

環への種々の作用をホップ代数的にみれば

福井大教育 土井 幸雄 (Yukio Doi)

環への有限群や代数群の作用、group-grading、derivationの作用、higher derivationの作用等は、従来個別的に研究されてきた。それらの間には部分的な類似がある。しかしそれを支える確実な根拠・視点が見いだされていなかったように思われる。ここではホップ代数的観点により、作用に関する種々の問題を統一的体系によって説明し得る理論（の作りつつあること）を報告したい。

R を単位元をもつ可換環とし、algebra, Hopf algebra はすべて R 上で考える。 $\otimes = \otimes_R$, $\text{map} = \text{'R-module map'}$ とする。 A で Hopf algebra を表わす: comultiplication を $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$, $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ とかき, counit を $\varepsilon: A \rightarrow R$ とかく。また antipode は $S: A \rightarrow A$ で表わすことにする。

B で一般の algebra を表わす。最初に、 B への A の action, および coaction を定義しよう。

B 上の A の action とは, map $\omega: B \otimes A \rightarrow B$ で次の条件をみたすものをいう: $\omega(b \otimes a) = b \leftarrow a$ とかくとき,

$$\left\{ \begin{array}{l} (b \leftarrow a) \leftarrow a' = b \leftarrow aa' \quad (b \in B, a, a' \in A) \\ b \leftarrow 1_A = b \\ (b \leftarrow b') \leftarrow a = \sum (b \leftarrow a_{(1)}) (b' \leftarrow a_{(2)}) \\ 1_B \leftarrow a = \varepsilon(a) 1_B. \end{array} \right.$$

(B, ω) を right A -module algebra といい。 $\{b \in B \mid b \leftarrow a = \varepsilon(a)b, \forall a \in A\}$ は B の subalgebra となる。これを B の action ω に関する invariants といい。

B 上の A の coaction とは, map $p: B \rightarrow B \otimes A$ で次の条件をみたすものをいう: $p(b) = \sum b_{(0)} \otimes b_{(1)}$ とかく,

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{p} & B \otimes A \\ \downarrow p & \curvearrowright & \downarrow 1 \otimes \Delta \\ B \otimes A & \xrightarrow{p \otimes 1} & B \otimes A \otimes A \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{p} & B \otimes A \\ \searrow \curvearrowright & & \swarrow 1 \otimes \varepsilon \\ & B \otimes R & \end{array}, \quad \begin{array}{l} p \text{ は algebra map.} \\ (\text{すなわち,} \\ p(bb') = \sum b_{(0)} b'_{(0)} \otimes b_{(1)} b'_{(1)}, \\ p(1_B) = 1_B \otimes 1_A). \end{array}$$

(B, p) を right A -comodule algebra といい。 B の subalg. $C = \{b \in B \mid p(b) = b \otimes 1_A\}$ を coaction p に関する invariants といい。

我々は coaction の立場をとる。すなわち、 A -comodule algebra B およびその invariants C に関する一般論を展開する。 A が R 上有限生成射影的(加群)のとき、 $A^* = \text{Hom}(A, R)$ は自然に Hopf algebra となるが、関係 $a^* \rightharpoonup b = \sum b_{(0)} \langle a^*, b_{(1)} \rangle$,

$a^* \in A$, $b \in B$ により、 B 上の right A -coaction ρ と B 上の left A^* -action ω が 1 対 1 に対応する:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(B, B \otimes A) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(B, \text{Hom}(A^*, B)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(A^* \otimes B, B) \\ \downarrow \rho & \longleftrightarrow & \downarrow \omega \end{array}$$

対応する action と coaction の invariants は一致する。

[例] (1) A, B が algebra として可換なとき、 B への A の coaction を scheme の言葉でいえば、affine R -scheme $\text{Spec}(B)$ への affine R -group scheme $\text{Spec}(A)$ の右作用となる。

(2) $A = R[G]$, 群環 とする。ここで G は有限群 とは限らない。 $G \ni \sigma$, $\Delta(\sigma) = \sigma \otimes \sigma$, $\varepsilon(\sigma) = 1$, $S(\sigma) = \sigma^{-1}$ とする。

$$\rho: B \longrightarrow B \otimes R[G], \quad \rho(b) = \sum_{\sigma \in G}^{\text{finite}} b_\sigma \otimes \sigma \quad \text{としよう。}$$

coaction の条件は、

$$(b_\sigma)_\tau = \delta_{\sigma\tau} b_\sigma, \quad b = \sum_{\sigma \in G} b_\sigma, \quad (bb')_\sigma = \sum_{\sigma=xy} b_x b'_y, \quad 1_\sigma = \delta_{1,\sigma}$$

となる。従って $B_\sigma := \{b \in B \mid \rho(b) = b \otimes \sigma\}$ とおくと、

$$B = \bigoplus_{\sigma \in G} B_\sigma \quad (\text{as } R\text{-module}), \quad B_\sigma B_\tau \subset B_{\sigma\tau}, \quad 1 \in B_1$$

このようにして、 $R[G]$ -comodule algebra とは G -graded algebra に他ならないことがわかった。(invariants が 1-成分に対応する)

(3) $A = R[G]^*$ (ただし G は有限群 とする) のとき。

right $R[G]^*$ -comodule algebra = left $R[G]$ -module algebra
 = left G -algebra となり. $\text{invariants} = \{b \in B \mid \sigma(b) = b, \forall \sigma \in G\}$.

(4) 基礎環 R の標数を p (素数) とし, $q = p^e$ ($e \in \mathbb{N}$) とする. $A = R[x]/(x^q) = R[x]$ ($\bar{x} = x$) とする. $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$
 $\varepsilon(x) = 0$, $S(x) = -x$ によって A は Hopf algebra になる.

map $p: B \rightarrow B \otimes R[x]$ に対し, $p(b) = \sum_{i=0}^{q-1} D_i(b) \otimes x^i$
 で表わるとき, p が coaction の条件は

$$D_r(bc) = \sum_{i=0}^r D_i(b) D_{r-i}(c), \quad 1 \leq r \leq q-1, \quad (b, c \in B)$$

$$D_0 = \text{id}_B, \quad D_i D_j = \binom{i+j}{i} D_{i+j} \quad (\text{if } i+j < q), \quad = 0 \quad (\text{if } i+j \geq q).$$

$$D_r(1_B) = 0 \quad (r \geq 1)$$

となる。すなわち, $\{D_0 = \text{id}_B, D_1, \dots, D_{q-1}\}$ は iterative
 higher derivation of length q on B , $C = \{b \in B \mid D_1(b) = \dots = D_{q-1}(b) = 0\}$.

(5) $A = R[x]^*$ のとき (上の dual Hopf algebra), right
 $R[x]^*$ -comodule algebra とは left $R[x]$ -module algebra
 のこと。 B に $d^q = 0$ なる derivation $d: B \rightarrow B$ を考
 えたことになる。 $C = \{b \in B \mid d(b) = 0\}$ である。

一般論にもとづいて。 A を Hopf algebra, (B, p) を right
 A -comodule algebra, $C = \{b \in B \mid p(b) = b \otimes 1\}$ とする。
 right B -module M と map $p_M: M \rightarrow M \otimes A$ の対 (M, p_M)

が次の条件をみたすとき (A, B) -Hopf module であるという:

$$\begin{array}{ccc} M \xrightarrow{P_M} M \otimes A & M \xrightarrow{P_M} M \otimes A & P_M(m \otimes b) = \sum m_{(0)} b_{(0)} \otimes m_{(1)} b_{(1)} \\ \downarrow P_M \quad \searrow \quad \downarrow 1 \otimes \Delta & \searrow \quad \searrow \quad \swarrow 1 \otimes \varepsilon & \left(\begin{array}{l} \text{triv. } P_M(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} \\ \text{とかく} \end{array} \right) \\ M \otimes A \xrightarrow{P_M \otimes 1} M \otimes A \otimes A, & M \otimes R & \end{array}$$

上の最初の2つの条件は M が right A -comodule になるということである。 (A, B) -Hopf modules の圏を M_B^A で表わす。射は B -module から A -comodule map とする。 $\forall M \in M_B^A$ に対し, $M_0 = \{m \in M \mid P_M(m) = m \otimes 1\}$ は right C -module であり, $M \mapsto M_0$ は M_B^A から right C -modules の圏 M_C への functor となる。これは left adjoint をもつ:

$M_C \ni V \longmapsto V \otimes_C B \in M_B^A$, ここで $V \otimes_C B$ は次によって Hopf module とする:

$$(v \otimes b) b' = v \otimes b b', \quad v \otimes b \longmapsto \sum v \otimes b_{(0)} \otimes b_{(1)}$$

adjunctions は次の通り.

$$\begin{cases} \Phi_V : V \longrightarrow (V \otimes_C B)_0, & v \longmapsto v \otimes 1 \\ \Psi_M : M_0 \otimes_C B \longrightarrow M, & m \otimes b \longmapsto m b. \end{cases}$$

$\forall M \in M_B^A$ に対し, Ψ_M が同型になるとき, M_B^A は 弱い構造定理 をもつという。さらに Φ_V が同型 ($\forall V \in M_C$) になるとき, M_B^A は 強い構造定理 をもつという。

$B \otimes A$ は $(b \otimes a) \cdot b' = (b \otimes a) P(b')$, $b \otimes a \longmapsto b \otimes \Delta(a)$ により, (A, B) -Hopf module になるが, $\Psi_{B \otimes A}$ を調べよう。

$B \xrightarrow{\sim} (B \otimes A)_0$, $b \mapsto b \otimes 1$, $\sum b_i \varepsilon(a_i) \longleftrightarrow \sum b_i \otimes a_i$ に注意すると, $\Psi_{B \otimes A}$ は次の β と一致する:

$$\beta: B \otimes B \longrightarrow B \otimes A, \quad b' \otimes b \mapsto \sum b' \varepsilon_{(b)}, \otimes b_{(1)}$$

この写像 β が全単射なとき, 拡大 B/C は A -Galois であると呼ぶことにする。このようにして, M_B^A が弱い構造定理をもてば, B/C は A -Galois となる。

A から B への map ϕ が次の図式を可換にするとき,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \downarrow \Delta & \cong & \downarrow \rho \\ A \otimes A & \xrightarrow{\phi \otimes 1} & B \otimes A \end{array} \quad \text{つまり, } \phi \text{ は } A\text{-comodule map.}$$

さらに, $\phi(1_A) = 1_B$ をみたすとき total integral という。また $\text{Hom}(A, B)$ の convolution 積 $*$ に関して可逆な integral が存在するとき, B は left であるという。left の条件は大変強いもので, 例えは次の結果がある ([5], Thm 9)。

$$B \text{ が left} \iff \begin{cases} B/C \text{ が } A\text{-Galois で, かつ} \\ B \simeq C \otimes A \text{ (as left } C\text{- and right } A\text{-comodule)} \end{cases}$$

このとき, M_B^A は強い構造定理をもつ。

[total integral の働き] left タイプではないが, total integral $\phi: A \rightarrow B$ をもつ場合には次の結果がある。

(1) ([3], (1.6)), $M_B^A \rtimes^v M$ は relative injective A -comodule になる。(2) $M_B^A \rtimes^v M$ に對し, $\eta_M: M \rightarrow M$ を次で定

義する: $\tau_M(m) = \sum m_{i0} \phi(S(m_{i1}))$, $m \in M$

このとき, $\tau_M(m) \in M_0$ となり, $n \in M_0$ に対しては

$\tau_M(n) = n$ となる. 特に $\tau_B: B \rightarrow C$ は left C -projection

となり, $cC \oplus cB$ となる. また, $M_c \rightarrow {}^V V$ に対し,

$\Phi_V: V \xrightarrow{\sim} (V \otimes_C B)_0$ がいえる.

(3) N を M_0 の C -submodule とすると, $NB \cap M_0 = N$.

特に, $M \in M_B^A$ が Artinian (or Noetherian) B -module

なら, M_0 は Artinian (or Noetherian) C -module.

(4) integral ϕ の image $\text{Im } \phi$ が C の B における centralizer B^C に含まれるなら, $cC \oplus cB_c$ となる.

B/C が A -Galois ならこの逆が成立 ([3], (2.4)).

(5) A が可換で, $\text{Im } \phi \subset \text{Center}(B)$ のとき, B -split

する M_B^A の任意の完全列 $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ は必ず

が (A, B) -split する ([3], (1.7)). この結果は $\text{Im } \phi \subset R \cdot 1_B$

のとき A が非可換でも 成り立つ.

[例] $A = R[G]$ のとき (すなわち, G -graded algebra B).

$\phi: R[G] \rightarrow B$ が integral とは, $\phi(\sigma) \in B_\sigma$ ($\forall \sigma \in G$)

をみたすことである. $\phi(1) = 1_B$ のときが total である.

特に, $\phi(\sigma) = \delta_{1,\sigma}$ とおくと, ϕ は total integral となる.

つまり G -graded algebra は必ずが total integral をもつ.

Hopf module は G -graded B -module になる。すなわち、
 right B -module $M = \bigoplus_{\sigma \in G} M_{\sigma}$ (as R -modules) で $M_{\sigma} B_{\tau} \subset M_{\sigma\tau}$
 となるものが $(R[G], B)$ -Hopf module となる。上の $\delta(\sigma)$
 $= \delta_{1,\sigma}$ なる total integral に対応する trace map tr_M は、
 $M \rightarrow M_0, m \mapsto m_1$ となる。left の条件は、

" $B_{\sigma} \cap U(B) \neq \emptyset, \forall \sigma \in G$ " となる。また Galois の
 条件は、" $B_{\sigma} B_{\tau} = B_{\sigma\tau}, \forall \sigma, \tau \in G$ " となる。すなわち、
 B/C が $R[G]$ -Galois $\iff B$ が strongly G -graded with $B_1 = C$.

[例] G -algebra B を考えよう。このとき $A = R[G]^*$ である。

Hopf module は 左 G -作用をもつ right B -module M で、

$\sigma(mb) = \sigma(m)\sigma(b), \sigma \in G, m \in M, b \in B$ となるもので
 ある。total integral は必ずしも存在しない。 $\sum_{\sigma \in G} \sigma(b)$
 $= 1$ なる $b \in B$ の存在と同値になる ([3], (1.8))。対応する
 trace map $\text{tr}_M: M \rightarrow M_0$ は $\text{tr}_M(m) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(mb)$
 となる。Galois の条件は古典的な意味の ' G -Galois' と
 一致する (すなわち、 $\exists \sum b_i$ の $c_i \in B \otimes B$ s.t. $\sum b_i \sigma(c_i) = \delta_{1,\sigma}$)。
 left の条件は、" $\exists b \in B$ s.t. $\sum_{\sigma \in G} \sigma'(b) \sigma \in U(B[G])$ "。

[例] B に iterative higher derivation $\{D_0 = \text{id}_B, D_1, \dots, D_{g-1}\}$
 を考える。 $A = R[x] (= R[x]/(x^g))$ である。Hopf module

は, right B -module M と $\{d_0=1_M, d_1, \dots, d_{g-1}\} \subset \text{End}(M)$ の組で, $d_i d_j = \binom{i+j}{i} d_{i+j}$, $d_r(m\phi) = \sum_{i=0}^r d_i(m) D_{r-i}(\phi)$ をみたすもの. total integral の存在は 次と同値になる:
 $\exists \phi \in B$ s.t. $D_1(\phi)=1, D_2(\phi)=\dots=D_{g-1}(\phi)=0$ ([4]参照)
 これに対応する tr_M は 次の通り.

$$\text{tr}_M(m) = m - d_1(m)\phi + d_2(m)\phi^2 - d_3(m)\phi^3 + \dots \pm d_{g-1}(m)\phi^{g-1}.$$

また $A=R[x]$ は primitive element x で生成されているから, total integral は $*$ -可逆になる.

[例] B に $d^g=0$ なる derivation d を考える. $A=R[x]^*$ の場合である. Hopf module とは, right B -module M と $\delta^g=0$ なる $\delta \in \text{End}(M)$ の組で, $\delta(m\phi) = \delta(m)\phi + m d(\phi)$ をみたすものとなる. " $\exists \phi \in B$ s.t. $d^{g-1}(\phi)=1$ " が total integral の存在と同値になる. 対応する trace map は, $\text{tr}_M(m) = m - \delta(m) d^{g-2}(\phi) + \delta^2(m) d^{g-3}(\phi) - \dots \pm \delta^{g-1}(m)\phi$. この場合も total integral は $*$ -可逆である.

[ガロア性] 一般論にもとる. $\beta: B \otimes B \rightarrow B \otimes A$ が全射のとき, どのような条件の下でこの β が全単射になるか調べることは重要である. Kreimer-竹内は [7] で, 次の事実を証明した: A が R 上有限生成射影的のとき, β が全射なら全

単射 (i.e., B/C は A -Galois) になる。さらに B は左 (または右) C -加群として有限生成射影的となる。

一般の場合は $\text{Im } \phi \subset \text{center}(B)$ なる total integral の存在の下で、 β が全射なら全単射になることが最近わかった。

これは [3], (2.5) の改良である。

またガロア性と構造定理との関係を与える次の事実 ([6], (2.11)) は重要である。

(a) B/C が A -Galois で B が平坦左 C 加群なら M_B^A は弱い構造定理をもつ。

(b) B/C が A -Galois で $\text{Im } \phi \subset B^C$ なる total integral をもてば M_B^A は強い構造定理をもつ。

[例] A, B を体上の commutative Hopf algebra とし、 $f: B \rightarrow A$ を全射な Hopf algebra map とする。このとき、 B は $p: B \xrightarrow{\Delta_B} B \otimes B \xrightarrow{1 \otimes f} B \otimes A$ により right A -comodule algebra となる。 f が全射だから、 $\beta: B \otimes B \rightarrow B \otimes A$ は全射になる ([3], p2157)。ここで C は $\{b \in B \mid (1 \otimes f)\Delta_B(b) = b \otimes 1\}$ で、 B の left coideal となる。従ってもし total integral $\phi: A \rightarrow B$ が存在すれば、上の一般論より B/C は A -Galois かつ強い構造定理をもつ。特に A は $a \cdot b = a f(b)$, $a \rightarrow \Delta_A(a)$ により $A \in M_B^A$ だから。

$R \otimes B \simeq A$ となる ($A_0 = R$). $0 \rightarrow C^+ \rightarrow C \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$ に $\otimes B$ を apply すると $R \otimes B \simeq B/C^+B$. 従って A は B/C^+B と同型 (Hopf algebra として) になる.

なお, A から B への coalgebra map g で $f \circ g = \text{id}_A$ なるものが存在すれば, $g(1_A) = 1_B$ と仮定してよいから, この g が A から B への total integral を与えている.

[宮下-Ulbrich 作用] strongly G -graded algebra $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$ に対し, 群 G は $C = B_1$ の centralizer B^C に自己同型として自然に作用する. これがいわゆる宮下自己同型である.

Ulbrich [8] は有限生成射影的 Hopf algebra A による A -Galois 拡大 B/C に対し, B^C への A -action $B^C \otimes A \rightarrow B^C$ を定義した. $A = R[G]$ のときは丁度宮下自己同型を与えている. 我々は一般の Hopf algebra A に対し, A -Galois 拡大 B/C と algebra map $\alpha: B \rightarrow E$ が与えられれば, C の E における centralizer E^C (α を通して E を B -bimodule とみる) に自然な A -action $E^C \otimes A \rightarrow E^C$ が存在し, その invariants が E^B となることを示したい.

まず A から E への R -module map 全体 $\text{Hom}(A, E)$ は B から E への left C -module map 全体 $\text{Hom}_C(B, E)$ と次の対応 π で 1 対 1 になる. $f \mapsto \pi(f)$, $\pi(f)(c) = \sum b_{0i} f(b_{0i})$.

理由は次の図形の可換性からくる。

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(A, E) & \xrightarrow{\pi} & \text{Hom}_{C-}(B, C) \\
 \downarrow \wr & & \uparrow \wr \\
 \text{Hom}_{B-}(B \otimes A, E) & \xrightarrow[\sim]{\text{Hom}(\beta, E)} & \text{Hom}_{B-}(B \otimes B, E)
 \end{array}$$

簡単な計算により, $\text{Im } f \subset E^C \iff \pi(f)$ が C -bimodule map. 従って次の同型が得られた。

$$\pi: \text{Hom}(A, E^C) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{C,C}(B, E).$$

この同型 π を利用して, E^C に A -action を導入する. $x \in E^C$ に対し, $B \ni b \mapsto xb \in E$ は C -bimodule map であるから, $\hat{x} \in \text{Hom}(A, E^C)$ で $\pi(\hat{x})(b) = xb, \forall b \in B$ なるもの $\hat{x}$ が唯一つ存在する. $\hat{x}(a) = x^a (a \in A)$ とかくことにする. このとき, E^C の $A \ni a \mapsto x^a \in E^C$ は E^C の A -action であり, その invariants $(= \{x \in E^C \mid x^a = \varepsilon(a)x, \forall a \in A\})$ は $E^B (= B$ の E における centralizer) と一致することになる。

例えば, strongly G -graded B/C に対し σ は, E^C への G -action $(x, \sigma) \mapsto x^\sigma$ で, $xb = b x^\sigma, \forall b \in B_\sigma$ をみたすものが唯一つ存在する. また G -Galois 拡大 B/C に対し (ただし G は有限群), E^C は G -graded algebra となり, その grade は次のようになる。

$$(E^C)_\sigma = \{x \in E^C \mid xb = \sigma(b)x, \forall b \in B\}, \sigma \in G.$$

A が有限生成射影的のとき, E^C の A -action を left A^* -coaction の言葉でいえば, E^C に次の条件を満たす left A^* -coaction $\lambda: E^C \rightarrow A^* \otimes E^C$, $\lambda(x) = \sum x_{(-1)} \otimes x_{(0)}$ が唯一つ存在する:

$$xb = \sum \langle x_{(-1)}, b_{(0)} \rangle b_{(1)} x_{(0)}, \quad x \in E^C, b \in B.$$

一般には E^C/E^B は A^* -Galois にならない。 $E = B$, $\alpha = \text{id}_B$ のときを考えれば, B^C は left A^* -comodule algebra となり, その invariants は B の中心 $Z(B)$ となる。 B^C の分離性と total integral $A^* \rightarrow B^C$ の存在が同値になる。また B の東屋性と B^C/R の A^* -Galois 性の間に密接な関係がある。これらに関しては, [6] を参照。

参考文献

- [1] Y. Doi, Comm. Algebra 11 (1983), 243-255.
- [2] ———, " 12 (1984), 1155-1169.
- [3] ———, " 13 (1985), 2137-2159.
- [4] ———, $R[X]/(P(X))$ -Galois extensions について. 1986年1月阪大「代数群, リ-環...」報告集
- [5] Y. Doi and M. Takeuchi, Comm. Algebra 14 (1986), 801-818.
- [6] ——— and ———, Hopf-Galois extensions of algebras, the Miyashita-Ulbrich action, and Azumaya algebras (Preprint)
- [7] H. F. Kreimer and M. Takeuchi, Indiana U.M.J. 30 (1981).
- [8] K.-H. Ulbrich, Comm. Algebra 10 (1982), 655-672.