

複素積分と Lagrangean 多様体 青本 和彦

§ 序 f を 原素 0 で 正則 な n 変数 $z = (z_1, \dots, z_n)$ の 函数 とする. この 時 ベクトル場 $\text{grad } \text{Re } f$ と $f = c$ (c は 0 に 近い 正数) の Cell 構造 との 関係 について 1 つ の 問題 を 提出 する.

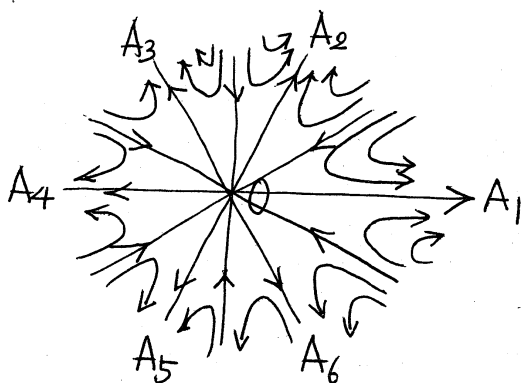
[問題] ベクトル場 $v = \text{grad } \text{Re } f$ の 軌跡

$$\frac{dz_j}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z_j}$$

で $t = -\infty$ まで 原素 0 に 集積 する ものの 全体 を M^- とおくと M^- は n 次元 の CW-複体 で 且つ 実際 には Lagrangean 多様体 片 から なっている だろうか? $M^- \cap (f=c)$ は $f=c$ の Cell 構造 を 与える だろうか?

例 1. $n=1$ として $f = z^m$ とする

すると $\text{grad } \text{Re} f$ の軌跡上では
 $\text{Im} f$ は const. になる. 図示すれば



原実を通るものは $\arg z = \frac{k\pi}{m}$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, 2m-1$) この中で $t = -\infty$ ~~を~~ 0 を

極限実として持つものは $\arg z = \frac{k\pi}{m}$
 $(k=0, 2, \dots, 2m-2)$ の m 箇存在する.

例2. $f = z_1^{m_1} + z_2^{m_2} + \dots + z_n^{m_n}$

$m_1, m_2, \dots, m_n \geq 1$, 整数 とすると

$\mathcal{MC}$ は 岡睦雄, Brieskorn-Pham 氏
 により得られた join をつくることに
 相当している. Lagrangean 多様体
 になることも明らかである.

これらの $\mathcal{MC}$ は 積分

$$\int e^{\lambda f(z)} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \quad (\lambda \rightarrow +\infty)$$

の漸近展開の表示のすべてを与えることに相当している. 事実 $f(z)$ が上記の例のような場合 $R = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$,

$M = \Omega^1(R)$ として R 上の外微分形式

$\oplus \wedge^p M = \Omega^p$ 上に次のように定義される
De Rham hypercohomology $H(\Omega^\bullet)$

$$\mathcal{D}_\omega : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1} \rightarrow$$

$$\omega = \lambda df$$

の rank に等しいだけの $\mathcal{M}^-$ を構成出来る.

§2. 積分

$$\int f(z)^\lambda dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$$

を考える. 但し $f(z)$ は多項式とする. ベクトル場

$v = \text{grad} \log |f(z)|$ を考え. これは

[仮定 I] v の 臨界点 $f(z) \neq 0$ となるものはすべて孤立しているとする.

このとき この孤立点を $P_1, \dots, P_M$ とすれば
 各孤立点 P_0 に対して局所的に
 得られる §1 の意味での Lagrangian
 manifold 片を ν により全域に
 接続する. これを $\mathcal{M}_{\nu_1}, \dots, \mathcal{M}_{\nu_M}$
 ($1 \leq i \leq M$) とおくと これらは $\mathcal{M}$ 対
 $(\mathbb{C}^m, (f=0))$ の 相対 cycle を与える

ことになるが これが 次の hypercohomology
 の基底を与えることになるであろうか?

すなわち $\omega = \frac{df}{f}$ とおき R を有理
 関数で $f=0$ におけるみ極を持つものの
 全体とする. R 上の 微分型式環
 Ω に対して De Rham cohomology
 $H(\Omega)$

$$\left(\begin{array}{l} \nabla_\omega : \Omega^p(R) \rightarrow \Omega^{p+1}(R) \rightarrow \\ \varphi \mapsto d\varphi + \lambda \frac{df}{f} \wedge \varphi \end{array} \right)$$

を $\lambda \rightarrow \infty$ の漸近展開 (漸近展開) は各
 $\mathcal{M}_{\nu_k}$ に対して 1 つずつ存在する
 であろうか?

例.3 積分 ($f_1, \dots, f_m$ real とする)

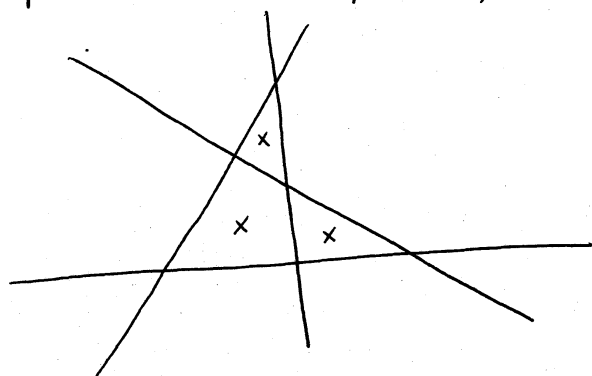
$$\int f_1^{\lambda_1} \cdots f_m^{\lambda_m} \varphi dx_1 \cdots dx_n$$

を考える. ここで $f_1, \dots, f_m$ を 線型 とする.

φ は $(f_1=0) \cup \dots \cup (f_m=0)$ でのみ 極を持つ

有理函数 とする. $\lambda_j = \lambda_j^0 + n_j$ ($n_j > 0$ 整数) とおいて $f = f_1^{m_1} f_2^{m_2} \cdots f_m^{m_m}$ と

おくと $\text{grad} \log |f|$ の 臨界点 は
 おいて 裏であって かも $\mathbb{R}^n$ を
 壁 $\text{Re} f = 0$ で仕切られた 部屋で
 compact なものの中にのみ 存在する.



今 臨界点 が すべて non-degenerate
 とすれば $\mathcal{M}_j$ は compact な部屋
 そのものである. 従って $H^n(\Omega)$ の
 双対基底を与える.

文献 J. Milnor, Singular points
of complex hypersurfaces
A. Weinstein, Normal modes for
nonlinear - Hamiltonian Systems
K. Aomoto On vanishing of
cohomology attached to certain
multiplicative meromorphic functions