

特異点の判定と微分幾何学への応用

福井 敏純 (埼玉大学)

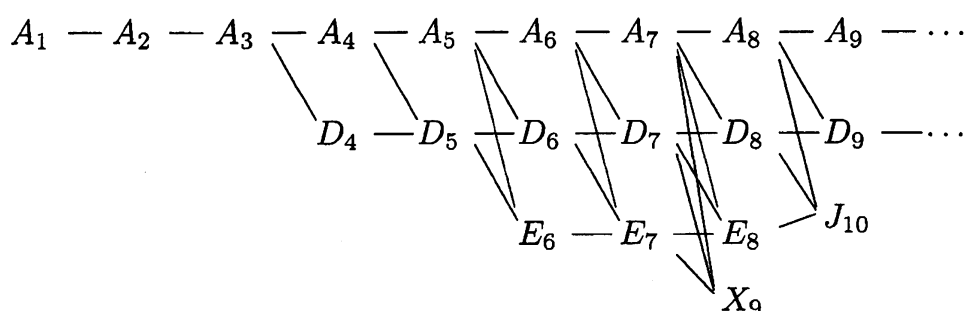
以前、J. J. Nuño Ballesteros 氏とユークリッド空間の曲面の高さ関数や距離二乗関数の特異点を解析して、そこに現れた係数行列の階数の条件を解析したが、その文脈では 3 次元ユークリッド空間の曲面の漸近方向や主方向は高さ関数および距離二乗関数の特異点の核方向として自然に現れる。これらの関数の特異点の核方向は曲面の高次元ユークリッド空間への埋込みに対しても自然に定義されるので、曲面の高次元ユークリッド空間への埋込みに対しても漸近方向や主方向の類似物が定義されていると見ることができる。それらのなす微分方程式の特異点を調べてみたいというのがこの研究の動機である。

本稿では 2 変数関数の特異点の判定法を与え、上の高次元埋込みでの漸近方向や主方向の類似物の微分方程式を、いくつかの場合に明示的に記述することが目標である。

本稿の内容は J. J. Nuño Ballesteros 氏との共同の仕事である。

1 特異点の判定法

(u, v) を変数とする 2 変数関数 $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を考える。 f の特異点の階層は次のグラフで説明される。



ここで各記号は次の表に示す特異点を表す。

A_k	$\pm x^{k+1} \pm y^2$	
D_k	$x^2y \pm y^{k-1}$	$k \geq 4$
E_6	$x^3 \pm y^4$	
E_7	$x^3 + xy^3$	
E_8	$x^3 + y^5$	
X_9	$\pm x^4 \pm y^4 \pm ax^2y^2$	$a^2 \neq 4$
X_{10}	$y^4 + ax^2y^2 + x^5$	$a \neq 0$
J_{10}	$x^3 \pm y^6 \pm ax^2y^4$	$4a^3 + 27 \neq 0$

このグラフはよく知られているが、ここでは与えられた f がどの特異点であることを明示的に示す判定法を与える。以下では A_k ($1 \leq k \leq 5$), D_5, D_6, E_6, E_7, E_8 について説明するが、 X_9 や J_{10} についても同様である。

■記号 原点での $f(u, v)$ テイラー展開を

$$\sum_{i,j} \frac{c_{ij}}{i!j!} u^i v^j, \quad c_{ij} = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial u^i \partial v^j}(0, 0).$$

とし、 $H_k(u, v)$ を次で定める。

$$H_k(u, v) = H_k(f)(u, v) = \sum_{i+j=k} \frac{c_{ij}}{i!j!} u^i v^j.$$

du, dv を定数として、次のように置く。

$$\begin{aligned} c_k &= c_k(f) = H_k(f)(du, dv), \\ c_{ku} &= c_{ku}(f) = \frac{\partial H_k(f)}{\partial u}(du, dv), \\ c_{kv} &= c_{kv}(f) = \frac{\partial H_k(f)}{\partial v}(du, dv), \\ c_{kuu} &= c_{kuu}(f) = \frac{\partial^2 H_k(f)}{\partial u^2}(du, dv), \\ c_{kuv} &= c_{kuv}(f) = \frac{\partial^2 H_k(f)}{\partial u \partial v}(du, dv), \\ c_{kvv} &= c_{kvv}(f) = \frac{\partial^2 H_k(f)}{\partial v^2}(du, dv), \quad \dots \end{aligned}$$

1.1 A_k 特異点

$f(u, v)$ が $(0, 0)$ で特異点をもつと仮定する。(i.e., $c_{10} = c_{01} = 0$). 次の条件が同値である事はよく知られている。

- $f(u, v)$ は $(0, 0)$ で A_1 特異点。
- 行列 $\begin{pmatrix} c_{20} & c_{11} \\ c_{11} & c_{02} \end{pmatrix}$ は最大階数。

ヘッセ行列の階数が 1 の時はどうであろうか？これについては次の条件が同値であることを示せる。

- 行列 $\begin{pmatrix} c_{20} & c_{11} \\ c_{11} & c_{02} \end{pmatrix}$ は階数 1
- $c_{2u} = c_{2v} = 0$ を満たす、零でない (du, dv) が存在する。

$$(du \ dv) \begin{pmatrix} c_{20} & c_{11} \\ c_{11} & c_{02} \end{pmatrix} = (0 \ 0).$$

- 次を満たす、零でない (du, dv) と s が存在する。

$$\begin{pmatrix} c_{20} & c_{11} \\ c_{11} & c_{02} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} dv^2 & -du \ dv \\ -du \ dv & du^2 \end{pmatrix}.$$

この条件が成立するとき、 f が有限決定であれば f は A_k ($k \geq 2$) 特異点である。以下この条件を仮定して、 f が実際にどの A_k 特異点であるかを明示的に判定する方法を (k が小さい時に) 与える。

定理 1.1. もし (du, dv) が $H_3(u, v) = 0$ の解でなければ (すなわち $c_3 \neq 0$ ならば) f は A_2 特異点である。

定理 1.2. 次の条件は同値である。

- f は $(0, 0)$ で A_3 特異点である。
- $c_3 = 0$ かつ次のいずれかが成立。
 - $dv \neq 0, c_4 + \frac{c_{3v}^2}{2s \, dv^2} \neq 0.$
 - $du \neq 0, c_4 + \frac{c_{3u}^2}{2s \, du^2} \neq 0.$
- $c_3 = 0$, かつ $s \, c_4 - \frac{1}{8} \begin{vmatrix} c_{30} & c_{21} & dv^2 \\ c_{21} & c_{12} & -du \, dv \\ c_{12} & c_{03} & du^2 \end{vmatrix} \neq 0.$

定理 1.3. 次の条件は同値である。

- f は $(0,0)$ で A_4 特異点である。
- $c_3 = 0$ であり、次のいずれかが成立する。
 - $dv \neq 0, c_4 + \frac{c_{3u}^2}{2s dv^2} = 0, c_5 + \frac{c_{3u}c_{4u}}{dv^2 s} + \frac{c_{3uu}c_{3v}^2}{2dv^4 s^2} \neq 0.$
 - $du \neq 0, c_4 + \frac{c_{3v}^2}{2s du^2} = 0, c_5 + \frac{c_{3v}c_{4v}}{du^2 s} + \frac{c_{3vv}c_{3v}^2}{2du^4 s^2} \neq 0.$

定理 1.4. 次の条件は同値である。

- f は A_5 特異点である。
- $c_3 = 0$ であり、次のいずれかが成立する。
 - $dv \neq 0, c_4 + \frac{c_{3u}^2}{2s dv^2} = 0, c_5 + \frac{c_{3u}c_{4u}}{dv^2 s} + \frac{c_{3uu}c_{3v}^2}{2dv^4 s^2} = 0,$

$$c_6 - \frac{2c_{3u}c_{5u} + c_{4u}^2}{2dv^2 s} + \frac{2c_{3u}(c_{3uu}c_{4u} + c_{3u}c_{4uu})}{2dv^4 s^2} + \frac{c_{3u}^2(c_{21}^2 - c_{12}c_{30} - 7c_{3uu}^2)}{12dv^6 s^3} \neq 0.$$
 - $du \neq 0, c_4 + \frac{c_{3v}^2}{2s du^2} = 0, c_5 + \frac{c_{3v}c_{4v}}{du^2 s} + \frac{c_{3vv}c_{3v}^2}{2du^4 s^2} = 0.$

$$c_6 - \frac{2c_{3v}c_{5v} + c_{4v}^2}{2du^2 s} + \frac{c_{3v}(2c_{3vv}c_{4v} + c_{3v}c_{4vv})}{2du^4 s^2} + \frac{c_{3v}^2(c_{21}^2 - c_{12}c_{30} - 7c_{3vv}^2)}{12du^6 s^3} \neq 0$$

1.2 D_k 特異点

ヘッセ行列の階数が 0 であると仮定しよう。すなわち $c_{10} = c_{01} = c_{20} = c_{11} = c_{02} = 0$ 。すると $f(u, v)$ は $(0,0)$ で少なくとも D_4 特異点を持つ。

もし方程式 $H_3(u, v) = 0$ が重解を持たなければ関数 f は $(0,0)$ で D_4 特異点である。すなわち

$$\begin{vmatrix} c_{30} & 2c_{21} & c_{12} & 0 \\ 0 & c_{30} & 2c_{21} & c_{12} \\ c_{21} & 2c_{12} & c_{03} & 0 \\ 0 & c_{21} & 2c_{12} & c_{03} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1)$$

ならば、 D_4 特異点である。

これより、(1) の左辺の行列式が 0 ならば f は $(0,0)$ で少なくとも D_5 特異点であることがわかる。以下、この状況の下、特異点の判定法を明示的に書き下す仕事を続けよう。

$c_{10} = c_{01} = c_{20} = c_{11} = c_{02} = 0$ かつ

$$H_3(u, v) = \frac{1}{6}(c_{30}u^3 + 3c_{21}u^2v + 3c_{12}uv^2 + c_{03}v^3) = 0$$

が 2 重根 (du, dv) と単根 (du_1, dv_1) を持つと仮定しよう。

定理 1.5. 次の条件は同値である。

- 関数 f は $(0,0)$ で D_5 特異点である。
- $$\begin{vmatrix} c_{30} & 2c_{21} & c_{12} & 0 \\ 0 & c_{30} & 2c_{21} & c_{12} \\ c_{21} & 2c_{12} & c_{03} & 0 \\ 0 & c_{21} & 2c_{12} & c_{03} \end{vmatrix} = 0, c_4 \neq 0.$$

定理 1.6. 次は同値である。

- f は $(0,0)$ で D_6 特異点である。
- $$\begin{vmatrix} c_{30} & 2c_{21} & c_{12} & 0 \\ 0 & c_{30} & 2c_{21} & c_{12} \\ c_{12} & 2c_{21} & c_{03} & 0 \\ 0 & c_{12} & 2c_{21} & c_{03} \end{vmatrix} = 0, c_4 = 0, c_5 + \frac{(c_{4u}du_1 + c_{4v}dv_1)^2}{4 \begin{vmatrix} dv & du \\ dv_1 & du_1 \end{vmatrix}^3} \neq 0.$$

1.3 E_6, E_7, E_8 特異点

$c_{10} = c_{01} = c_{20} = c_{11} = c_{02} = 0$ と仮定し

$$H_3(u, v) = \frac{1}{6}(c_{30}u^3 + 3c_{21}u^2v + 3c_{12}uv^2 + c_{03}v^3) = 0$$

が 3 重根 (du, dv) をもつと仮定する。

定理 1.7. 次が成り立つ。

- (du, dv) が $H_4(u, v) = 0$ の根でなければ (i.e., $c_4 \neq 0$), f は E_6 特異点である。
- (du, dv) が $H_4(u, v) = 0$ の単根ならば f は E_7 特異点である。
- (du, dv) が $H_4(u, v) = 0$ の重根で $c_5 \neq 0$ ならば、 f は E_8 特異点である。

2 微分幾何への応用

C^∞ 写像 $g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ に対し

$$\text{高さ関数} \quad h_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \langle g(u, v), \mathbf{v} \rangle \quad \text{for } \mathbf{v} \in S^{n-1},$$

$$\text{距離二乗関数} \quad d_{\mathbf{y}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto -\frac{1}{2}\|\mathbf{y} - g(u, v)\|^2 \quad \text{for } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

を考える。\$g\$ の点 \$(u_0, v_0)\$ での \$k\$ 次微分を

$$G_k = H_k(g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (du, dv) \mapsto \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} g}{\partial u^i \partial v^j}(u_0, v_0) du^i dv^j$$

で定める。すると高さ関数、距離二乗関数の \$k\$ 次微分は次で与えられる。

$$\begin{aligned} H_k(h_{\mathbf{v}})(u, v) &= \langle G_k(u, v), \mathbf{v} \rangle \\ H_k(d_{\mathbf{y}})(u, v) &= \langle G_k(u, v), \mathbf{y} - g(u_0, v_0) \rangle - I_k(u, v) \end{aligned}$$

\$I_k(u, v)\$ はある対称 \$k\$ 形式である。例えば \$I_2\$ は次の第一基本形式である。

$$I_2(u, v) = I_{2,0}(u_0, v_0)u^2 + 2I_{1,1}(u_0, v_0)uv + I_{0,2}(u_0, v_0)v^2$$

但し \$I_{2,0} = \langle g_u, g_u \rangle\$, \$I_{1,1} = \langle g_u, g_v \rangle\$, \$I_{0,2} = \langle g_v, g_v \rangle\$. \$I_3\$ は次で与えられる 3 次形式である。

$$I_3(u, v) = \frac{1}{6}(I_{3,0}(u_0, v_0)u^3 + 3I_{2,1}(u_0, v_0)u^2v + 3I_{1,2}(u_0, v_0)uv^2 + I_{0,3}(u_0, v_0)v^3),$$

但し \$I_{3,0} = 3\langle g_u, g_{uu} \rangle\$, \$I_{2,1} = \langle g_v, g_{uu} \rangle + 2\langle g_u, g_{uv} \rangle\$, \$I_{1,2} = \langle g_u, g_{vv} \rangle + 2\langle g_v, g_{uv} \rangle\$, \$I_{0,3} = 3\langle g_v, g_{vv} \rangle\$.

2.1 \$n = 3\$ のとき.

■高さ関数 \$h_{\mathbf{v}}\$. ジェネリックには \$h_{\mathbf{v}}\$ が少なくとも \$A_1\$ 特異点をもつような \$\mathbf{v} \in S^2\$ が存在する。これは次の条件で書かれる。

$$H_1(h_{\mathbf{v}})(u, v) \equiv 0,$$

核方向 (漸近方向) \$(du, dv)\$ は次の方程式の解である。

$$H_2(h_{\mathbf{v}})(du, dv) = 0.$$

これを、(後々との比較のため) 次のように書いておく。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & g_v \\ G_2(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

■距離二乗関数 $d_{\mathbf{y}}$. ジェネリックには $d_{\mathbf{y}}$ が少なくとも A_2 特異点である $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ が存在する。この条件は次で与えられる。

$$H_1(d_{\mathbf{y}})(u, v) \equiv 0, \quad c_{2u}(d_{\mathbf{y}}) = 0, \quad c_{2v}(d_{\mathbf{y}}) = 0.$$

これより核方向 (主方向) (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu}du + g_{uv}dv & I_{2,0}du + I_{1,1}dv \\ g_{uv}du + g_{vv}dv & I_{1,1}du + I_{0,2}dv \end{pmatrix} = 0.$$

2.2 $n = 4$ のとき

■高さ関数 $h_{\mathbf{v}}$. ジェネリックには $d_{\mathbf{y}}$ が少なくとも A_2 特異点である $\mathbf{v} \in S^3$ が存在する。この条件は次で与えられる。

$$H_1(h_{\mathbf{v}})(u, v) \equiv 0, \quad c_{2u}(h_{\mathbf{v}}) = 0, \quad c_{2v}(h_{\mathbf{v}}) = 0.$$

核方向 (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & \\ g_v & \\ g_{uu}du + g_{uv}dv & \\ g_{uv}du + g_{vv}dv & \end{pmatrix} = 0$$

■距離二乗関数 $d_{\mathbf{y}}$. ジェネリックには $d_{\mathbf{y}}$ が少なくとも A_3 特異点である $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$ が存在する。この条件は次で与えられる。

$$H_1(d_{\mathbf{y}})(u, v) \equiv 0, \quad c_{2u}(d_{\mathbf{y}}) = 0, \quad c_{2v}(d_{\mathbf{y}}) = 0, \quad H_3(d_{\mathbf{y}})(du, dv) = 0.$$

核方向 (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu}du + g_{uv}dv & I_{2,0}du + I_{1,1}dv \\ g_{uv}du + g_{vv}dv & I_{1,1}du + I_{0,2}dv \\ G_3(du, dv) & I_3(du, dv) \end{pmatrix} = 0. \quad (2)$$

写像 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ が次で定義されているとする。

$$g(u, v) = \left(u, v, \sum_{i+j \geq 2} \frac{a_{ij}}{i!j!} u^i v^j, \sum_{i+j \geq 2} \frac{b_{ij}}{i!j!} u^i v^j \right).$$

すると、方程式 (2) は次の形になることに注意しておく。

$$\det \begin{pmatrix} a_{20}du + a_{11}dv & b_{20}du + b_{11}dv & du \\ a_{11}du + a_{02}dv & b_{11}du + b_{02}dv & dv \\ A_3(du, dv) & B_3(du, dv) & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ここで $A_3(u, v) = \sum_{i+j=3} \frac{a_{ij}}{i!j!} u^i v^j$, $B_3(u, v) = \sum_{i+j=3} \frac{b_{ij}}{i!j!} u^i v^j$.

2.3 Case $n = 5$.

■高さ関数 h_v . ジェネリックには d_y が少なくとも A_3 特異点である $v \in S^4$ が存在する。この条件は次で与えられる。

$$H_1(h_v)(u, v) \equiv 0, \quad c_{2u}(h_v) = 0, \quad c_{2v}(h_v) = 0, \quad H_3(h_v)(du, dv) = 0.$$

核方向 (du, dv) の方程式は次のようになる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & & \\ g_v & & \\ g_{uu}du + g_{uv}dv & & \\ g_{uv}du + g_{vv}dv & & \\ G_3(du, dv) & & \end{pmatrix} = 0.$$

■距離二乗関数 d_y . ジェネリックには d_y が少なくとも A_4 および D_4 特異点である $y \in \mathbb{R}^5$ が存在する。この条件は次で与えられる。

D_4 特異点の核方向は 1 つ又は 3 つでありその方程式は 次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ G_3(du, dv) & I_3(du, dv) \end{pmatrix} = 0.$$

A_4 特異点の核方向 (du, dv) の方程式はを書き下すのは紙面を要するので省略する。 (du, dv) に関して 14 次の方程式である。

2.4 Case $n = 6$.

■高さ関数 h_v . ジェネリックには d_y が少なくとも A_4 , D_4 特異点である $v \in S^5$ が存在する。

D_4 特異点の核方向は 1 つ又は 3 つでありその方程式は 次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \\ g_{uu} \\ g_{uv} \\ g_{vv} \\ G_3(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

A_4 特異点の核方向 (du, dv) については前項とほぼ同じであるが省略する。

■距離二乗関数 $d_{\mathbf{y}}$. ジェネリックには $d_{\mathbf{y}}$ が少なくとも A_5 , または D_5 特異点である $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^6$ が存在する。

D_5 特異点の核方向は、主要項の重根の方向 (du, dv) と単根の方向 (du_1, dv_1) がある。重根方向 (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ (G_3)_u(du, dv) & (I_3)_u(du, dv) \\ (G_3)_v(du, dv) & (I_3)_v(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

A_5 特異点の核方向 (du, dv) については書き下すと複雑なので (78 次の方程式) 省略する。

2.5 Case $n = 7$.

■高さ関数 $h_{\mathbf{v}}$. ジェネリックには $d_{\mathbf{y}}$ が少なくとも A_5 , D_5 特異点である $\mathbf{v} \in S^6$ が存在する。

D_5 特異点の核方向は、主要項の重根の方向 (du, dv) と単根の方向 (du_1, dv_1) がある。重根方向 (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \\ g_{uu} \\ g_{uv} \\ g_{vv} \\ (G_3)_u(du, dv) \\ (G_3)_v(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

A_5 特異点の核方向は前項と同様なので省略する。

■距離二乗関数 $d_{\mathbf{y}}$. ジェネリックには $d_{\mathbf{y}}$ が少なくとも A_6, D_6, E_6 特異点である $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^7$ が存在する。

E_6 特異点の核方向 (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ g_{uuu}du + g_{uuv}dv & I_{3uu}(du, dv) \\ g_{uuv}du + g_{uvv}dv & I_{3uv}(du, dv) \\ g_{uvv}du + g_{vvv}dv & I_{3vv}(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

D_6 特異点の核方向 (重根の方向) (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ (G_3)_u(du, dv) & (I_3)_u(du, dv) \\ (G_3)_v(du, dv) & (I_3)_v(du, dv) \\ G_4(du, dv) & I_4(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

A_6 特異点の核方向はどのように記述されるかは (筆者には) わからない。

2.6 Case $n = 8$.

■高さ関数 $h_{\mathbf{v}}$. ジェネリックには $d_{\mathbf{y}}$ が少なくとも A_6, D_6, E_6 特異点である $\mathbf{v} \in S^7$ が存在する。

E_6 特異点の核方向 (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \\ g_{uu} \\ g_{uv} \\ g_{vv} \\ g_{uuu}du + g_{uuv}dv \\ g_{uuv}du + g_{uvv}dv \\ g_{uvv}du + g_{vvv}dv \end{pmatrix} = 0$$

D_6 特異点の核方向 (重根の方向) (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \\ g_{uu} \\ g_{uv} \\ g_{vv} \\ (G_3)_u(du, dv) \\ (G_3)_v(du, dv) \\ G_4(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

A_6 特異点の核方向はどのように記述されるかは (筆者には) わからない。

■距離二乗関数 d_y . ジェネリックには d_y が少なくとも A_7, D_7, E_7 特異点である $y \in \mathbb{R}^8$ が存在する。

E_7 特異点の核方向 (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ g_{uuu}du + g_{uuv}dv & I_{3uu}(du, dv) \\ g_{uuv}du + g_{uvv}dv & I_{3uv}(du, dv) \\ g_{uvv}du + g_{vvv}dv & I_{3vv}(du, dv) \\ G_4(du, dv) & I_4(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

D_7 および A_7 特異点の核方向はどのように記述されるかは (筆者には) わからない。

2.7 Case $n = 9$.

■高さ関数 h_v . ジェネリックには d_y が少なくとも A_7, D_7, E_7 特異点である $v \in S^8$ が存在する。この条件は次で与えられる。

E_7 特異点の核方向 (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \\ g_{uu} \\ g_{uv} \\ g_{vv} \\ g_{uuu}du + g_{uuv}dv \\ g_{uuv}du + g_{uvv}dv \\ g_{uvv}du + g_{vvv}dv \\ G_4(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

D_7 および A_7 特異点の核方向はどのように記述されるかは（筆者には）わからない。

■距離二乗関数 $d_{\mathbf{y}}$. ジェネリックには $d_{\mathbf{y}}$ が少なくとも A_8, D_8, E_8, X_9 特異点である $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^9$ が存在する。

X_9 特異点の核方向 (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ g_{uuu} & (I_3)_{uuu} \\ g_{uuv} & (I_3)_{uuv} \\ g_{uvv} & (I_3)_{uvv} \\ g_{vvv} & (I_3)_{vvv} \\ G_4(du, dv) & I_4(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

E_8 特異点の核方向 (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ g_{uuu}du + g_{uuv}dv & (I_3)_{uu}(du, dv) \\ g_{uuv}du + g_{uvv}dv & (I_3)_{uv}(du, dv) \\ g_{uvv}du + g_{vvv}dv & (I_3)_{vv}(du, dv) \\ (G_4)_u(du, dv) & (I_4)_u(du, dv) \\ (G_4)_v(du, dv) & (I_4)_v(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

D_8 および A_8 特異点の核方向はどのように記述されるかは（筆者には）わからない。

2.8 Case $n = 10$.

■高さ関数 $h_{\mathbf{v}}$. ジェネリックには $d_{\mathbf{y}}$ が少なくとも A_8, D_8, E_8, X_9 特異点である $\mathbf{v} \in S^9$ が存在する。この条件は次で与えられる。

X_9 特異点の核方向 (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \\ g_{uu} \\ g_{uv} \\ g_{vv} \\ g_{uuu} \\ g_{uuv} \\ g_{uvv} \\ g_{vvv} \\ G_4(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

E_8 特異点の核方向 (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \\ g_{uu} \\ g_{uv} \\ g_{vv} \\ g_{uuu}du + g_{uuv}dv \\ g_{uuv}du + g_{uvv}dv \\ g_{uvv}du + g_{vvv}dv \\ (G_4)_u(du, dv) \\ (G_4)_v(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

D_8 および A_8 特異点の核方向はどのように記述されるかは（筆者には）わからない。

■距離二乗関数 $d_{\mathbf{y}}$. ジェネリックには $d_{\mathbf{y}}$ が少なくとも A_9, D_9, J_{10}, X_{10} 特異点である $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{10}$ が存在する。

X_{10} 特異点の核方向 (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ g_{uuu} & (I_3)_{uuu} \\ g_{uuv} & (I_3)_{uuv} \\ g_{uvv} & (I_3)_{uvv} \\ g_{vvv} & (I_3)_{vvv} \\ (G_4)_u(du, dv) & (I_4)_u(du, dv) \\ (G_4)_v(du, dv) & (I_4)_v(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

J_{10} 特異点の核方向 (du, dv) の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ g_{uuu}du + g_{uuv}dv & (I_3)_{uu}(du, dv) \\ g_{uuv}du + g_{uvv}dv & (I_3)_{uv}(du, dv) \\ g_{uvv}du + g_{vvv}dv & (I_3)_{vv}(du, dv) \\ (G_4)_u(du, dv) & (I_4)_u(du, dv) \\ (G_4)_v(du, dv) & (I_4)_v(du, dv) \\ G_5(du, dv) & I_5(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

D_9 および A_9 特異点の核方向はどのように記述されるかは（筆者には）わからない。

2.9 要約

埋込先のユークリッド空間の次元 n と考えるべき特異点、及びここで得たその核方向のみたす微分方程式の (du, dv) に関する次数を表にまとめておこう。

埋込次元 n		考える特異点型と 核方向の微分方程式の次数							
h_v	d_y								
3		A_1	2						
4	3	A_2	2						
5	4	A_3	5						
6	5	A_4	14	D_4	3				
7	6	A_5	78	D_5	4				
8	7	A_6	?	D_6	8	E_6	3		
9	8	A_7	?	D_7	?	E_7	7		
10	9	A_8	?	D_8	?	E_8	9	X_9	4
11	10	A_9	?	D_9	?	J_{10}	14	X_{10}	6