

モデル方程式による不安定モードの選択則の数値的研究

阪府大 工 村上洋一 (Youichi Murakami)

阪府大 工 濱野泰宏 (Yasuhiro Hamano)

1 はじめに

対流の発生のように静止状態から周期構造(対流セル)が生じる現象について考察する。よく知られていることであるが、線形安定性により静止状態がどのような条件で不安定になるかは明らかにされ、臨界値および攪乱の臨界波数、臨界モードの構造を求めることができる(Chandrasekhar(1961), Drazin and Reid(1981), Koschmieder(1993))。

境界の影響の無視できる空間的に広がった系に関してのみここでは考える。この場合、臨界値を越えた領域でどのような大きさの対流セルが出現するのであろうか?理想的に無限に広がった系を考えると、臨界点を少し越えた近傍(slightly supercritical)においてでさえ不安定モードは無数に存在し、線形安定解析に基づくどのモードも成長しうることになる。しかしながら、実験および自然現象の観測によると通常は1つの代表的なスケールを持った筋上の対流ロールや六角形のセルが観察される。このように無数の不安定モードのうちどのモードが成長し対流セルに発達するかという問題は自明ではない。通常は最も線形増幅率の大きいモードが選択されると考えられている。Drazin and Reid(1981)の教科書(p.25)によると、液体ジェットの不安定解析に関して、

"Rayleigh(1879) then put forward for the first time the idea that the fastest growing mode would become the dominant (or 'most dangerous') one and would be the mode observed in practice, ..."

とあるので、この考え方は100年以上の歴史を持つ。ここでは、このような仮定を**最大増幅モードの仮説**と呼ぶことにしよう。

ところで、この仮説は実験的に検証されているのであろうか?実験例を説明する前に、この問題は実験的にも数値的にも非常に困難であることを指摘しておく。まず、境界の影響を完全に無視する実験、数値計算は不可能である。また、初期条件としての微小なランダムノイズを特定するのは実験的に非常に困難である。それに付け加え、不安定モードが選択される時間スケールはシステムの大きさとともに増大することが予想されるので、広がった系の実験、数値計算を行うのは非常に時間がかかる。初期条件については数値計算では特定できるが、実験では境界に適合した対流セルが選択されるなどその影響は大きい。またその成長の過程においてどの程度外乱が入るか特定するのも困難である。

Koschmieder(1993)(p.90-91)に彼の実験が紹介されている。そこでは、円周を境界として持つ容器にシリコンオイルを満たして対流実験を行っている。この可視化の写真からわかるように無次元パラメータ（この場合は、レイリー数）を臨界値から徐々に上げていくと、対流ロールが徐々に大きく（太く）なっていることがわかるであろう。すなわち、選択される波数はレイリー数とともに減少している。一方、最大の線形増幅率をもつ波数は逆に増大することが知られているので、この例においては最大成長モードの仮説は成立していない。なお、この実験は非常に静かな状態で行われ、波数選択の結果は再現性があると報告されている。それでは何がこの波長を決定しているのでしょうか？

このような問題意識で数々の理論的な研究が行われてきた。流体の基礎方程式を用いて数値シミュレーションを実行するのが最もよいのであるが、十分に広がった空間領域で数値計算することは膨大な計算機資源を要するので、あまり行われていない。そこで、この問題と同様の性質を有するモデル方程式を流体の方程式にまねて作る。もしくは流体の方程式から何らかの比較的あらい近似（通常、ガラーキン近似）を用いて導出するといったことが行われている。このような研究は80年代に入ってから数多くなされている（Getling(1991), Cross and Hohenberg(1993), Newell et al(1993)）。鉛直方向には単純な構造をあらかじめ仮定し z 方向に積分を行って消去して、水平平面内で運動を記述している。（上面での温度分布を表現していることに相当する。）このような2次元のモデル方程式においても、実験で観察される欠陥(dislocation)やgrain boundaryといった構造が再現されている。このような効果を取り入れるのは重要ではあるが、様々な効果が複合されているので、ここでは1次元（対流ロール）に限定して問題を単純化する。

1次元の系におけるモデル方程式によるモード選択の研究も非常に多くなされている。主に次のオリジナルな形のSwift-Hohenberg方程式(Swift and Hohenberg(1977))が用いられている。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\epsilon - \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \psi - \psi^3 \quad (1)$$

この方程式の特徴はポテンシャルを有することである。そのポテンシャルは時間とともに単調に減少することが一般に証明でき、さらに最終状態は定常解（フィクスト・ポイント）しか存在しないことも証明できる。したがって、最小ポテンシャルに相当する定常解が実現されるとその状態は絶対安定となる。現実の流体の方程式においては一般的にはこのようなポテンシャルはもちろん存在しないが、熱対流の場合、臨界点近傍かつプラントル数無限大の極限では存在する。ランダムな初期条件からこのような最小ポテンシャルの状態が選択されると仮定することを**最小ポテンシャルの仮説**とここでは呼ぶことにする。

ところで、このSwift-Hohenberg方程式は次のような性質を持つ。臨界値は $\epsilon_c = 0$ であり、最大増幅率は ϵ の値にかかわらず臨界波数 $k_c = 1$ である。したがって、最大増幅

モードの仮説を採用すると、 $k = 1$ のモードが選択されることになる。また最小ポテンシャルを与える波数もすべての ϵ に対して同じ $k = 1$ のモードであることを示すことができる。したがってこの方程式の場合、どちらの仮説を採用しても $k = 1$ が選択されることが期待される。実際に Viñals et al(1991) のノイズを含んだ数値計算によると $k = 1$ のモードが常に1つ選択されている。

最小ポテンシャルは $t \rightarrow \infty$ における状態を比較したものである。また、最大線形増幅率は初期の状態 $t \ll 1$ を予測するものである。Swift-Hohenberg 方程式はこの両者が一致していたので、微小なランダムな初期条件からこのモードが選択されたのであろう。ところで、この両者が常に一定するとは限らず、一般には一致しないと考えるべきであろう。そのような場合にモードがどちらにいくのであろうか？この問題を明らかにするために、1次元の Greenside-Cross 方程式を取り上げる (Greenside and Cross(1985))。この場合、最大増幅のモードは Swift-Hohenberg 方程式と同じであるが、最小ポテンシャルのモードは $k < 1$ であることが示される。どちらのモードが選択されるかを数値的に調べることをこの研究の目的とする。Cross et al(1986)の研究においてこの方程式の空間2次元の場合の数値シミュレーションが行われているが、この場合はポテンシャルが存在しないので、1次元の最小ポテンシャルのモードは選択されていないし、最大増幅のモードも選択されていない。¹

モード選択についてノイズの重要性が指摘されている (Kurtze(1996)) が、この研究ではノイズが非常に小さくその影響が無視できる場合、すなわち、方程式のダイナミクスによってのみ決定される場合、について主に明らかにする。

2 モデル方程式

Greenside-Cross 方程式は以下のように与えられている。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\epsilon - \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \psi + 3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2)$$

線形項は Swift-Hohenberg 方程式と同じであり、非線形項は攪乱の成長を抑えるように働く。静止状態 $\psi = 0$ の線形分散関係は攪乱 $\psi = \exp(\sigma t + ikx)$ を代入することにより、次のように得られる。

$$\sigma = \epsilon - (k^2 - 1)^2 \quad (3)$$

したがって、 $\epsilon_c = 0$ が臨界値となり、 $\epsilon > \epsilon_c = 0$ で不安定となる。最大増幅率は常に $k = 1$ のモードであることも示されている。

¹ポテンシャル最小のモードよりも波数の小さいモードが選択されている。本研究の結果とは直接比較できない。

次のような汎関数を定義すると、それがリャプノフ関数（以下、ポテンシャルと呼ぶ）になっていることが示される。

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[-\frac{1}{2}\epsilon\psi^2 + \frac{1}{2} \left(\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^4 \right] \quad (4)$$

時間微分は次のようになり常に負であることがわかる。

$$\frac{dF}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \leq 0 \quad (5)$$

よって、 F は ϵ の符号に関わらず単調減少であることもわかる。したがって、時間無限大の極限において、 ψ は定常状態に落ち着くことがわかる。すなわち、アトラクターとしてはフィクストポイントしか存在しない。

次のように1つのモードを仮定してその平衡状態に対応するポテンシャルの値を求める。

$$\psi = A(t) \exp(ikx) + A^*(t) \exp(-ikx) \quad (6)$$

この形を Greenside-Cross 方程式に代入することにより次式が得られる。

$$\frac{dA}{dt} = (\epsilon - (k^2 - 1)^2)A - 3k^4 |A|^2 A \quad (7)$$

が得られる。超臨界状態 $\epsilon > 0$ における平衡振幅 $|A_e| = \sqrt{\epsilon - (k^2 - 1)^2} / (\sqrt{3}k^2)$ を代入することにより

$$F = -\frac{\{\epsilon - (k^2 - 1)^2\}^2}{6k^4} \quad (8)$$

が求められる。ただし、考えている領域の長さで割ってある。この表式から最大の振幅を持つものが最小のポテンシャルを持つことがわかる。図1にポテンシャル F が最小をとる波数 k の値が $0 < \epsilon < 1$ の範囲で示されている。 ϵ の増大とともに低波数側に移っていき、最大増幅モード $k = 1$ との違いが拡大されていくことがわかる。

3 数値計算結果

空間に関しては $[0, 2\pi L]$ に対して周期境界条件を用いている。システムサイズ L は大きい方が望ましいが、ここでは主に $L = 64$ を用いており、主要な結果は $L = 128, 256$ に対しても変化しないことを確認している。不安定モードの範囲は $\sqrt{1 - \sqrt{\epsilon}} < k < \sqrt{1 + \sqrt{\epsilon}}$ で与えられるので、 $\epsilon = 0.4$ を例にすると、 $L = 64$ とした離散化で30個の不安定モードが含まれている。空間の離散化についてはフーリエ・ガラーキン法を用いており、 $[0, 2\pi]$ を $D = 16$ で分割している。時間については高波数で $-k^4$ で減衰することを考慮して積

分因子法のもとで4次のルンゲクッタ法を適用している (Canuto et al(1987))。刻みは $\Delta t = 0.02$ をとっている。外乱の少ない実験を想定して、初期条件としては微小な一様乱数 (10^{-5}) を与えている。(平衡振幅は 10^{-1} のオーダーである。)

図2に $\epsilon = 0.8$ の場合の典型的なモード ($0.8 < k < 1.1$ の範囲) の時間発展の様子が示されている。最大増幅率は $k = 1$ で実現され、最小ポテンシャルは $k = 0.68$ で実現される。また、不安定モードの範囲は $0.32 < k < 1.15$ で53個の不安定モードが含まれている。

初期の時刻 ($T = 10, 12, 14$) においてはほぼ大小関係が保たれ線形理論にしたがっているように見える。 $T = 20, 30, 40$ では、振幅が $0.1 \sim 0.2$ で非線形相互作用して徐々に低波数側に振幅のピークができていく様子が示されている。しばらく時間が経過すると、 $T = 1000, 2000, 4000$ で示されているようにある波数のバンドのみが成長し他の線形不安定モードは減衰している様子がわかる。この時間的なプロセスはかなりゆっくりしている。このようなプロセスではピークの波数はまだ一定しておらず入れ代わりがバンドの中心付近で生じている。最終段階では1つのモードが最大値をとり他のモードは減衰していく ($T = 6000, 8000, 10000$)。この過程は非常にゆっくりしている。また図ではまだピークのまわりのモードが振幅を持っているが、これらはさらに時間が進めば ($T = 40000$) 図では0と判別できないくらい小さくなる。この場合は、 $k = 0.89$ のモードが1つ選択されている。したがって、最大増幅モードも最小ポテンシャルのモードも選択されず、その間のモードが選択されている。

図3にはこの場合の波数の分散の時間発展が両対数表示で示されている。最初は ($t < 10$)、単調に減少している。これは微小なランダムな初期条件が波数全領域に与えられているため、安定モードが減衰してしまうためである。不安定モードがある程度 (この場合0.1くらい) になると分散は増大・減衰を繰り返す。これは多くの不安定モードが非線形相互作用をしている時期に相当する。その後分散は単調に減衰していく。これは増大する波束が選択されている時期に相当するが、まだピークの入れ代わりは生じている。その後ピークが1つ選択されそのピークのみが値を持つようになるが、この図では示されていない。

以上で典型的な時間発展の様子を示した。図4(a)には $\epsilon = 0.5$ の場合の平均の波数の時間発展が10種類の初期条件に対して示されている。初期条件によって異なる最終状態が選択されるが、その各々は互いに近いものが選択されていることがわかる。また、対応するポテンシャルの時間発展が図4(b)に示されており、確かに単調減少しているが、最小値までには到達しない。初期の時刻では階段状に時間発展している場合があるが、成長する波束が選択される段階になるともはや別の波束に移ることは、行ったすべての数値計算では、見られなかった。選択されるモードの波数の確率分布は1つの大きなピークを持ったものと考えられ、その平均を選択される波数と呼ぶことにする。

選択される波数の集団平均 (10個だが) した波数を与えられた ϵ ごとにプロットし

たものが、図 1 に示されている。左の曲線が最小ポテンシャルモードの波数を、 $k = 1$ の直線が最大増幅モードの波数を示している。黒丸が数値計算により選択された波数を示している。計算結果は両者の間にありどちらにも一致していないが、最大増幅モードの波数に近いことがわかる。

4 結論と今後の課題

以上得られた結果をまとめる。選択された最終状態に関しては次のとおりである。

- 最終的にはある 1 つのモードだけが選択され、その平衡振幅はランダウ方程式によって求めた平衡振幅と一致する。
- 最終状態は初期値依存性があるが、互いに近い波数が選択される。
- 選択される波数は最小ポテンシャルの波数にも増幅率最大の波数 $k = 1$ とも一致せず、その中間の波数が選択される。

最終状態が複数あることは線形安定な状態が複数個存在し、それはランダムな微小攪乱から各々選択されうること示している。しかしながらどの状態も等確率で実現されるのではなく、何らかの確率分布が存在する。この確率分布を明らかにするためにはさらに大きな L をとり、 k の分布を稠密にした数値計算を行う必要があろう。また、選択される波数のモードの平衡解はすべて線形安定 (Eckhaus stable) である。

波数選択の機構を明らかにするために、波数がどのような過程を経て 1 つに選択されるかについては以下のようにまとめられる。

- 線形安定なモードが減衰し、線形不安定なモードが線形増幅率にしたがって成長する。波数の分散はべきで減衰する。この段階を初期の線形段階 (第 1 段階) と呼ぶ。
- 振幅が 0.1 程度になるとモード間の相互作用が生じある波束が選択される。波束の中心は最大増幅モードからずれた波数になる。選択されるまではモード間の大小関係が何回か入れかわる。また、 ϵ が大きいほど入れ代わりが頻繁に生じる。波数の分散は振動する。この段階を遷移段階 (第 2 段階) と呼ぶ。
- 波束の中から最大の振幅のモードが入れ代わる。この段階を第 3 段階と呼ぶ。波束の外のモードが励起されることはもはやなかった。
- 最大振幅のモードが成長して平衡振幅に漸近し、その近傍の波数のモードが減衰していく。この過程を最終段階 (第 4 段階) と呼ぶ。

初期の状態においては最大増幅率の近くのモードが選択され、最小ポテンシャルを与えるモードにはエネルギーが与えられず、選択されない。線形増幅率は初期のモードの成長を予測するもので、最小ポテンシャルは複数存在する最終状態の安定性の程度を比較したものであり、どちらも数値計算では最終状態の選択には（関連はしているだろうが）決め手にはなっていないことを示している。初期の段階で選抜されたモード間である程度振幅が大きくなると（第2段階：遷移段階）、非線形効果により最大増幅率からずれたモードの波束が選択され、その中から最終的なモードが選択される。この遷移段階を何らかの形で解析的に決定できるのが最も好ましいが、できるかどうか不明である。

Swift-Hohenberg 方程式について追試した結果を述べる。この場合は最大増幅率の条件と最小ポテンシャルの条件がともに $k = 1$ のモードを与える。実際に $k = 1$ のモードがランダムな微小攪乱から時間発展させると常に実現され、既存の数値計算結果と矛盾していない。

システムサイズの影響について述べる。最終的に選択される波数は定量的に変化しなかった。また、選択される過程についても定性的な性質は変化しなかったが、遷移段階が参加するモードが増えるためにシステムサイズとともに増大した。この増大の仕方についてはまだ定量的につめていない。

ノイズの影響の重要性が指摘されている (Kurtze(1996))。実験では制御できない弱い外乱が絶えず作用しその影響で最小ポテンシャルの波数が選択されるであろうと予測されている。非常にもっともらしい考えであるが、実際にどのようなになるか数値実験する必要がある。我々は組織的な数値計算をする余裕がなかったが、予備的な計算によれば、ノイズはより波数の小さいモードを選択させるように働く。すなわち、最小ポテンシャルの波数により近い波数が選択される。しかしながら現在のところ、選択されるピーク（この場合は最終的に1つにならない）は最小ポテンシャルのモードとは一致していないようである。ノイズの入れ方を種々試して今後最終的な結論を出したい。

5 参考文献

- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. and Zang, T. A. 1987 *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer Verlag.
- Chandrasekhar, S. 1961 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover.
- Cross, M.C. and Hohenberg, H. C. 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851.
- Cross, M. C., Tesauro, G. and Greenside, H. S. 1986 *Physica* **23D** 12.
- Drazin, P. G. and Reid, W. H. 1982 *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press.
- Getling, A. V. 1991 *Sov. Phys. Usp.* **34** 737.
- Koschmieder, E. L. 1993 *Bénard Cells and Taylor Vortices*, Cambridge University Press.
- Kurtze, D. A. 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 63.
- Newell, A. C., Passot, T. and Lega, J. 1993 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **25** 399.
- Swift, J. and Hohenberg, P. C. 1977 *Phys. Rev.* **A15** 319.
- Viñals, J. Hernández-García, E., Miguel, M. S. and Toral, R. 1991 *Phys. Rev.* **A44** 1123.

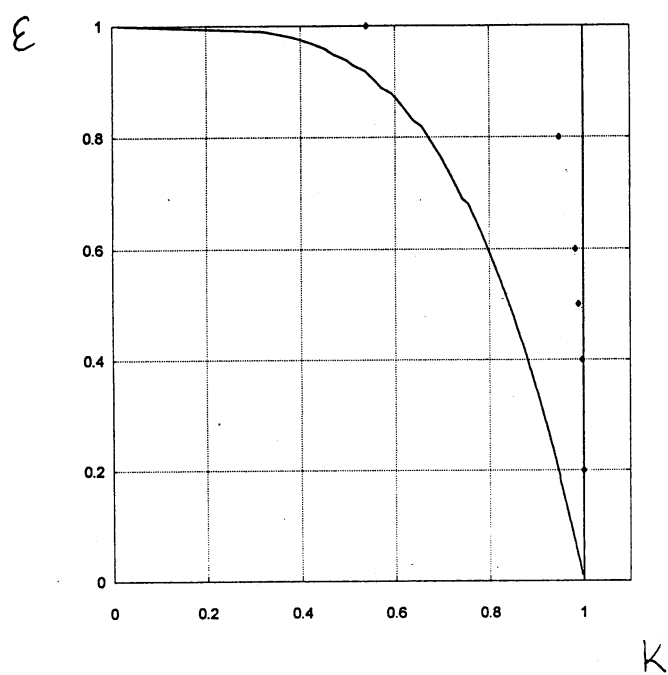


図1 最大増幅モードの波数： $k=1$ 、
最小ポテンシャルモードの波数：左の曲線、
黒丸は数値計算結果の集団平均。

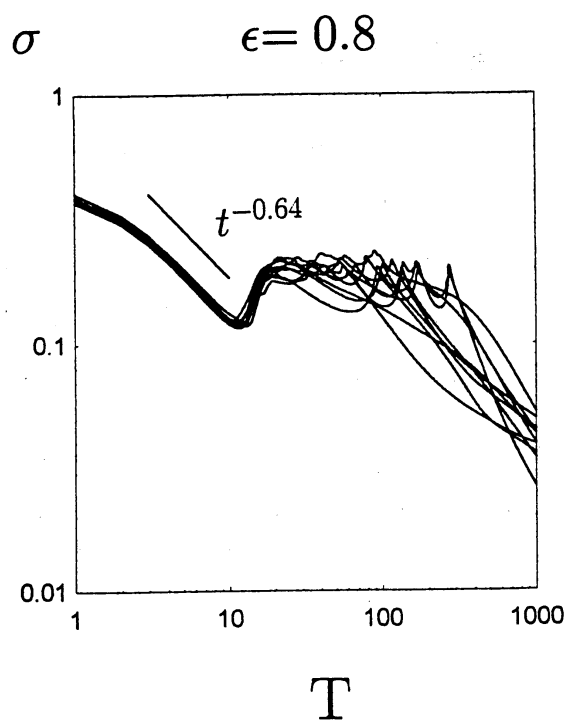


図3 波数の分散 $\sqrt{(\Delta k)^2}$ の時間発展。
 $\epsilon = 0.8$. (10 ケース)。

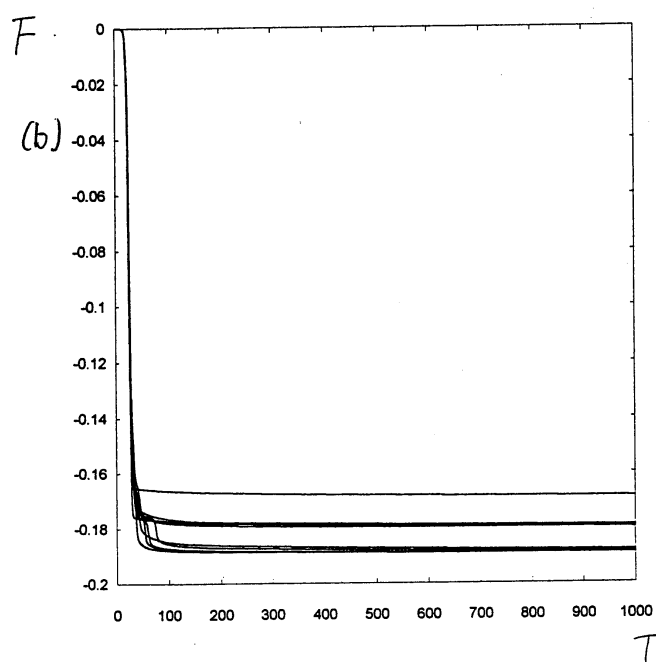
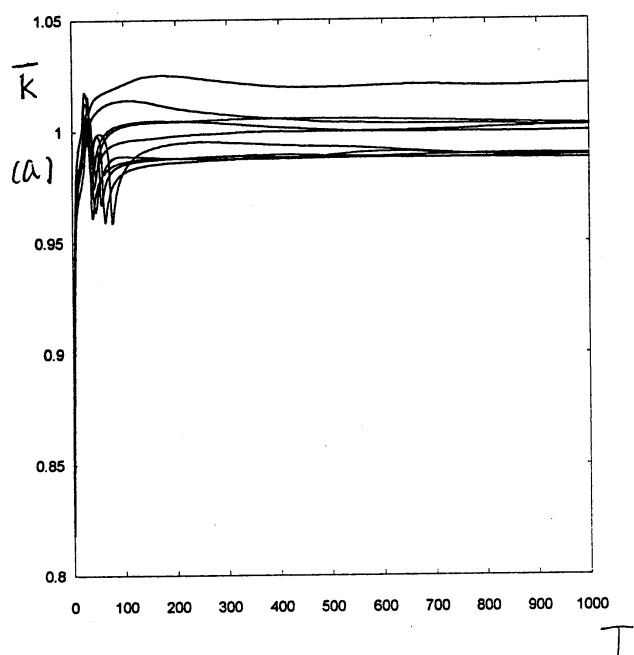


図4 $\epsilon = 0.4$. (a) 平均波数の時間発展 (b) ポテンシャルの時間発展

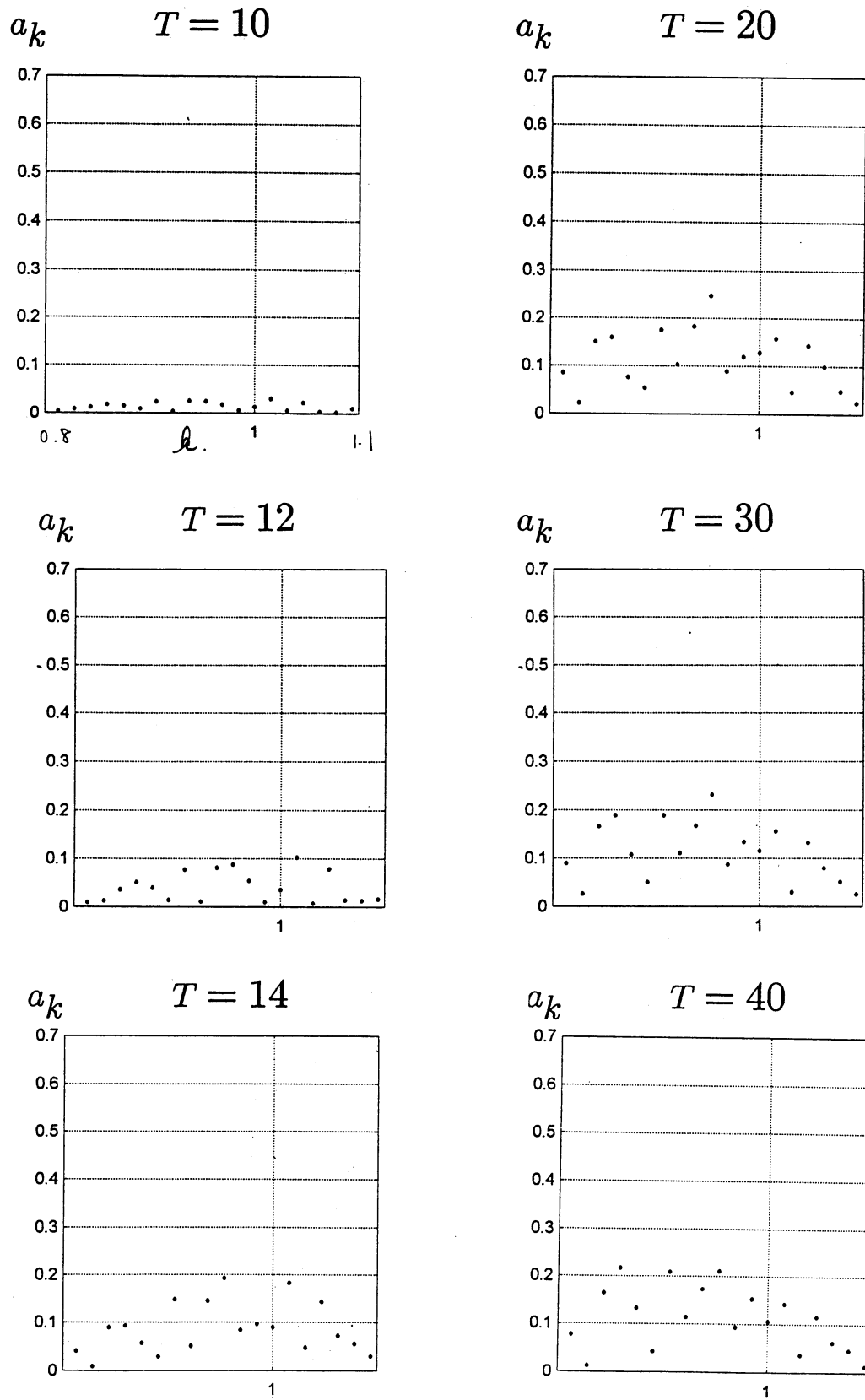
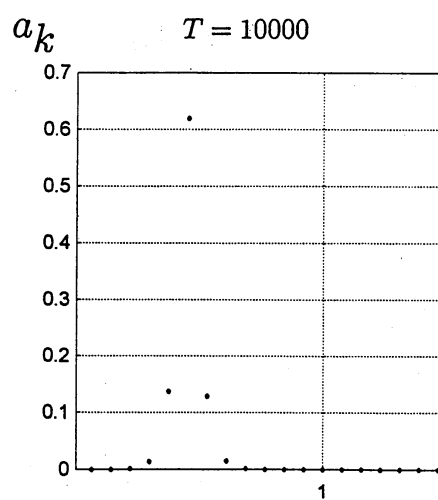
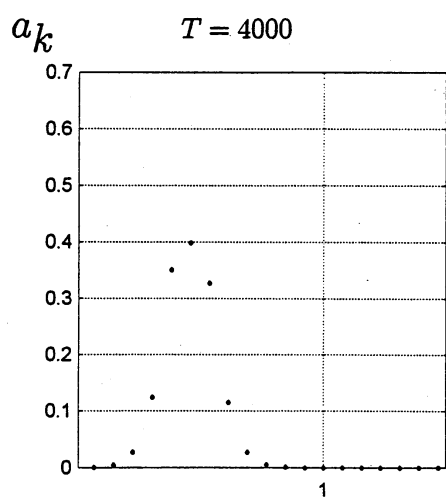
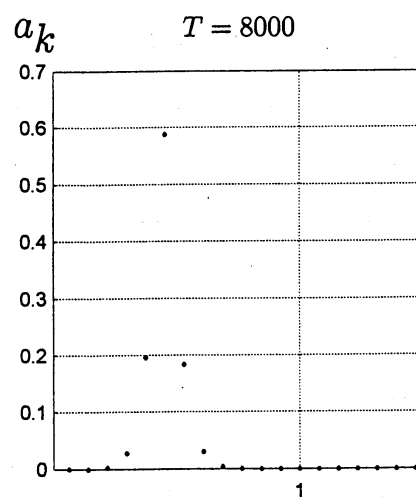
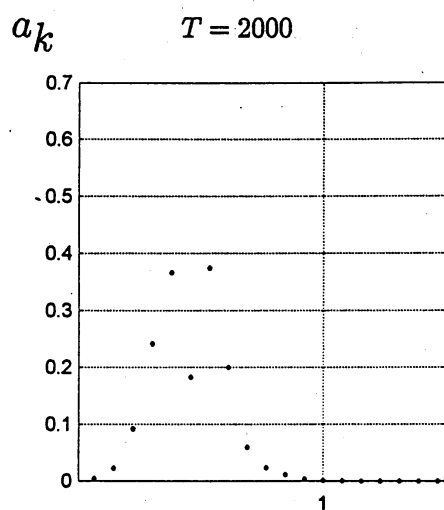
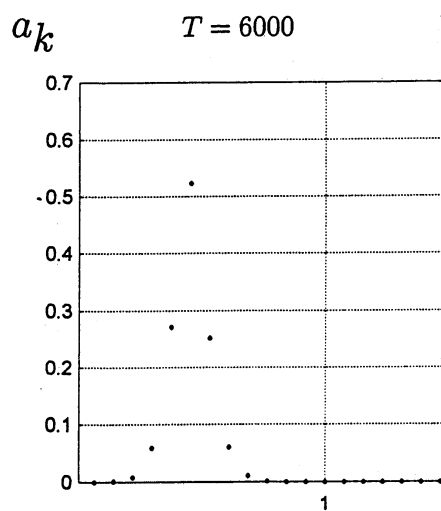
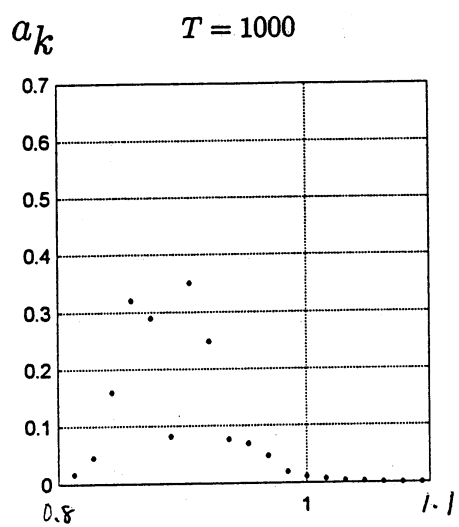


図2 各モードの振幅の時間発展。

$\epsilon = 0.8$, 最大増幅モードの波数: $k = 1$, 最小ポテンシャルモードの波数: $k = 0.68$

(a) $t = 10$ (b) $t = 12$ (c) $t = 14$ (d) $t = 20$ (e) $t = 30$ (f) $t = 40$

(g) $t = 1000$ (h) $t = 2000$ (i) $t = 4000$ (j) $t = 6000$ (k) $t = 8000$ (l) $t = 10000$



k

k