^2 = S_2^1 S_2^{s-2} \chi_{s-1} = a_0 \chi_{s-1}^2 + \dots$$

から $a_0 \equiv 1 \pmod{2}$ を得る.

$$S_2^4 S_2^{s-2} \chi_{s-1} = \binom{s-3}{4} S_2^{s+2} \chi_{s-1} + S_2^5 S_2^2 \chi_{s-1} = 0$$

== 2" * = 項は $S_2^2 \chi_{s-1} \in D^2$ と Lemma 1 による.

他方
$$S_q^4 S_q^2 \chi_{s-1} = \sum_{j=0}^{s-4} a_j S_q^4 (\chi_{s-2-j} \chi_{s-1+j})$$

$$= a_0 (\chi_{s+2} \chi_{s-1} + \chi_{s-2} \chi_{s+3}) + \dots$$

これから $a_0 \equiv 0 (2)$ となり矛盾。よって $2s-3 \in A$ 。

次に $\left(s + \frac{s}{2} - 2\right) \equiv 1 (2)$ 故に Thomas の定理によつて $2s-3 \in A$ から $s + \frac{s}{2} - 1 \in A$ である。

よって $2s-1 \notin A$ と仮定する。

$$S_q^{s-1} \chi_s = \sum_{j=0}^{s-3} b_j \chi_{s-1-j} \chi_{s+j}$$

と置く。

$$S_q^2 S_q^{s-1} \chi_s = \binom{s-2}{2} S_q^{s+1} \chi_s + S_q^s S_q^1 \chi_s = 0$$

== 2nd term = 0 故に $S_q^1 \chi_s \in D^2$ と Lemma 1 による。

他方
$$S_q^2 S_q^{s-1} \chi_s = \sum_{j=0}^{s-3} b_j S_q^2 (\chi_{s-1-j} \chi_{s+j})$$

$$= b_0 \chi_{s-1} \chi_{s+2} + \dots$$

これから $b_0 \equiv 0 (2)$ を得る。

$\left(\frac{s-1}{2}\right) \equiv 1 (2)$ から Thomas の定理によつて

$$S_q^{\frac{s}{2}-1} \chi_s \equiv \chi_{s+\frac{s}{2}-1} \pmod{D^2}.$$

である。

$$S_q^{s-1} S_q^{s-1} \chi_s = S_q^{s+\frac{s}{2}-1} S_q^{\frac{s}{2}-1} \chi_s + \sum \binom{s-2-i}{s-1-2i} S_q^{2s-2-i} S_q^i \chi_s$$

$$= S_q^{s+\frac{s}{2}-1} (\chi_{s+\frac{s}{2}-1} + \dots) = \chi_{s+\frac{s}{2}-1}.$$

他方
$$S_q^{s-1} S_q^{s-1} \chi_s = \sum_{j=0}^{s-3} b_j S_q^{s-1} (\chi_{s-1-j} \chi_{s+j})$$
 により

$$S_q^{s-1-i} \chi_{s-1-j} \cdot S_q^i \chi_{s+j} = \binom{s-2-j}{s-1-i} \binom{s+j-1}{i} \chi_{2s-2-i-j} \chi_{s+j+i}$$

$j > 0$ とすると $\binom{s-1-j}{i} \equiv 1 (2)$ から $i \leq j$ 。よって $\binom{s-2-j}{s-1-i} \equiv 0 (2)$

よって $j=0$ の項のみが残り,

$$S_2^{s-1} S_2^{s-1} \chi_s = b_0 \sum_i S_2^{s-1-i} \chi_{s-1} + S_2^i \chi_{s+j} = 0$$

これは矛盾. よって $2s-1 \in A$ となる.

Proposition 4

A is allowable とする.

1) $10, 15 \in A$ ならば 11 又は $18 \in A$

2) $13, 20 \in A$ ならば 17 又は $25 \in A$

3) $15, 20 \in A$ ならば 18 又は $27 \in A$

証明のポイントのみを示そう.

1) $11, 18 \notin A$ と仮定する.

$$S_2^8 \chi_{10} = a \chi_8 \chi_{10} + b \chi_6 \chi_{12} + c \chi_4 \chi_{14}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \chi_{10}^2 &= S_2^{10} \chi_{10} + S_2^9 S_2^1 \chi_{10} = S_2^2 S_2^8 \chi_{10} \\ &= a \chi_{10}^2 + b \chi_6 \chi_{14} + c \chi_6 \chi_{14} \end{aligned}$$

よって $a=1, b=c$ を得る.

$$\begin{aligned} 0 &= S_2^2 S_2^7 \chi_{10} + S_2^8 S_2^1 \chi_{10} = S_2^9 \chi_{10} \\ &= S_2^1 S_2^8 \chi_{10} = c \chi_4 \chi_{15} \end{aligned}$$

から $c=0$. ところで $S_2^{10} D_{12}^2 = 0$ だから

$$\begin{aligned} 0 &= S_2^{12} \chi_{10} + S_2^{11} S_2^1 \chi_{10} + S_2^{10} S_2^2 \chi_{10} = S_2^4 S_2^8 \chi_{10} \\ &= a \chi_{10} \chi_{12} + b \chi_{10} \chi_{12}. \end{aligned}$$

これから $1=a=b=c=0$ で矛盾.

2) 17, 25 & A と仮定する.

$$S_2^{12} \chi_{13} = a \chi_{12} \chi_{13} + \dots \quad \text{とおく.}$$

$$\chi_{13}^2 = S_2^1 S_2^{12} \chi_{13} = a \chi_{13}^2 + \dots \quad \text{から } a = 1$$

$$0 = S_2^{20} \chi_{13} + S_2^{16} S_2^4 \chi_{13} = S_2^8 S_2^{12} \chi_{13} = a \chi_{20} \chi_{13} + \dots, \text{ 矛盾.}$$

3) 18, 27 & A と仮定する.

$$S_2^{13} \chi_{14} = a \chi_{12} \chi_{15} + \dots \quad \text{とおく.}$$

$$\chi_{15}^2 = S_2^1 S_2^{14} S_2^1 \chi_{14} = S_2^1 S_2^2 S_2^{13} \chi_{14} = a \chi_{15}^2 + \dots \quad \text{から } a = 1$$

$$0 = S_2^{21} \chi_{14} + S_2^{17} S_2^4 \chi_{14} = S_2^8 S_2^{13} \chi_{14} = a \chi_{20} \chi_{15} + \dots, \text{ 矛盾.}$$

以上の結果を適用すると、最高次元 ≤ 31 の simple exceptional sequences は次のうちに含まれる:

4, 6, 7

4, 6, 7, 8, 10 ~ 15

4, 6, 7, 8, 10 ~ 16, 18 ~ 31

4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 26 ~ 31

4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 31

8, 12, 14, 15

8, 12, 14, 15, 16, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30

8, 12, 14, 15, 16, 20, 22, 23, 24, 26 ~ 30

8, 12, 14, 16, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 31

8, 12, 14, 15, 16, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31

8, 12, 14, 15, 16, 20, 22, 23, 24, 26 ~ 31

8, 12 16 20 24 28 30 31

16 24 28 30 31.

§3. exceptional sequences の 3.1

$$P_n = H^*(BSO(n), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_2 w_3 \cdots w_n]$$

における a_2 構造は,

$$S_2^j w_i = \sum_{t=0}^j \binom{i-j+t-1}{t} w_{j-t} w_{i+t}$$

で与えられる.

P_n に含まれる a_2 で閉じた ideal I について

$$P_n/I \approx \mathbb{Z}_2[x_{i_1} \cdots x_{i_r}]$$

となれば sequence $A = (i_1, \dots, i_r)$ は allowable である.

$P_{2^{t+1}-1}$ の中で, $w_2, w_4, \dots, w_{2^t-1}$ で積と a_2 の作用とで生成された ideal を I とすると.

$$P_{2^{t+1}-1}/I = P_A, \quad A = (2^{t+1}-2^t, 2^{t+1}-2^{t-1}, \dots, 2^{t+1}-2, 2^t-1)$$

が得られ, この A は simple exceptional である.

また $P_{2^{t+1}}$ の中で,

$$x_2 = w_2, \quad x_{2^{k+1}} = S_2^{2^{k-1}} S_2^{2^{k-2}} \cdots S_2^2 S_2^1 x_2 \quad k \geq 1$$

として, $\{x_i \mid i = 2^{k+1}, k \geq 0\}$ で生成される ideal を I とすると

$$P_{2^{t+1}+1}/I = P_A, \quad A = (2 \sim 2^{t+1}+1) - (2, 3 \cdots 2^{k+1} \cdots 2^{t+1}+1)$$

が得られる.

$$A = (A - 2^{t+1}) + (2^{t+1})$$

だから A は reducible である.

今 $P_A - \chi_{2^{t+1}}$ を考えると, $\chi_{2^{t+1}}$ は どの S_2^i -image にも入っていないからこれはやはり a_2 の作用する $\mathbb{Z}_2$ -algebra である. $P_A - \chi_{2^{t+1}}$ の中で, $\chi_{2^{t+1}}$ の含まれる多項式よりなる ideal を I' とすると I' は a_2 で閉じてあり

$$P_A - \chi_{2^{t+1}} / I' = P_B, \quad B = (2 \sim 2^{t+1} - 1) - (2, 3 \dots 2^{t+1})$$

が得られる. これは simple exceptional の列である.

文 献

- [1] Thomas, E. Steenrod squares and H-spaces. II
Ann. of Math. Vol. 81 (1965).