

波動方程式の解の Exponential Decay について

大阪大学理学部 井川 満

§1. はじめに。 $\Omega \in \mathbb{R}^3$ の中の有界な障害物で、その境界 Γ は十分に滑かであるとする。 Ω の外部領域における波動方程式の解の Exponential decay の考察は境界条件が Dirichlet 条件あるいは Neumann 条件、さらにオ3種境界条件を課した場合に対してなされて来たように思われる。そして、Dirichlet 境界条件以外の場合にはあまり多くの仕事がないようである。例えば、Morawetz [11] は Ω が convex である場合、Neumann 条件に対して考察しており、Tokita [13] は $\Omega = \{x; |x| < 1\}$ の場合にオ3種境界条件に対して解の Exponential decay を示しているのみのように思われる。

今回ここで示そうと思う事は次のようである。 Ω に関しては Morawetz [11] が置いたよりも強い条件、 Ω が strictly convex という条件を課す代りに、極めて一般的な境界条件のもとで、解の Exponential decay を示す。

$\Omega = \mathbb{R}^3 - \Omega - \Gamma$ とおく。

$$B = \sum_{j=1}^3 b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x) \frac{\partial}{\partial t} + d(x)$$

を Γ の直傍で定義された C^∞ な係数をもつ 1 階の微分作用素とする。我々は次の仮定をおく。

(A-I) Γ の Gauss 曲率は strictly positive.

(A-II) $b_j(x)$, $j=1, 2, 3$ 及び $c(x)$ は実数値函数

$$(A-III) \quad \sum_{j=1}^3 b_j(x) n_j(x) = 1 \quad \text{on } \Gamma$$

ここで $n(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ は $x \in \Gamma$ における Γ の単位外法線とする。外とは Ω についてである。

以上の仮定のもとで混合問題

$$(P) \quad \begin{cases} \square u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ Bu = 0 & \text{on } \Gamma \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

は C^∞ の意味で well posed である必要十分条件は

$$(A-IV) \quad c(x) < 1 \quad \text{for all } x \in \Gamma$$

が成り立つことである。

仮定 A-I ~ IVのもとで (P) の解の $t \rightarrow \infty$ での振舞に関して
 は, $\operatorname{Re}(-d(x))$ がある程度大きければ $u(x, t)$ は $t \rightarrow \infty$
 の時 Exponential に decay する, すなわち

定理 1. d_0 はある定まった数で,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\phi_j(x) - \eta_j(0))}{\partial x_j} - d(x) \right) \geq d_0$$

が成り立っているとしよう。 u_0, u_1 を compatibility 条件
 をみたしかつ

$$\bigcup_{j=0}^1 \operatorname{supp} u_j \subset \{x; x \in \overline{\Omega}, |x| \leq \kappa\}$$

が成り立つような初期 data とする。そのとき (P) の解 $u(x, t)$
 は

$$E_1(u, x_0, t) \leq \frac{C}{\varepsilon} \exp\{3\delta_0(x_0 + 2x)\}$$

$$\cdot \exp\{-2(\delta_0 - \varepsilon)t\} E_3(u, \infty, 0), \quad \forall t \geq 0$$

が成り立つ。ただし $\delta_0 = 12\rho^{-1}e^{-1}$, $\rho = \Omega$ の直径, ε は
 任意の正の数である。そして

$$E_m(u, x_0, t) = \sum_{|k| \leq m} \int_{\Omega \cap \{|x| \leq x_0\}} |D_{x,t}^k u(x, t)|^2 dx.$$

又 $\phi(x) = \eta(x)$, $c(x) = 0$, すなわち三種条件の場合
 は $d(x)$ に関する条件がより詳しくわかる。

定理 2.

$$B = \frac{\partial}{\partial n} + \sigma(x), \quad \sigma \in C^\infty(\Gamma)$$

としよう。 $M > 0$ に対して $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ なる定数がとれて、

$$|\operatorname{Im} \sigma(x)| \leq \delta_1, \quad -M \leq \operatorname{Re} \sigma(x) \leq \delta_1 \quad \forall x \in \Gamma$$

が成り立つならば, compatibility 条件と

$$\bigcup_{j=0}^1 \operatorname{supp} u_j \subset \{x; x \in \bar{\Omega}, |x| \leq x\}$$

を満たす初期値 u_0, u_1 に対しての (P) の解 $u(x, t)$ は

$$E_1(u, x_0, t) \leq C \cdot \exp\{3\delta_0(x_0 + 2\kappa)\} \cdot \exp(-\delta_2 t) \\ \cdot E_3(u, \infty, 0), \quad \forall t \geq 0$$

が成り立つ。

ここで我々が注意しておきたいことは混合問題 (P) はかならずしも L^2 well posed な問題ではないことである。実際

$$(1.1) \quad -\left(\sum_{j=1}^3 (b_j(x) - n_j(x))^2\right)^{1/2} < c(x)$$

となる実が Γ 上に少くとも一実あれば (P) は L^2 well posed ではない事がわかっている。(たとえば [1], [8] を見よ。) 故に定理 1 の主張する所は全体の energy はどのように増大して

も有限な領域上の energy は Exponential に decay するという事である。

この結果の証明の方法は問題を Dirichlet 条件をもった問題に帰着させる [5], [6] の方法による。

§2. 問題の帰着. 今 $\tilde{u}_j(x)$, $j=0,1$ を $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ の函数で

$$\tilde{u}_j(x) = u_j(x) \quad , \quad \forall x \in \Omega$$

が成り立っているものとしよう。 $F(x,t)$ を Cauchy 問題

$$\begin{cases} \square F(x,t) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ F(x,0) = \tilde{u}_0(x) \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x,0) = \tilde{u}_1(x) \end{cases}$$

の解としよう。

$$w(x,t) = \begin{cases} u(x,t) - F(x,t) & \text{for } (x,t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ 0 & \text{for } (x,t) \in \Omega \times (-\infty, 0) \end{cases}$$

とおく。 $w(x,t)$ は

$$(P_0) \quad \begin{cases} \square w(x,t) = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1 \\ Bw(x,t) = h(x,t) & \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}^1 \\ \text{supp } w \subset \bar{\Omega} \times [0, \infty) \end{cases}$$

を満たしている。ここで $h(x,t) = BF(x,t)|_\Gamma$.

u_0, u_1 が compatibility 条件を満たしている事より

$$h(x, t) \in C^\infty(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$$

が従う。又 Huygens の原理より

$$(2.1) \quad \text{supp } h(x, t) \subset \Gamma \times [0, 2x]$$

が成り立つ。 $F(x, t)$ の振舞は容易に知ることが出来るので

(2.1) を満たす $h(x, t)$ に対する (P_0) の解の $t \rightarrow \infty$ での振舞を調べれば十分である。

$\mathbb{R}^3$ の原点は Ω の中に含まれているとする。 $\delta > 0$ として

$$\Delta_\delta = \Delta + 2\delta \frac{\partial}{\partial |x|} + \delta^2 + \frac{2\delta}{|x|}$$

$$B^{(\delta)} = B + \delta \frac{1}{|x|} \sum_{j=1}^3 \partial_j(x) x_j$$

と置く。そうすると明らかに $u(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^1)$ に対し

$$e^{-\delta|x|} \square u(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_\delta \right) (e^{-\delta|x|} u)$$

$$e^{-\delta|x|} B u(x, t) = B^{(\delta)} (e^{-\delta|x|} u)$$

が成り立つ。 (P_0) の解 $w(x, t)$ に対し

$$v(x, t) = e^{-\delta|x|} w(x, t)$$

と置く。と $v(x, t)$ は

$$(P_\delta) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_\delta \right) v(x, t) = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1 \\ B^{(\delta)} v(x, t) = e^{-\delta|x|} h(x, t) & \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}^1 \\ \text{supp } v \subset \bar{\Omega} \times [0, \infty) \end{cases}$$

を満たしている。よって (P_0) の解の decay を調べる代りに (P_δ) の解 $v(x, t)$ の decay を調べれば良いことがわかる。

$p \in \mathbb{C}$ を parameter にもつ boundary value problem

$$(2.2) \quad \begin{cases} (p^2 - \Delta_\delta) u(x) = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

を考えよう。ある $\mu_0 > 0$ があって $\operatorname{Re} p \geq \mu_0$ ならば任意の $g(x) \in H^m(\Gamma)$ に対して (2.2) の解 $u(x) \in H^m(\Omega)$ が一意的存在することがわかっている。これを $U^{(\delta)}(p, g; x)$ と記そう。Morawetz [10] の結果を用いると $U^{(\delta)}$ について次の定理を得る。この証明は略す。

定理 2.1. $\delta \geq \delta_0 + 1$ としよう。任意の $g(x) \in H^m(\Gamma)$ に対して $\operatorname{Re} p \geq \mu_0$ で $H^m(\Omega)$ として analytic な $U^{(\delta)}$ は $\operatorname{Re} p \geq -\delta_0$ の範囲に $\sqrt{-}$ -valued function まで analytically 接続される。よって次の評価が成り立つ:

$$(2.3) \quad \|U^{(\delta)}(p, g; x)\|_m \leq \frac{C_m}{\operatorname{Re} p + \delta_0} \|g\|_m, \quad \forall \operatorname{Re} p > -\delta_0$$

ただし $\|\cdot\|_m$ は $H^m(\Gamma)$ での, $\|\cdot\|_m$ は $H^m(\Omega)$ での norm を示すものとする。

$C^\infty(\Gamma)$ から $C^\infty(\Gamma)$ への mapping $B^{(\delta)}(p)$ を次のように定義しよう。 $g \in C^\infty(\Gamma)$ に対し

$$B^{(\delta)}(p)g = B^{(\delta)}(p)U^{(\delta)}(p, g; x)|_\Gamma$$

と定義する。ここで

$$B^{(\delta)}(p) = \sum_{j=1}^3 g_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + p c(x) + d + \delta \sum_{j=1}^3 g_j \cdot \frac{x_j}{|x|}$$

である。今後 $B^{(\delta)}(p)$ の性質を調べる事が大切である。

定理 2.2. 任意の $m \geq 0$ に対して

$$(2.4) \quad \|B^{(\delta)}(p)g\|_m \leq C_m (\|g\|_{m+1} + |p| \|g\|_m)$$

が成り立つ。 $p = i\kappa + \mu$ とおくと $\mu > -\delta_0$ に対し

$$(2.5) \quad -\operatorname{Re} (B^{(\delta)}(p)g, g)_m \geq (c_0\mu - C) \|g\|_m^2 \\ + a \|g\|_m^2 - C'_m \|g\|_{m-1}^2$$

が成り立つ。ここで $c_0 = 1 - \sup c(x)$, C は g_j, c, d に独立な定数で,

$$a = \inf_{x \in \Gamma} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (g_j - n_j)}{\partial x_j} - d(x) \right\}.$$

である。 $d(x)$ が

$$(2.6) \quad a \geq (c_0\delta_0 + C + C'_0) + 1$$

を満たしていると, $B^{(\delta)}(p)$ を $H^{m+1}(\Gamma)$ から $H^m(\Gamma)$ への写像

とみなすと $B^{(\delta)}(p)$ は $H^{m+1}(\Gamma)$ から $H^m(\Gamma)$ への bijection
であり $\operatorname{Re} p > -\delta_0$ に對し

$$(2.7) \quad \|B^{(\delta)}(p)^{-1} g\|_m \leq C_m'' \|g\|_m$$

$$(2.8) \quad \|B^{(\delta)}(p)^{-1} g\|_{m+1} \leq C_m'' |p| \|g\|_m$$

が成り立つ。

この定理を認めると $B^{(\delta)}(p)$ が $\operatorname{Re} p > -\delta_0$ で analytic
であることより任意の $f \in H^m(\Gamma)$ に對し

$$(2.9) \quad \begin{cases} B^{(\delta)}(p)^{-1} f \text{ は } H^{m+1}(\Gamma)\text{-valued function として} \\ \operatorname{Re} p > -\delta_0 \text{ で analytic である} \end{cases}$$

事が $d(x)$ が (2.6) の条件をみたしているとの仮定のもとに
成り立つ。

$h(x, t) \in C^\infty(\Gamma \times \mathbb{R}^1)$ かつ $\operatorname{supp} h \subset \Gamma \times [0, 2\pi]$ に對し

$$\hat{h}(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} h(x, t) dt$$

とおくと $\hat{h}(x, p)$ は $\mathbb{C}$ 全体で $H^m(\Gamma)$ -valued function として
analytic となる。さらに

$$(2.10) \quad |p|^j \|\hat{h}(x, p)\|_m \leq (1 + e^{-2\pi \operatorname{Re} p}) \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial^j}{\partial t^j} h(x, t) \right\|_m dt$$

が成り立つ。

$$(2.11) \quad v(x, t) = \int_{\operatorname{Re} p = \mu} e^{pt} v^{(\delta)}(p, B^{(\delta)}(p)^{-1} e^{-\delta|x|} \hat{h}(\cdot, p); x) dp$$

ここで $\mu > -\delta_0$, とおく。(2.3) および (2.7) の評価式より

$$(2.12) \quad \|v^{(\delta)}(p, B^{(\delta)}(p)^{-1} e^{-\delta|x|} \hat{h}(\cdot, p); x)\|_m$$

$$\leq |p|^{-2-j} \frac{C_m}{\delta_0 + \mu} \|p^{2+j} \hat{h}(x, p)\|_m$$

が成り立つ。さらに $v^{(\delta)}(p, B^{(\delta)}(p)^{-1} \hat{h}(\cdot, p); x)$ は $\operatorname{Re} p > -\delta_0$ で $H^m(\Omega)$ -valued 函数として analytic になることも注意しておこう。よって (2.11) の右辺は $\mu > -\delta_0$ で収束し

$$\begin{aligned} & \|v(x, t)\|_{m+1} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \right\|_m \\ & \leq C_m e^{\mu t} \frac{e^{-\mu \cdot 2\kappa} + 1}{\delta_0 + \mu} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{j+2} e^{-\delta|x|} \hat{h}(x, t) \right\|_{m+1-j} dt \end{aligned}$$

が成り立つ。明らかに $v(x, t)$ は (P_δ) の解である事がわかる。よって (P_0) の解 $w(x, t)$ は

$$w(x, t) = e^{\delta|x|} v(x, t)$$

より,

$$(2.13) \quad \|w(x, t)\|_{m+1, \Omega_R} + \left\| \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right\|_{m, \Omega_R}$$

$$\leq C_m e^{\mu t} \cdot e^{\delta R} \frac{e^{-2\kappa \cdot \mu} + 1}{\delta_0 + \mu} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{j+2} \hat{h}(x, t) \right\|_{m+1-j} dt$$

が成り立つ。ここで $\|\cdot\|_{m, \Omega_R}$ は $H^m(\Omega_R)$ の norm を

示すものとする。ここで

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{j+2} f(x, t) \right\|_{m+1-j}^2 dt &\leq C \{ \| \tilde{u}_0 \|_{m+1} + \| \tilde{u}_1 \|_m \} \\ &\leq C' \{ \| u_0 \|_{m+1} + \| u_1 \|_m \} \end{aligned}$$

を用いると定理1が示される。

§ 3. 定理 2.2 の証明方針

定理 2.1 を証明するのに我々は $f(x, t) = g(x) g(t)$ とおき

$$(D_{\delta}) \begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{\delta} \right) v(x, t) = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1 \\ v(x, t) = f(x, t) & \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}^1 \\ \text{supp } v \subset \bar{\Omega} \times [0, \infty) \end{cases}$$

の解 $v(x, t)$ の性質を用いた。 $g(t)$ と (2

$$(3.1) \quad g(t) \neq 0, \quad \text{supp } g \subset [0, 2p]$$

となるものをとると

$$(3.2) \quad \| v(x, t) \|_m \leq C_m \cdot e^{-t\beta} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{2p} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^l f(x, t) \right\|_{m+1-l} dt$$

なる評価の成り立ち事が Morawetz [10] の考察を用いる事によりわかる。これを用いると我々は $p \in \mathbb{C}$ で $\text{Re } p > -\delta_0$

に対し, $\hat{q}(p) \neq 0$ とする $q(t)$ を (3.1) を満たすようにとる事により

$$(3.3) \quad U^{(\delta)}(p, q, x) = \hat{q}(p)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} u(x, t) dt$$

なる表現を得る。

定理 2.2 を証明するには (3.3) の表現式にある $u(x, t)$ を具体的に構成する事が大切である。これは Γ の Gauss 曲率を strictly positive と仮定した事より [5], [6] の方法を基本として Airy function 等を用いる事により、遂行出来る。この結果を用いて $\partial/\partial n \cdot U^{(\delta)}(p, q, x)|_{\Gamma}$ を計算する。

Γ 上の pseudo-differential operator $A(k) \in S_{\frac{1}{3}, 0}^1(\Gamma)$ があって

$$\begin{aligned} & \left| \left(e^{\frac{\partial \psi(x)}{\partial n} U^{(\delta)}(p, q, x)}, q \right)_m - (A(k) e^{\delta |x|} q, e^{\delta |x|} q)_m \right| \\ & \leq C_m \| e^{\delta |x|} q \|_m^2, \quad \forall q \in \mathcal{D}(\Gamma), \operatorname{Re} p > -\delta_0 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $A(k)$ の symbole の具体的な表現が得られているが、いささか煩雑になるので省略させてもらう。 $A(k)$ の symbole の性質より pseudo-differential operator の計算を行う事により

$$(3.4) \quad -\operatorname{Re} (A(k) e^{\delta |x|} q, e^{\delta |x|} q)_m$$

$$\geq ((X_2^* B_{2F} X_2 + c_0 k X_9^* X_3 + X_4^* |D| X_4) e^{\delta |x|} g, e^{\delta |x|} g)_m \\ - C_m \|e^{\delta |x|} g\|_m^2,$$

$$(3.5) \quad -\operatorname{Im} (A(k) e^{\delta |x|} g, e^{\delta |x|} g)_m \\ \geq ((c_0 k X_1^* X_1 + X_2^* \tilde{B}_{2F} X_2) e^{\delta |x|} g, e^{\delta |x|} g)_m \\ - C \|e^{\delta |x|} g\|_m^2 - (B_{2F} X_2 e^{\delta |x|} g, e^{\delta |x|} g)_m$$

が成り立つ。そこで

$$X_2^* (B_{2F} + \tilde{B}_{2F}) X_2 \geq c_0 \cdot k^{2/3} X_2^* X_2$$

$$\sum_{i=1}^4 X_i^* X_i = I$$

を用いると

$$(3.6) \quad 2 |(A(k) e^{\delta |x|} g, e^{\delta |x|} g)_m| \geq c_0 \cdot k^{2/3} \|e^{\delta |x|} g\|_m^2 \\ - C_m \|e^{\delta |x|} g\|_m^2$$

が成り立つ。定理 2.2 は (3.4), (3.5) を用いると示すことが出来る。

定理 2 を示すためには

$$\mathcal{W}^{(\delta)}(p)g = \frac{\partial}{\partial n} U^{(\delta)}(p, g; x)|_P$$

とおき, $\mathcal{W}^{(\delta)}(p) + \mathcal{G}(\delta)$ の性質を調べればよい。(3.6)

より $-\delta_0 < \operatorname{Re} p \leq 2\mu_0$ とすると $\exists k_0 > 0$ があって
 $|k| \geq k_0$ ならば $p = ik + \mu$ に対し

$$\|(\mathcal{N}^{(\delta)}(p) + \sigma)g\| \geq \|g\| \quad \forall g \in C^\infty(\Gamma)$$

が成り立つ事がわかる。一対 $\operatorname{Re} p \geq 2\mu_0$ に対しては [6] より
 $(\mathcal{N}^{(\delta)}(p) + \sigma)^{-1}$ の存在がわかっている。よって

$$-\delta_0 < \operatorname{Re} p \leq 2\mu_0, \quad |\operatorname{Im} p| \leq k_0$$

なる p に対して考察を行えばよい。 $\sigma_0 \leq 0$ なる $C^\infty(\Gamma)$ を
 とると、例えば Mizohata [9] の考察等を用いると

$$(\mathcal{N}^{(\delta)}(p) + \sigma_0)g = 0 \implies g = 0$$

が $\operatorname{Re} p \geq 0$ に対して証明される。よって

$$\inf_{\|g\|_1=1} \|(\mathcal{N}^{(\delta)}(p) + \sigma_0)g\|_0 = J > 0$$

が証明されるので、 $(\mathcal{N}^{(\delta)}(p) + \sigma_0)^{-1}$ の存在及び $\delta_1, \delta_2 > 0$
 があって $|\sigma| \leq \delta_2$ に対し

$$-\delta_1 \leq \operatorname{Re} p \leq 2\mu_0, \quad |\operatorname{Im} p| \leq k_0$$

に対し

$$(\mathcal{N}^{(\delta)}(p) + \sigma_0 + \widetilde{\sigma})^{-1}$$

の存在を Neumann 級数の方法により示すことが出来る。

このことは定理 2 の証明された事を示している。

文 献

- [1] Agemi R. and Shirota T., On necessary and sufficient condition for L^2 -well-posedness of mixed problems for hyperbolic equations I, II, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I 21(1970), 133-151, 22(1972), 137-159.
- [2] Balaban T., On the mixed problem for a hyperbolic equation, Mem. Amer. Math. Soc., N°112(1971).
- [3] Ikawa M., Remarques sur les problèmes mixtes pour l'équation des ondes, Colloque international du C.N.R.S., (1972), Astérisque 2 et 3, 217-221.
- [4] ———, Sur les problèmes mixtes pour l'équation des ondes, Publ. RIMS Kyoto Univ., 10(1975), 669-690.
- [5] ———, Problèmes mixtes pour l'équation des ondes, Publ. RIMS Kyoto Univ., 12(1976), 55-122.
- [6] ———, Problèmes mixtes pour l'équation des ondes, to appear.
- [7] Kreiss H.O., Initial-boundary value problem for hyperbolic systems, Comm. Pure Appl. Math., 23(1970), 277-298.
- [8] Miyatake S., Mixed problem for hyperbolic equation of second order, J. Math. Kyoto Univ., 13(1973), 435-487.
- [9] Mizohata S., Sur l'analyticité de la fonction spectrale de l'opérateur Δ relatif au problème extérieur, Proc. Japan Acad., 39(1963), 352-357.
- [10] Morawetz C.S., Exponential decay of solutions of the wave equation, Comm. Pure Appl. Math., 19(1966), 439-444.

- [11] Morawetz C.S., Decay for solutions of the exterior problem for the wave equation, Comm. Pure Appl.Math., 28(1975), 229-264.
- [12] Sakamoto R., Mixed problems for hyperbolic equation I, J.Math.Kyoto Univ., 10(1970), 349-373.
- [13] Tokita T., Exponential decay of solutions for the wave equation in the exterior domain with spherical boundary, J.Math.Kyoto Univ., 12(1972), 413-430.