

分岐流の数値計算

慶応大日吉物理 川口光年

浜野明子

§ 1. はしがき

血管の損傷は狭窄部の下流，分岐点の近く，大曲率のところ（大動脈弓）に多発することがよく知られているが，その原因は，多くの実験的，理論的研究にもかかわらず，完全には解明されていない。血管損傷の原因を流体力学的な見地から探究しようとするのが，我々の一連の数値的解析の目的である。

この研究では，分岐をもつ粘性流体の流れを2次元モデルにより数値的に研究した。定常流の場合を§2に，拍動流の場合を§3に述べる。

§ 2. 定常流

拍動流の計算を進める前に，基礎資料を得る目的で，分岐のあるチャンネル内の粘性流体の定常流を数値的に調べた。

分岐現象を明らかにする為には、分岐を伴うチャンネル内の定常流をいくつかのパラメーター（分岐流路の幅、分岐角 θ 、レイノルズ数 R 、分岐流量の分配比 ψ ）を変えた場合を研究した。

§ 2.1 基礎方程式

上流の幅 H 、平均速度 U を代表的な長さ、速度として無次元化すると、非定常のナビエ・ストークスの方程式は、 ψ 、 ω を流れの関数、渦度として

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \nabla^2 \omega \quad (1)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (2)$$

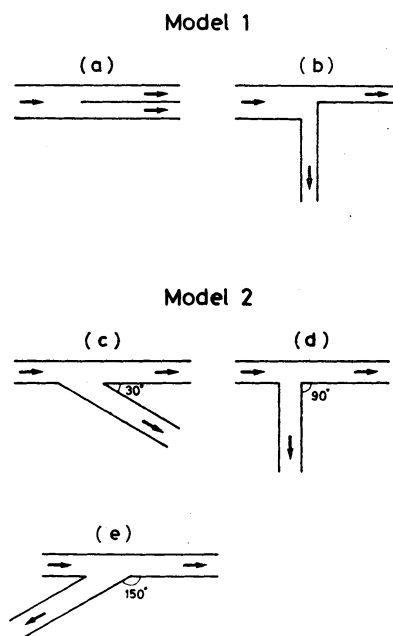
$$R = \rho H U / \eta \quad (3)$$

で与えられる（ ρ ：密度、 η ：粘性係数）。

境界条件は

- 1) 壁面上で流速度は0である。
 - 2) 十分上流および十分下流では、 ψ 、 ω は2次元ポアズイユ流で与えられる。
- をとった。

分岐流路の幅については2つの 図1. 定常流のモデル



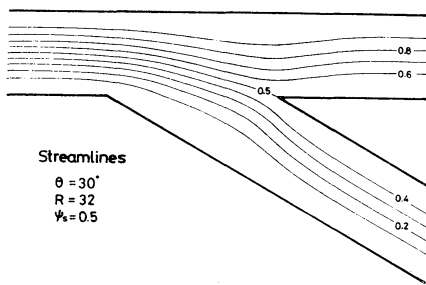
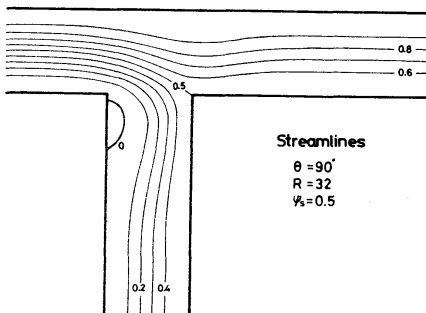
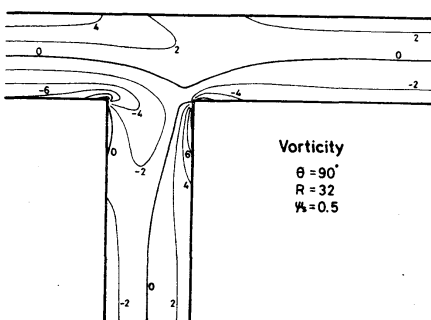
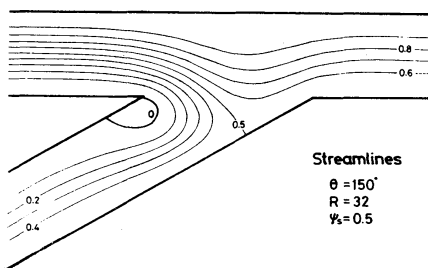
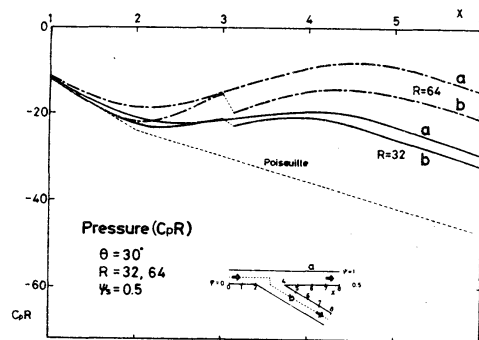
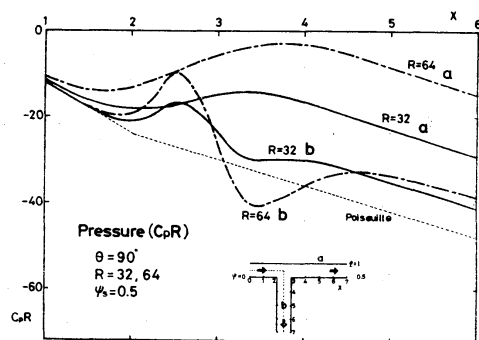
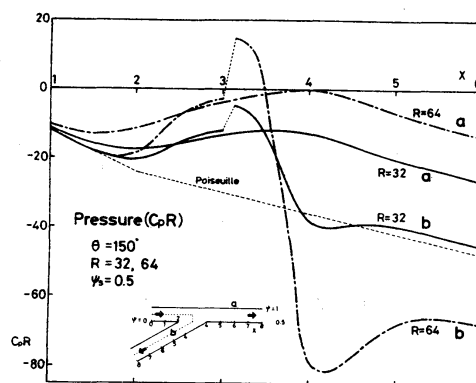
モデルを考えた。モデル1では、分岐流路の幅は上流の幅 H の半分、モデル2では分岐流路の幅は上流の幅と同じにした。分岐角はモデル1では 0° , 90° , モデル2では 30° , 90° , 150° を選んだ。この5つの場合に、それぞれ、分流比が1:1の時 $R=32$, 64, 分流比65:35の時 $R=32$ の流れを計算した。

計算を実行する領域はもちろん有限でなければならない。計算領域を3つに分ける。i)上流部, ii)分岐部, iii)下流部。それぞれの長さを L_1 , L_2 , L_3 とする。 L_1 は上流の幅 H の2倍に、 L_3 は H の2.5~3倍に選んだ。 L_2 は分岐流の幅と分岐角から自動的にきまる。計算領域の上、下流端は十分上流、あるいは十分下流と考え、境界条件2)を x こで使った。格子定数 Δx は常に $1/20$ にとった。差分方程式は(1), (2)から、時間微分については前進差分、空間微分については中心差分をとって、導いた。(2)式を数値積分する際、緩和係数 $k=1.8$ の値を選んだ。

§ 2.2 計算結果

モデル1の計算結果は岐阜大学の松井辰彌教授の所で行なわれた実験結果とよく一致した。

モデル2についての計算は上に述べた9つの場合に行なったが、図2~5に代表的な結果を示す。これらの計算結果が

圖 2 流線 ($R=32, \psi_s=0.5$)圖 3 流線 ($R=32, \psi_s=0.5$)圖 4 等渦線 ($R=32, \psi_s=0.5$)圖 5 流線 ($R=32, \psi_s=0.5$)圖 6 壓力分布 ($\theta=30^\circ, \psi_s=0.5$)圖 7 壓力分布 ($\theta=90^\circ, \psi_s=0.5$)圖 8 壓力分布 ($\theta=150^\circ, \psi_s=0.5$)

ら、角の下流の停留渦は、分岐角 30° , $R=32$ の時はみられないが、それ以外の時には常に見られ、分岐角、レイノルズ数と共に増加することがわかる。分岐角 150° , $R=64$ の時には真直な壁に沿って第2の停留渦が現われる。分岐流線の付着する淀み点は分岐角 30° , 90° では下流の角に極めて近いが、 150° では角からかなり離れる。

圧力は真直な分枝については壁に沿って積分したが、側枝については図6～8の挿入図に点線で示したほど中心線に沿って積分した。2, 3の計算結果を図6～8に示す。分岐による抵抗増加(無次元) ΔL はモデル2について

$$\Delta L = \frac{p_{\text{入口}} - p_{\text{出口}} + [(dp/dx)_{\text{上流}} \times L_1 + (dp/dx)_{\text{下流}} \times (L_2 + L_3)]}{-(dp/dx)_{\text{上流}}} \quad (4)$$

で定義した。 $(dp/dx)_{\text{上流}}$ および $(dp/dx)_{\text{下流}}$ は上流あるいは下流と同じ条件のポアズイユ流に対する値である。分岐部については $(dp/dx)_{\text{上流}}$, $(dp/dx)_{\text{下流}}$ のうち小さい方の値をとった。

(モデル1で $(dp/dx)_{\text{上流}}$, モデル2では $(dp/dx)_{\text{下流}}$)。図9にモデル2の場合の分岐による抵抗増加(無次元) ΔL を分岐角 θ の関数として示した。これから、直線分枝の ΔL は分岐角にほとんどよらないが、側枝の ΔL は θ と共に増加し、その勾配は $R=64$ ではかなり大きいことがわかる。モデル2の ΔL は分岐角 150° , $R=64$ の側枝の場合を除き負である。

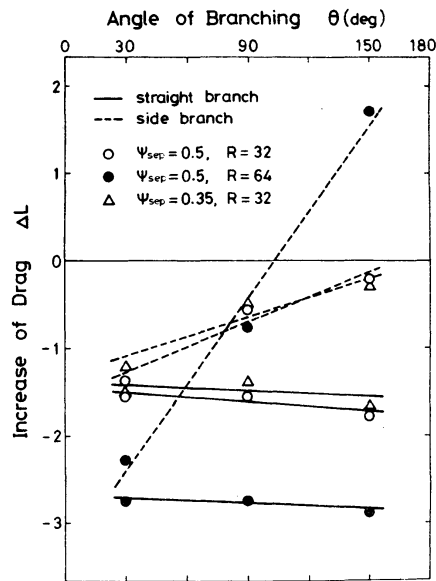
以上の計算によって次のことが結論された。

1) 分岐による抵抗増加は、モデル1の場合の様に下流の圧力勾配が上流の圧力勾配より大きい時は、正である。しかし、モデル2の場合の様に下流の圧力勾配が上流のより小さい時は通常負になる。

2) レイノルズ数が大きくなる 図9. 分岐による抵抗増加(モデル2)
と、直分枝の方が側枝に比べ流れやすくなる。また、ポアズイユ流からのずれも大きくなり、分岐の影響はより下流領域まで及ぶようになる。

3) 下流の分流比が異なっても、抵抗への影響は小さい。

4) 分岐角が大きくなると側枝の抵抗は増える。レイノルズ数が大きい時にはこの傾向は顕著となる。



§3. 拍動流

血液の流れについては定常流より拍動流(定常流+振動流)の方が影響が大きいと考えられる。たゞ、拍動流の計算は計算時間もかかるし、パラメーター(周期, 流量の変動比)も増えるので、パラメーターをなるべく固定して計算せざるを

得なかった。

分岐角を 90° ，分流後の流路幅 1，流量の変動比 1.5 を固定し，他のパラメーターを変えて 5 つの場合を計算した。

$$(1) \quad R = 32, \quad \text{周期 } T = 1, \quad \text{分流比 } \psi_s = 0.5$$

$$(2) \quad R = 32, \quad T = 1, \quad \psi_s = 0.35$$

$$(3) \quad R = 64, \quad T = 1, \quad \psi_s = 0.5$$

$$(4) \quad R = 64, \quad T = 3, \quad \psi_s = 0.5$$

$$(5) \quad R = 64, \quad T = 10, \quad \psi_s = 0.5$$

流量は

$$Q = Q_0 + \frac{1}{2} Q_0 \sin(2\pi t/T + \phi) \quad (5)$$

の様に变化するとし，上下流端では，分岐がない直管で流量が (5) の様に变化した時の流れ—2次元 Womersley 流—になると假定した。適当な初期条件で始めて，解が周期的になってから 1 サイクルを取った。計算領域は定常流の場合より幾分か広げて，上，下流領域の長さそれぞれ $3H$ ， $5H$ とした。また格子定数は $1/20$ とした。

2 つの分枝の長さが有限である時には，各瞬間において 2 つの分枝の下流端の圧力が等しいという様な条件により，時々刻々分流比が決められてゆく。それはそれで非常に興味のある問題である。しかし，計算する立場からすると，各瞬間の分流比を決定する為にもう一段の *iteration* が必要で，計

算時間は少なくみつもっても10倍以上かゝる。ここでは龐大な計算時間を避けて、2つの分枝への分流比は常に一定と假定した。これは分枝の長さが十分長い場合に対応する。分枝が十分長くなれば、分岐部より下流の圧力降下は、分岐の影響がなくなり Womersley 流になった部分のものが、分岐部近くの圧力降下に比べて圧倒的に大きくなる。従って分岐部近くで2つの分枝に沿っての圧力降下が時間的に変動しても、全体としての分枝に沿う圧力降下の比は時間的に変動せず、分流比は一定に保たれる。

上流の流路の幅 H 、平均流量 Q_0 を単位として無次元したので、 $R = Q_0 / \nu$ (ν : 動粘性率) である。周期 T は無次元時間 H/U_0 (U_0 : 平均速度) を単位として測った。幅 2 cm 、流速 20 cm/s なら、 $T = 1, 3, 10$ は次元をもった周期 $1/10, 3/10, 1$ 秒に対応する。

図10に(3)の場合の流線、図11に等渦度線の変化を $1/10$ サイクル毎に示した。流量のピークは $t = 7.2$ のあたりであるが、このあたりから角の後の停留渦が発達し始める。流量の最小付近で停留渦は最大となり、これから次第に小さくなり、最後は遊離して消滅する。この遊離した渦が減衰しながら流されてゆく様子は図11の等渦度線からもっとよくわかる。(1), (2)の場合も定性的に大体同じである。

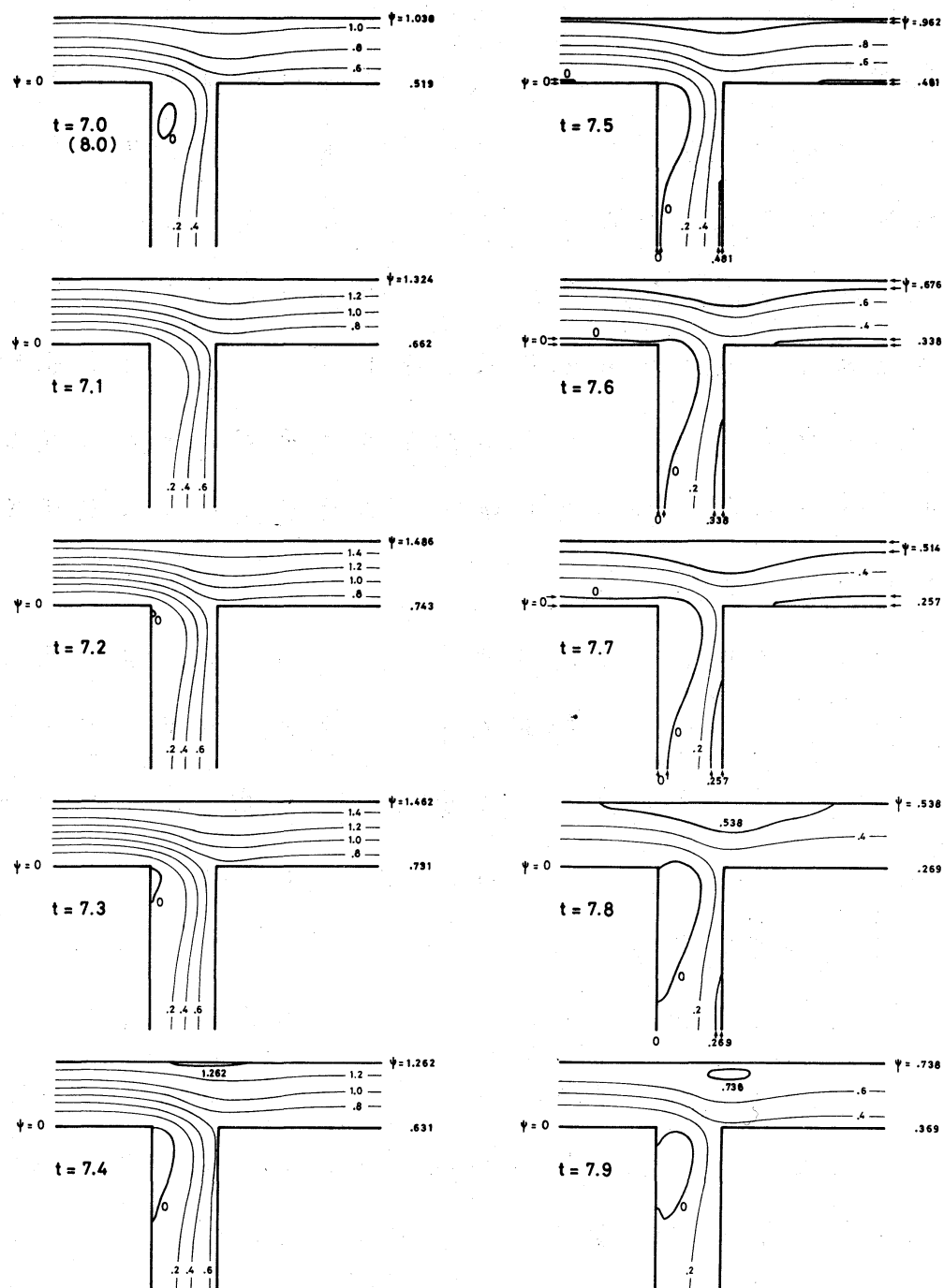


圖 10 流線 ($R=64$, $T=1$, $\psi_s = 0.5$)

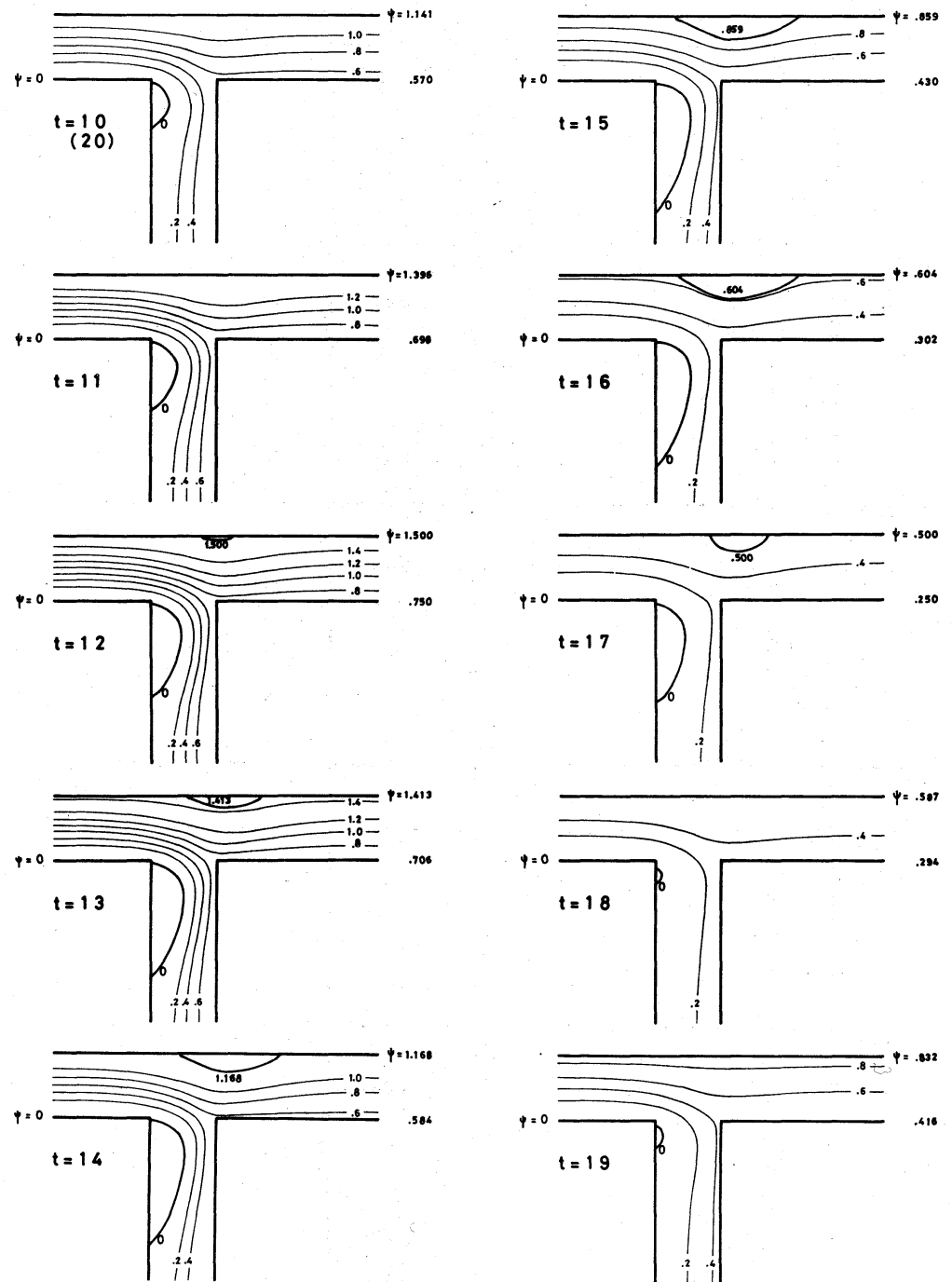


圖 12 流線 ($R = 64$, $T = 10$, $\psi_s = 0.5$)

(5) の場合の流線の変化を図 12 に $1/10$ サイクル毎に示した。この場合には停留渦は消長はするが、 $T=1$ の場合の様に剥れて流れだすことはない。ほぼ準定常とみられる。

壁の上の剪断応力は時間と共に変化するが、その変動幅が場所により大きく異なり、定常流の場合の剥離流線が壁にぶつかる点で特に大きくなることか、狭窄

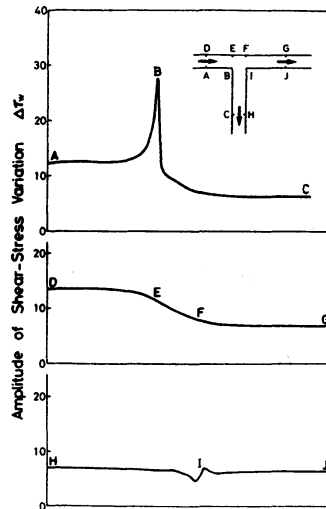


図 13 剪断応力の変動幅
($R=32, T=1, \psi_s=0.5$)

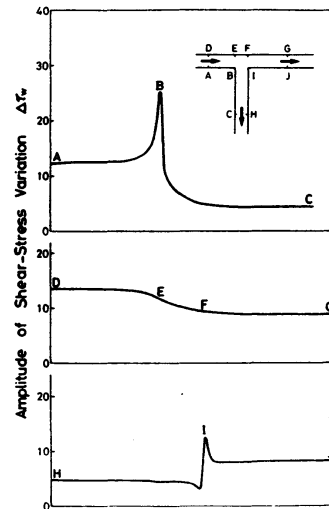


図 14 剪断応力の変動幅
($R=32, T=1, \psi_s=0.35$)

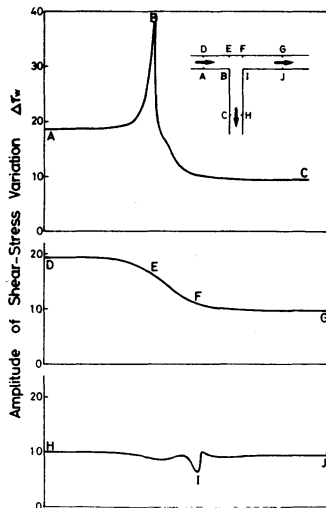


図 15 剪断応力の変動幅
($R=64, T=1, \psi_s=0.5$)

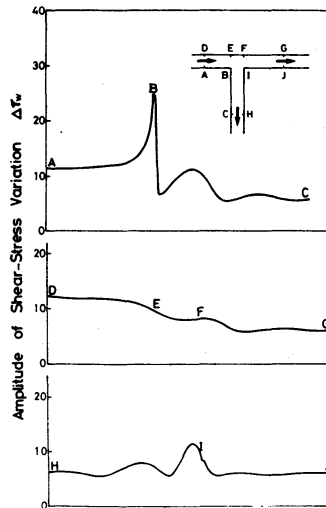


図 16 剪断応力の変動幅
($R=64, T=3, \psi_s=0.5$)

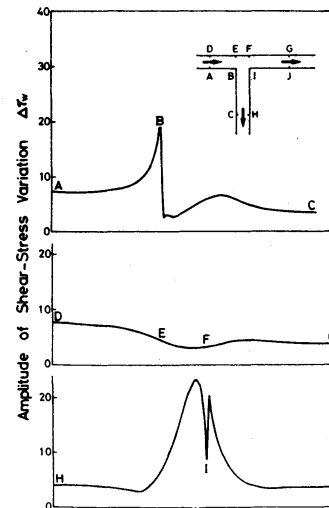
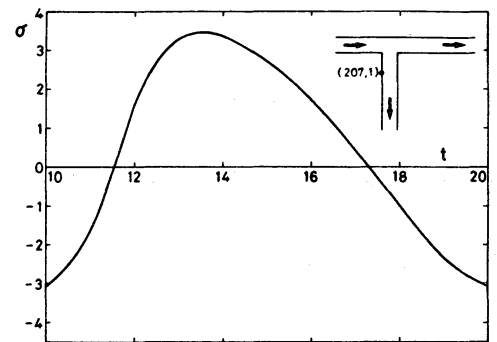


図 17 剪断応力の変動幅
($R=64, T=10, \psi_s=0.5$)

のある拍動流の計算の時に示され、これが動脈の狭窄後膨張の原因になると考えられた。分岐流についても壁の上での剪断力の変動幅を求め、図13~17に示した。図中のB点でこの値が大きいのは当然であるが、周期が大きくなってくると、Bの下流BC上にピークが現れる。また周期Tが大きくなると、うしろの角近くの変動幅も急に大きくなる。

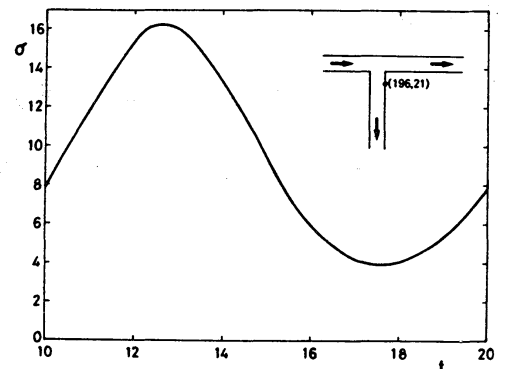
この計算では入力というべき上下流端の流れは時間的に正弦的に変化する。しかし基礎方程式が非線型だから、出力ともいうべき計算結果には高調波が現われるのは当然である。どの位

の高調波まで現われるかを知ることは局所的な流れを解析的に調べようとする時に役立つと思われる。(5)の場合に、最も大きな変動を示すとみられるBC上の一点およびうしろの



$$\sigma = 0.519 + 3.115 \sin(\omega t - 1.1346) - 0.740 \sin(2\omega t + 1.2851) \\ - 0.212 \sin(3\omega t + 0.4307) - 0.060 \sin(4\omega t - 0.4188) \\ + 1.4035 \times 10^{-4} \cos 5\omega t$$

図18. 剪断力のフーリエ分解
($R=64, T=10, \psi_s=0.5$)



$$\sigma = 9.317 + 6.073 \sin(\omega t - 0.1134) - 0.767 \sin(2\omega t + 1.2195) \\ - 0.079 \sin(3\omega t + 0.3608) - 0.016 \sin(4\omega t - 0.4769) \\ + 4.187 \times 10^{-3} \cos 5\omega t$$

図19. 剪断力のフーリエ分解
($R=64, T=10, \psi_s=0.5$)

角I近くの点における剪断応力の値を1/10サイクル毎のデータをもとにしてフーリエ解析を行なった。結果を図18, 19に示した(解析を行なった点は挿入図で示した)。もとの周波数の3倍の周波数まで考慮すれば、大体よさそうである。

以上の計算結果から次のことが結論される。

- 1) レイノルズ数が大きくなると分岐の影響は大きくなる。
- 2) 分流比を変えてみてもあまり大きな変動はない。
- 3) 正弦波を入力とした時、結果は3倍の周波数まで考慮すれば大体よい。
- 4) 周期が大きい時、うしろの角での剪断応力の変動幅が大きくなる。
- 5) 周期が大きい時、狭窄のある場合と同様に、定常流の角近くからの剥離流線が壁とぶつかる点の近くで、剪断応力の変動幅が大きくなる。

(1979.9.14 記)