

ステファン問題の級数解

宇都宮大学 教養部 徳田 尚之

§ 1 いとぐち

ステファンが 1889 年に氷の永結問題と題して発表して以来、いわゆる動く境界値問題として知られる "ステファン" 問題はその実用上の重要性もあ、多くの研究者の注目をひいて来た。ステファン問題の一番の難関は、事前にはその位置が定まらず空間中を動く自由境界問題の取扱の方法にある。この境界面は一般には二つの異なる相(氷と氷又は氷と氷蒸気等)の界面を形成する。この界面での条件のためステファン問題は非線形境界値問題となり、いわゆる解の重ね合わせが出来ない。そのため使用出来る解法が極端に制限される。厳密解も相似性のある特殊な場合に限られており、これまで知られているのは Neumann の解 (Carslaw & Jeager 1956) しか存の様である。この特殊な非線形問題を扱うのに色々な数値解法および近似解法が考へられて

いるが、1974年までに開発されている解法については Ockendon & Hodgeson (1974) に詳しく解説されているので参照していただきたい。著者はステファニ問題の新しい数値解法 (Tokuda 1979) を発表したが、これは同じ問題を級数展開で求める新しい方法を紹介する。ただ上記数値解でも時間の短い領域ではその解の一意性のため数値解には馴染みのない本論文の級数解を使用していることを附言しておく。

ステファニ問題で最初に級数解を提唱したのは Evans, Isaacson & MacDonald (1950) で、境界上の熱流束があると考えられた時間の関数として表わされているときの解を与えた。この解は、境界面の位置、温度場と時間と距離座標のべき乗に展開する方法であるが、二重級数展開であるため解は非常に煩雑である。一方 Portnov (1962) はステファニ問題の形式的厚積分表示を使って級数解を求めるという新しい方法を提案した。実際の級数解は Jackson (1964), Westphal (1967) 等によって求められた。この方法では温度場自体は直接解く必要はなく、界面での境界条件を満たすためにより級数の係数を定めることが出来、Evans et al の解に較べると簡潔である。実際 Westphal (1967) は、相変化を誘起する加熱（又は冷却）壁面が Newton の冷却条件の場合につ

いて解き、表面壁面温度と界面位置と時間のべき屋南で力4
項まで求めるのに成功している。しかしこれらの級数解は古
典的な時間座標についてのべき屋南で時間のごく小さい範囲
でしか使えない(第5章をみよ)。

著者は、昨年の本研究会で発表した新しい級数展開法
(徳田 1977) をこのステファン問題に応用したのでその
概要を示す。この方法の骨子は、屋南を行う関数群に新しい
従属変数と独立変数を導入することにある。事実これらの
新変数は r の 1 パラメータ連続変換群に対して不変とい
う条件を満足する変数で組み立てられていることが示される
。そしてこの変数の変換群への不変性を求める関数の級数解
の収束性の改善とその屋南の成立する領域の拡張に大きく寄
与していることが分っている。このステファン問題では屋南
を要する従属変数が従来の様に1個で⁵2個ある多変数問題
となる点も異なる点である。1 従属-1 独立変数の場合に証明し
た Büermann-Lagrange 定理と多従属-1 独立変数の場合に広
張する必要があるかその点については別の機会に述べる。

§2 基礎方程式

こゝでは、一次元、一相のステファン問題を考える。基礎
方程式については著者の数値解の問題 (Tokuda 1979) に全

く同じ問題で加熱(または冷却)面が Newton の放熱条件と
 与えられる場合と取扱う。こゝでは距離 x , 温度 u , 時間 t を総て
 で無次元化しており, $0 \leq x \leq X$ の領域が固体領域(又は液体
 領域), $x \geq X$ が液体(又は固体)領域とする。 $x=0$ の面
 で熱の注入又は放出を行う $x=X$ の界面での固体 $\rightarrow$ 液体への
 相変化と誘起している場合と考へよう。 $x \geq X$ の液体(又
 は固体)はちやうど融解点(又は凝固点)温度に保たれてい
 る, $0 \leq x \leq X$ の一相での温度場のみを考へなければよい。

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq X, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = u(0, t) = u_w(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X, t) = \frac{dX}{dt}, \quad (3)$$

$$u(X, t) = 1, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (5)$$

$$X(0) = 0. \quad (6)$$

こゝで u_w は冷却壁面の温度で, この冷却面が x 軸の原点にと
 られている。 X は界面の位置であり, 次えの各変数 $x^*, t^*,$
 X^*, u^* との間に次の様なる関係がある。

$$x = h/k x^*, \quad X = h/k X^*, \quad c = k(u_s - u_0)/\rho L, \\ t = c h^2 t^*/\rho h, \quad u = (u^* - u_0)/(u_s - u_0). \quad (7)$$

こゝで h は熱伝達率, k は Newton の放熱法則による熱伝達係
 数, ρ は密度, L は潜熱, u_0 は $x=0$ の壁面を冷やしている

冷却水の温度, u_s は凝固点温度である。もし $x \geq \chi$ の領域が半無限であれば, 方程式 (1) ~ (6) が示す様にこの問題を支配するパラメータは ϵ のみであることが分る。

§3. 級数解

新しい従属変数と 1 次の変数を導入しよう。

$$\eta = x/\chi, \quad \tau = \chi \dot{x}. \quad (8)$$

ここで $\dot{x} = dx/dt$ である。(8) の変数を使うと方程式 (1) ~ (6) は次の様に変形される。

$$\epsilon \frac{\dot{u}_w}{1-u_w} \chi^2 (1-u) - \epsilon \tau \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \epsilon \frac{d\tau}{d\tau} \chi^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(0, \tau) = \chi \frac{u_w}{1-u_w}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(1, \tau) = \frac{\chi \dot{\chi}}{1-\theta_w}, \quad (11)$$

$$u(0, \tau) = 0, \quad (12)$$

$$u(1, \tau) = 1, \quad (13)$$

$$\chi(0) = 0. \quad (14)$$

(8) で定義した τ は時間のみの変数で, $\tau(0) = 0$ としても原点近傍で正則な関数であることは後に容易に確認出来る。そこで τ はとったもののべき級数展開をとる。

$$\tau = d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + \dots \quad (15)$$

こゝで $d_1 \neq 0$. (15) の様に $d_1 \neq 0$ の積数 ε を単位 ε (almost unit) の積数と呼ぶ.

$$\widehat{\tau} \circ \tau = t \quad (16)$$

を満足する逆変 τ が存在することか証明される (Henrici 1974).

(9) 式の $\frac{u_w}{1-u_w} \chi^2$, $\frac{d^2}{dt^2} \chi^2$ は t について正則関数と考へてよから, (15), (16) から次の展開をもち.

$$\frac{u_w}{1-u_w} \chi^2 = a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 + \dots \quad (17)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \chi^2 = b_2 \tau^2 + b_3 \tau^3 + \dots \quad (18)$$

ただし, $a_1, a_2, \dots, b_2, b_3, \dots$ 等の係数は境界界面条件 (10),

(11) によつて定まる係数である. (17), (18) の関係を (9)

に代入すれば u は τ と η の解析関数と考へてよ. $u \in \tau$ の τ のべき積数に展開すると

$$u(\eta, \tau) = u_0(\eta) + \tau u_1(\eta) + \tau^2 u_2(\eta) + \dots \quad (19)$$

(17), (18), (19) を (9) ~ (14) に代入すると

$$\begin{aligned} & \varepsilon \{ a_1 \tau + a_2 \tau^2 + \dots \} \{ 1 - u_0 - \tau u_1 - \tau^2 u_2 + \dots \} - \varepsilon \tau \eta \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \tau \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \dots \right\} \\ & + \varepsilon \{ b_2 \tau^2 + b_3 \tau^3 + \dots \} \{ u_1 + 2\tau u_2 + \dots \} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + \tau \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \tau^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + \dots, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\chi \frac{u_w}{1-u_w} = - \left[\frac{\partial u_0}{\partial \eta}(0) + \tau \frac{\partial u_1}{\partial \eta}(0) + \dots \right], \quad (21)$$

$$\chi \frac{\dot{\chi}}{1-u_w} = \frac{\partial u_0}{\partial \eta}(1) + \tau \frac{\partial u_1}{\partial \eta}(1) + \dots, \quad (22)$$

$$u_0(0) + \varepsilon u_1(0) + \dots = 0, \quad (23)$$

$$u_0(1) + \varepsilon u_1(1) + \dots = 1. \quad (24)$$

§4 温度場関数の決定

(20) で ε の同じべきの項を集めておくと、 $u_0, u_1, \dots$ は次の方程式と満たさねばならぬ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} &= \varepsilon a_1(1-u_0) - \varepsilon \eta \frac{\partial u_0}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} &= \varepsilon a_2(1-u_0) - \varepsilon a_1 u_1 - \varepsilon \eta \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \varepsilon b_1 u_1, \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial \eta^2} &= \varepsilon a_3(1-u_0) - \varepsilon a_2 u_1 - \varepsilon a_1 u_2 - \varepsilon \eta \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \\ &\quad + \varepsilon b_2 u_1 + 2\varepsilon b_1 u_2, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (25)$$

$u_0, u_1, \dots$ が満たすべき境界条件は (23), (24) から

$$u_0(0) = u_1(0) = u_2(0) = \dots = 0. \quad (26)$$

$$u_0(1) = 1, \quad u_1(1) = u_2(1) = \dots = 0.$$

(25) は線形方程式で、(26) の境界条件を使うと温度場関数群 $\{u_n\}$ は容易に決定出来る。事実、この級数解の一番の瑕疵は、ステップ問題の非線形性の難点である界面の条件 (2), (3) (又は (11), (12), (21), (22)) とは全く独立に温度場を決定出来ることである。もちろん係数群 $\{a_n\}, \{b_n\}$ はこの界

$O(\tau^2)$ の解 : (42) の値を用いる

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} = \epsilon(1-\eta) + \frac{\epsilon^2}{2}.$$

$$\therefore u_1^{(2)} = \epsilon\left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3}{6}\right) + \frac{\epsilon^2}{4}\eta^2 - \left(\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon^2}{4}\right)\eta, \quad (43)$$

$$u_2'(0) = -\left(\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon^2}{4}\right), \quad u_2'(1) = \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon^2}{4}. \quad (44)$$

(21), (22) から $u_w^{(2)}$, $\chi^{(2)}$, $\tau^{(2)}$ を求めると

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon^2}{4}\right)\tau^{(2)} - \left\{\frac{\epsilon}{2} + \left(\frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon^2}{4}\right)\chi^{(2)}\right\}\tau^{(2)} - \left\{1 - \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)\chi^{(2)}\right\}\tau^{(2)} \\ & - \chi^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

$$u_w^{(2)} = 1 - \frac{\tau^{(2)}}{1 - \frac{\epsilon}{2}\tau^{(2)} + \left(\frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon^2}{4}\right)\tau^{(2)}}, \quad (46)$$

$$\tau^{(2)} = \chi^{(2)} \chi^{(2)}. \quad (47)$$

(45) は $\tau^{(2)}$ についての 3 次の代数方程式であり, $\tau^{(2)}(0) = 0$ となる根は $\tau^{(2)} = F(\chi^{(2)})$ とすると $(\chi^{(2)})_0 = 0$ である (この根は必ずそのような根は存在する). (47) とから $\chi^{(2)}$ は次の非線形微分方程式を解くことにより求めることができる.

$$\frac{d\chi^{(2)}}{dt} = \frac{F(\chi^{(2)})}{\chi^{(2)}}. \quad (48)$$

(48) は一般的には, closed-form に解けるわけが Runge-kutta 法で数値的に解くことができる. (48) から $\tau^{(2)}$ を求めれば $u_w^{(2)}$ は (46) から求めることができる. 以下この手順を繰返して任意の $O(\tau^n)$ までの χ , u_w の近似を求めることができる.

§5 計算結果

本論文では $O(\epsilon^2)$ まで正しく $\chi^{(1)}$, $u_0^{(2)}$ まで求めた。表1はこの級数解と数値解 (Tokuda 1979) を比較してある。表で t_x とあるのは界面位置が χ に達したときの時間である。また χ_c とあるのは界面位置を Green 関数により求めたものの次の様にして求める。(1) $x=0$ から χ まで積分し、ついで $t=0$ から $t=t_x$ まで積分し境界条件 (2), (3) を用いると

$$\chi_c(t) = \frac{\int_0^t u_0 dt + \epsilon \int_0^{\chi} u d\alpha}{1 + \epsilon} \quad (49)$$

ここで (49) の u_0 を $u_0^{(2)}$, $u = u_0 + \epsilon^{(2)} u_1 + \epsilon^{(4)} u_2$ と代入して求めた $\chi_c = \chi_c^{(2)}$ と表わす。 $\chi_c^{(2)}/\chi^{(1)}$ の1からずれる温度分布がどれ位の精度で求まる、こゝるおの尺度をさえておくと考えこまぬだろう。級数解は $t \ll 1$ の範囲では精度はよいが $t \gg 1$ では、数値解に較べると精度は落ちる。しかし $t=10$ ($\chi=3$) は物理的には $t \sim \infty$ の領域に属するおの帰属をどうも我々の級数解は5%程度の誤差しかのびのびと適する。

この問題の古典的級数解及び数値解の Westphal (1967)

Mastenaiah (1976) により求め、こゝる。無次元時間 θ と

$\theta^2 = 4t/\epsilon$ の如き変数を用いるため我々の数値解、級数解とは直接には比較出来ないが、我々の級数解 $\chi^{(1)}$ と比較した値を表2に示してある。計算の解は $\epsilon=0.057$ のとき

当る。 $t \in [0, 5.0]$ の時間帯の解を求めたところ、驚くべきことに我々の初めに与えられた $\chi^{(0)}$ がその全領域で最も精度のよいことである。これは我々の無次元化では $t \in [0, 0.356]$ 以内に対応する小さな時間領域であり、したがって $\chi^{(0)}$ のみでも十分に精度のよい範囲であることから(表1とみよ)不思議ではな。 Mastenaiak (1976) の数値解は $t \ll 1$ の領域では捨てる数の数が少なすぎて精度が悪く、一方 Westphal (1967) の数値解は $t \ll 1$ では正確ではあるが、これも、数値の4桁を使っているため急速に精度が悪化しているのが分る。

§6 考察

前節の計算結果から明らかになる接々古典的長時間座標のべき展開と比較すると本数値解の収束性は非常によいことが分る。これは第1近似 $\chi^{(0)}$ をみても分る。

$$\chi^{(0)} = \sqrt{1+2t} - 1 \quad (32)$$

この問題では $t \rightarrow \infty$ で $u_w = 0$ となり $x=0$ の面を一定温度とする Neumann の解に漸近することが予測される。 Neumann の解は

$$\chi = \alpha \sqrt{t} \quad \alpha = \text{εに依存する定数} \quad (50)$$

であり、 $\chi^{(0)}$ は $t \rightarrow \infty$ で正しい漸近座散形をもち、このことが分る。 実際 $\chi^{(1)}, \chi^{(2)} \dots$ も $t \rightarrow \infty$ で正しい漸近振舞いをもち、こおり、近似がよくなるにつれて $\sqrt{t}$ の比例定数 α (50) の α

に近づくことを示される。厳密には、二変数問題のときを示し、Bürmann-Lagrange 級数の収束及びその逆変換の収束と三変数問題に拡張する必要があるが、この点は別の機会に検討を加えたい。

ここで注意しておきたいことは、本論文で使った独立変数 $\tau = \chi\chi$ は前回の論文で導入した変数

$$h = \frac{\tau\chi}{\tau + \chi} - 1 \quad (51)$$

と等しい。このとき、 τ と同様 h も $t \in [0, \infty)$ の領域は $h \in [0, -\frac{1}{2}]$ の有限領域に写像されることから、以上の点をよく吟味し、 τ の代わりに新しい変数 j を次の様に選ぶと、この問題を二変数問題として考え直すことも出来る。

$$j = \frac{(\tau - \alpha^2/2)}{\tau} t \quad (52)$$

j と h についての Bürmann-Lagrange 級数に展開出来る

$$j = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \dots \quad (53)$$

(53) の Bürmann-Lagrange 級数は $t \rightarrow \infty$ での τ , α , χ , の振舞いが定数まで正確に求まり、 τ および、しかも $h=0$ 近傍での収束し $h \in [0, -\frac{1}{2}]$ 内には収束が右に延びると思われるので、 τ の領域の全域にわたって精度のよい級数解を求めることが期待出来る。この結果も別の機会に発表したい。

REFERENCES.

- Carslaw, H.S. & Jeager, J.C. (1956) "Conduction of Heat in Solids" Oxford University Press.
- Evans, G.W., Isaackson, E & MacDonald, J.K.L. (1950) "Stefan-like Problems" Quart. Appl. Math., 8, p.312.
- Henrici, P (1974) "Applied and Computational Complex Analysis" Vol.1, John Wiley.
- Jackson, F. (1964) "The Solution of Problems Involving the Melting and Freezing of Finite Slab by a Method due to Portnov" Proc. Edin. Math. Soc., 14, p.109
- Mastanaia, K. (1976) "On the Numerical Solution of Phase Change Problems in Transient Non-linear Heat Conduction" Int. J. Numerical Method in Eng. 10, p.833
- Ochendon, J.R. & Hodgeson, W.R. (1974) "Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion" Oxford University Press.

徳田尚之 (1977) "収束性のある数解" 京都大学工学部研究報告第10号

- Tokuda, N (1979) "Numerical and Series Solution of a Stefan Problem" Proceedings of Int. Conf. on Numerical Methods in Thermal Problems. University College, Swansea, United Kingdom
- Westphal, K.O. (1967) "Series Solution of Freezing Problems with Fixed Boundary Surface Radiating into a Medium of Arbitrary Varying Temperature" Int. J. Heat and Mass Transfer, 10, p.195.

TABLE 1. Series Solution and Numerical Solution (Tokuda 1979)

Series Solution				Numerical Solution		
$x^{(2)}$	$t_X^{(2)}$	$u_w^{(2)}$	$x_c^{(2)} / x^{(2)}$	t_X	u_w	x_c / x
.1	0.1095	0.1095	1.003	0.1095	0.9119	1.0008
.2	0.2363	0.8414	0.9997	0.2366	0.8413	1.0004
.5	0.7086	0.6864	0.996	0.7130	0.6879	1.0003
1.0	1.7659	0.5254	0.987	1.7976	0.5305	1.0003
1.5	3.1377	0.4241	0.977	3.2269	0.4319	1.0003
2.0	4.8102	0.3546	0.968	4.9919	0.3640	1.0003
2.5	6.7770	0.3039	0.960	7.0952	0.3143	1.0004
3.0	9.0345	0.2656	0.953	9.5327	0.2765	1.0004

TABLE 2. Phase Position by Various Methods.

(Time)	(1967)	(1976)	$x^{(0)}$
	Westphal	Mastanaih	
0.5	0.003565	0.002940	0.003565
1.0	0.01418	0.01357	0.01419
1.5	0.03161	0.03106	0.3164
2.0	0.05562	0.5505	0.05560
2.5	0.08543	0.08512	0.08543
3.0	0.1208	0.1208	0.1209
3.5	0.1611	0.1615	0.1615
4.0	0.2056	0.2068	0.2068
5.0	0.3028	0.3093	0.3093