

non-convex orientor field について

神大 理 菊 池 紀夫

§ 1. orientor field

Vector field $f(t, x)$, $(t, x) \in R \times R^n$, $n \in R^1$ に
あたえられているとする。微分不等式

$$\left| \frac{dx}{dt} - f(t, x) \right| \leq \varepsilon$$

を書きあらためると,

$$\frac{dx}{dt} \in V(f(t, x), \varepsilon)$$

ここに,

$$V(y, \varepsilon) = \{ z \in R^n; |y - z| \leq \varepsilon \},$$

とする。 $V(f(t, x), \varepsilon)$ を $F(t, x)$ と書くと,

$F(t, x)$ は $f(t, x)$ を中心とし、半径 ε の球で
あり、それが各点 $(t, x) \in R \times R^n$ にあたえられたこと
になる。これを一般にして、各点 $(t, x) \in R \times R^n$ に
たいして R^n の集合 $F(t, x)$ をたいおうさせるとき、
 $F(t, x)$, $(t, x) \in R \times R^n$, を R^n における

orientor field とよぶ。また、この orientor field $F(t, x)$ について、次の関係

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x)$$

のことを contingent equation とよぶ。

この contingent equation は 40 年程前に 福原先生 によって、はじめて 導入されたものである。

§2. contingent equation と 制御問題

制御函数のついた 微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in \Omega,$$

ただし、 $x, f \in R^n$, $\Omega \subset R^r$, $u = u(t)$ は可測函数、があたえられているとする。ある制御函数 $u = u(t)$ について、上の微分方程式をみたす $x = x(t)$ は次の contingent equation をみたす。

$$\frac{dx(t)}{dt} \in f(t, x(t), \Omega) = F(t, x(t))$$

すなわち、この contingent equation をみたす $x = x(t)$ について、

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in \Omega$$

をみたす様には、可測函数 $u = u(t)$ を選び出すことができれば（陰函数の定理を用いる）制御系方程式と contingent equation との解の族が一致することになる。

この様に見ると、制御系方程式について調べることを、
Contingent equation について調べることに帰着
させることができる。

§3. 記号と定義

R^n の closed sets (compact sets) 全体の
集合を $CL(R^n)$ ($Comp(R^n)$) であらわす。

R^n の集合 A に対して、 $conv A$ は A を含
む最小の closed-convex set と、 $\partial \text{dry } A$ は
 A の boundary とあらわす。

$CL(R^n) \ni A, B$ に対して、

$$\text{Dist}(A, B) = \inf \{ \delta > 0; V(A, \delta) \supset B, V(B, \delta) \supset A \}$$

ここに、

$$V(A, \delta) = \{ x \in R^n; \text{dist}(x, A) \leq \delta \},$$

$$\text{dist}(x, A) = \inf \{ |x - y|; y \in A \},$$

と A と B との間の (Hausdorff の) 距離とする。

$$|A| = \text{Dist}(A, 0)$$

とおく。ただし、 0 は R^n の原点である。

定義 1. 位相空間 T で定義された函数 $F(t) \in$
 $CL(R^n)$ が $t_0 \in T$ で連続であるというのは、

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, t_0 の近傍 U が存在して

$$\text{Dist}(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$$

が U のすべての t に対して, 成り立つことという。

T のすべての点で $F(t)$ が連続のとき, $F(t)$ は T で連続であるという。

定義 2. 可測空間 E で定義された函数 $F(t) \in \mathcal{C}(R^n)$ が E で可測であるというのは, すべての $C \in \mathcal{C}(R^n)$ に対して, 集合

$$\{t \in E; F(t) \in C \neq \emptyset\}$$

が E で可測のことである。

I は区間 $[t_0, t_0 + a]$ をあらわす。 a. e. I は ‘ I 上のほとんどいたる所’ を意味する。

仮定 $H(F)$. $F(t, x)$ は $I \times R^n$ で定義され, 値を $\text{Comp}(R^n)$ にとる函数で, t に関しては可測, x に関しては連続である。また, I で積分可能な函数 $k(t)$ が存在し,

$$|F(t, x)| \leq k(t) \quad \text{a. e. } I$$

が成り立つ。

定義 3. $F(t) \in \text{Comp}(R^n)$ は I で可測とする。 I で積分可能な函数 $h(t)$ が存在し、

$$|F(t)| \leq h(t) \quad \text{a.e. } I$$

が成り立つ。このとき、 $F(t)$ が可測であるので、可測な函数 $f(t) \in F(t)$ を選び出すことができ、この様な函数 f の全体の集合を M であらわす。 I 上の $F(t)$ の積分を次の様に定義する。

$$\int_I F(t) dt = \left\{ \int_I f(t) dt, f \in M \right\}.$$

定義 4. I で定義された絶対連続な函数 $x = x(t)$ が次の関係

$$x(t) \in x_0 + \int_{t_0}^t F(t, x(t)) dt \quad \text{on } I$$

をみたすとき、 $x = x(t)$ は初期条件 $x(t_0) = x_0 \in R^n$

をみたす、orientor field $F(t, x)$ の trajectory という。

$T(A, F)$ ($A \subset R^n$) は初期条件 $x(t_0) \in A$ をみたす、 $F(t, x)$ の trajectories 全体の集合をあらわし、

$Z(A, F)$ はこれらの graphs ($\subset I \times R^n$) の和集合をあらわす。 $\tau \in I$ について、

$$S(A, F, \tau) = Z(A, F) \cap \{t = \tau\}$$

とおく。

§4. trajectory の幾つかの性質

定理 1 から 4 までは $H(F)$ を仮定する。

定理 1. すべての $x_0 \in R^n$ に対して, 初期条件 $x(t_0) = x_0$ とみたす $F(t, x)$ の trajectory が I 全体において存在する。

定理 2. $A \in \text{Comp}(R^n)$ ならば, $T(A, F)$ は一様収束の位相で compact である。

定理 3 (Kneser). $\text{Comp}(R^n) \ni A$ が連結しているならば, すべての $t \in I$ に対して, $S(A, F, t)$ は連結体である。

定理 4 (Hukuhara). $\text{bdry } Z(A, F)$ 上のすべての点は $\text{bdry } Z(A, F)$ の上ばかり通る trajectory $x(t)$ で $\text{bdry } A$ と結びついたり離れたりできる。しかもこの $x(t)$ はその部分のほとんどいたるところで, 次の関係

$$\frac{dx(t)}{dt} \in \text{bdry conv } F(t, x(t)) \quad \text{a.e.}$$

とみたす。

定理 5. $F(t, x) \in \mathcal{CL}(R^n)$ は $I \times R^n$ で定義され t に関して可測である。 I で積分可能な函数 $k(t)$ が存在して、

$$\text{Dist}(F(t, x), F(t, x')) \leq k(t) |x - x'|$$

が成り立つとする。このとき、次の関係

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F(t, x(t)) \quad \text{a.e.} \quad x(t_0) = x_0$$

をみたす絶対連続な函数 $x(t)$ が (局所的に) 存在する。

なお、比較定理も成立すると予想されるので、trajectory の存在範囲なども調べられると思われる。

制御系方程式と contingent equation の関係について、詳しくは Hukuhara [2], Wajewski [6] を参照されたい。

Compact-convex set value な函数論は Hukuhara [3], [4]. にある。

参考文献

- [1] Filippov, A. F., Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side, *SIAM J. Control*, 5 (1967), 609-621.
- [2] Hukuhara, M., Équation au contingent et système de commande, 数理解析研究所講究録 11 (1966), 1-21.
- [3] ———, Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe, *RIMS-11, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.*, 1966.
- [4] ———, Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe, *RIMS-15, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.*, 1966.
- [5] Kikuchi, N., On non-convex orientor fields satisfying the Carathéodory type conditions.
- [6] Wajewski, T., On an optimal control problem, *Differential Equations and Their Applications: Proceedings of the Conference held in Prague, September 1962 (1963)*, 229-243.