

Prehomogeneous vector space の相対不変式の Fourier 変換について (II)

京大 理 室政和

Prehomogeneous vector space (G, V, f) を regular とする。この相対不変式 f は、 (G, V, f) のひとつの real form と、 f もかわらない。 $V_{\mathbb{R}}$ 上の相対不変超関数 $|f|^s$ の Fourier 変換は $|f|^s$ のみならず極大過剰決定系の同伴数の関係も、原点の conormal と zero section の間で求めることに帰着される。

その際、我々は、micro-local に、極大過剰決定系をより簡単な形に変形 (quantized contact transformation) して、その同伴数の関係を求めることを繰り返してゆけばよい。

[1][2] においては、 $x^s, (\sum_{i=1}^n x_i^2)^s$ という type の相対不変超関数 (より正確には Microfunction) のみならず、極大過剰決定系への変換を行ったときの同伴数のつながりの公式を与えた。

ここでは [4] において予想した、より一般の Prehomo

generic vector space の相対不変式において、その同伴数のつながりの公式の証明を与える。あわせて Binary cubic forms の discriminant に対して、explicit に公式を与え、それを実際の計算に応用する例を示す。

この一般公式の利点は、今までめんどろであった、real の orbit 分解を、いくらか省くことができかつ計算を簡略化することができることにある。

§1. 定理 及びその準備

我々は通常 $\mathbb{P}^*X$ (X は complex mf で、その Projective bde) の上で、極大過剰決定系を考え、それ $\sqrt{-1}S^*M$ (M は X の complexification とする、real analytic mf) に、制限して microfunction solution を考える。

ところが、多項式の complex power のある超関数 E を考察する場合には、Zero section における solution もいっしょに考えるので、極大過剰決定系を T^*X で考え、solution は $\sqrt{-1}T^*M$ 上に $\hat{C}_M$ を定義しなければならない。

しかしながら便宜上、一次元びやした mf $X' = X \times \mathbb{C}$ において、考えればより自然な formulation が可能である。以下、定理には直接関係はないが、それを記す。

X を n 次元 complex mf. M は X 上の complex nbd とする real analytic mf とする。 $X' = X \times \mathbb{C}$, $M' = M \times \mathbb{R}$ とすれば、 M' は X' 上の complexification とする real analytic mf である。

$x_0 \in X$ として、 x_0 の X での nbd を V とする。 V の局所座標を、 $(z) = (z_1, \dots, z_n)$ $V \cap M = V_{\mathbb{R}}$ として 対応する real の局所座標を $(x) = (x_1, \dots, x_n)$ と書く。 $V' = V \times \mathbb{C} \ni (z, \hat{z})$ $V'_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \ni (x, t)$ として、

$$\begin{aligned} \sqrt{t} T^* V'_{\mathbb{R}} &= \{ (x, t; \sqrt{t}(\tau, y)) \} \\ T^* V' &= \{ (z, \hat{z}, (\tau, \xi)) \} \end{aligned}$$

と dual の座標を定めるとき

$$\begin{aligned} \sqrt{t} S^* V'_{\mathbb{R}} \big|_{t=0, t>0} &= \{ (0, x, p); -p = \sqrt{t} (y/\tau) \} \\ p^* V' \big|_{\hat{x}=0, \hat{z} \neq 0} &= \{ (0, z, \hat{p}); \hat{p} = \xi/\tau \} \end{aligned}$$

と書くことができる。そして自然に

$$\sqrt{t} S^* V'_{\mathbb{R}} \big|_{t=0, t>0} \hookrightarrow p^* V' \big|_{\hat{x}=0, \hat{z} \neq 0}$$

という real analytic mf. $\sqrt{t} S^* V' \big|_{t=0, t>0}$ の complexification が存在する。さらに次のように $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}, \mathcal{G}$ の自然な同型が存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 \sqrt{-1} S^* V'_{\mathbb{R}}|_{x=0, t>0} & \hookrightarrow & P^* V'|_{x=0, \tilde{t}=0} \\
 \downarrow \varphi_{\mathbb{R}} & & \downarrow \varphi \\
 \sqrt{-1} T^* V_{\mathbb{R}} & \hookrightarrow & T^* V
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ただし } \varphi_{\mathbb{R}} : (x, \sqrt{-1}y) &\longmapsto (x, 0, \sqrt{-1}y) \\
 \varphi : (x, \xi) &\longmapsto (x, 0, \xi)
 \end{aligned}$$

したがって、上で考えるかわりに下で考えてもよい。

$P^* V'_d$ 上の極大過剰決定系で、(ただし $\tilde{t} \neq 0$)

$$\mathcal{MC} : \begin{cases} \hat{\mathcal{F}} u = 0 \\ P_i(t, x, D_x, D_x) u = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} [x, P_i] &= 0 \\ P_i &\in \Sigma_{V'_d} \end{aligned}$$

(ここで、 $\Sigma_{V'_d}$ は $P^* V'$ 上の Microdifferential ops の sheaf).

と書くことができるような極大過剰決定系だけを考えよう。

このような方程式の support は、 $\{\tilde{t}=0\}$ という集合の中に含まれるゆえ、 $T^* V$ 上の方程式と考えることができる。すなわち P_i は t, D_t を含んでいないとしてよいから、

$$\widehat{W}\mathcal{C} = \Sigma_V / \Sigma \Sigma_V P_i$$

(Σ_V は T^*V 上の Microdifferential sheaf)
を考えると $W\mathcal{C}$ と $\widehat{W}\mathcal{C}$ は 1:1 に対応している。

$\sqrt{t} S^* V_R'$ 上の sheaf $\mathcal{C}_{V_R'}$ の subsheaf $\widehat{\mathcal{C}}$ を

$$\widehat{\mathcal{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \{ v \in \mathcal{C}_{V_R'} ; t v = 0 \}$$

と定義すれば、これは support は $\sqrt{t} S^* V_R' |_{t=0, t \neq 0}$ に含まれている。とくに $\sqrt{t} S^* V_R' |_{t=0, t > 0}$ の上だけで考えれば、 $(\sqrt{t} T^* V_R, \widehat{\mathcal{C}}_{V_R})$ という sheaf 付の space が考えられて $W\mathcal{C}$ の solution は $\widehat{\mathcal{C}}_{V_R}$ 上に考えることができる。

また $\sqrt{t} S^* V_R' |_{t=0, t > 0}$ 上の (分数階の) Microdifferential operators の sheaf $\Sigma_{V_R'}$ のうち、 $x_1, \dots, x_n, D_{x_1}, \dots, D_{x_n}$ で生成される subsheaf を $\sqrt{t} T^* V_R$ 上の Microdifferential operators の sheaf とし、 Σ_{V_R} と書くことにする。さらにあげた Σ_V も同様に $x_1, \dots, x_n, D_{x_1}, \dots, D_{x_n}$ で生成される $\Sigma_{V_R'}$ の subsheaf とおいて言う。

$\text{supp}(\widehat{W}\mathcal{C}) = \cup \Lambda_i$ ときやく成分に分解したとき、simple な Lagrangian mf Λ_i に対しては、order が定義できる。

$\text{Ord}_{A_i}(\widehat{\eta}) = \text{Ord}_{\varphi(A_i)}(\eta) + \frac{1}{2}$ として定義する。

以上の議論は、 $\bar{V}$ 上で、したがって、局所座標のやり直しによつて X 全体で行、 τ としてよい。すなわち、

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{t} S^* M'_{t=0, \tau=0} & \hookrightarrow & P^* X' |_{\hat{\tau}=0, \tau \neq 0} \\ \varphi_R \uparrow & & \varphi_R \uparrow \\ \sqrt{t} T^* M & \hookrightarrow & T^* X \end{array}$$

と同型の map をつくることかでき、 $\sqrt{t} T^* M$ 上の sheaf $\tilde{\mathcal{L}}_M, \Sigma_M$ 、 $T^* X$ 上の sheaf Σ_X も同様に 12 定義できる。

$T^* X$ の接触変換は $\hat{\tau}, \tau$ を変化させない $P^* X'$ 上の接触変換であるから、 $T^* X$ 上の斉次正準変換である。

そこで次に定理を述べるのであるが、その前に、Connected Component について注意しておく。

$\eta: \Sigma_X / \sum_{i=1}^k \Sigma_X P_i$ が、極大過剰決定系であるとする。この η の real への制限、 $\eta|_{\mathbb{R}}$ の support は Lagrangian mfs の合併であるが、その support の点、が、同じ。

connected component に λ , τ いるということは $P_1, \dots, P_k$ の Principal symbols $\sigma(P_1), \dots, \sigma(P_k)$ (もちろん P_i は $\mathcal{H}$ の involutory base を含み τ いると仮定している。) の Hamilton vector fields $H_{\sigma(P_1)}, \dots, H_{\sigma(P_k)}$ は $\text{supp}(\mathcal{H})$ の simple Lagrangian の上に flow を定義するが、その flow に τ 移りうるということである。

$(G, V, f), (G', V', f')$ を $\mathbb{C}$ 上の n 次元, l 次元, の regular prehomogeneous vector space. ($n > l$) $(G_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}, f)$, (G', V', f') も、その $\mathbb{R}$ real forms とする。ここで (G, V, f) は $f_1, \dots, f_m$ を相対不変式にから $\chi_1, \dots, \chi_m$ をその characters とする。 $\sqrt{1} T^* V_{\mathbb{R}}, \sqrt{1} T^* V'_{\mathbb{R}}$ 上の $\mathcal{H}^S (= \mathcal{H}_1^{S_1} \dots \mathcal{H}_m^{S_m})$ $\mathcal{H}^{S'}$ という相対不変超函数 (正しくは microfunction) のために、極大過剰決定系を $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ とする。 $V = \{(x_1, \dots, x_n)\}$, $V' = \{(x_1, \dots, x_l)\}$ とし $V' \hookrightarrow V$ は自然に定義されている。 $\pi: T^*V \rightarrow V$, $\pi': T^*V' \rightarrow V'$ と projection map を定義する。

Theorem

$\mathcal{H}$ の holonomy diagram の simple Lagrangian Λ, Λ' の間に次の条件が成立しているとする。

i) Λ と Λ' は regular intersection.

ii) $\text{codim } \pi(\Lambda) < \text{codim } \pi(\Lambda')$

さらに, $\Lambda \cap \Lambda' = \mathcal{S}$ とし S_R を connected components に分解し, $S_R = \bigcup S_j$ とするとき, 各 S_j の generic point を Λ_j とする。 (ここで S_R とは $\mathcal{S}$ の real part に制限したものを指す。以下同様)。その nbd U_j として real contact transformation により,

$$\begin{aligned}\Lambda &= \{x_{k+1} = \dots = x_n = 0, \quad y_1 = \dots = y_l = 0\} \\ \Lambda' &= \{x_{k+1} = \dots = x_{\frac{n}{2}} = 0, \quad x_1 = \dots = x_l = 0\}\end{aligned}$$

$$\pi|_{U_j} = \pi' \otimes \delta(x'') \quad (\text{原点のある nbd})$$

とすることができる。

$V_R = \bigsqcup_{i=1}^k V_R^i$ は, π' の zero section (の real part) とし, π' の connected components 分解したとすると, このとき,

$$|\mathcal{H}_i^s(x)| = \begin{cases} |f^s(x)|^s & x \in V_R^i \\ 0 & x \notin V_R^i \end{cases}$$

と V_R 上の hyperfunction を定義する。また, $V_R^* = \bigsqcup_{i=1}^k V_R^{*i}$ を原点の conormal (の real part) と connected components 分解したものとす。

$$|f'|_i^s(y') = \begin{cases} |f'|^s(y') & y' \in V_{\mathbb{R}}^{*0} \\ 0 & y' \notin V_{\mathbb{R}}^{*0} \end{cases}$$

と hyperfunction (microfunction) を定義する。そして

$$\begin{bmatrix} |f'|^s(x') \\ \vdots \\ |f'|_k^s(x') \end{bmatrix} = \int (2\pi)^{-\frac{l}{2}} |C_0|^s |C_1|^t A(s) \begin{bmatrix} |f'|^{s-\frac{l}{r}} \\ \vdots \\ |f'|_k^{s-\frac{l}{r}}(y') \end{bmatrix} \exp i \langle x', y' \rangle dy'$$

と存、 T とする。ここで $A(s)$ は $k \times k$ 行列 (t は transposed) と

$$C_0 = f'^*(y') f'(grad \log f'^*(y'))$$

$$C_1 = f'^*(y')^{\frac{2l}{r}} Hess \log f'^*(y') \quad \deg f' = r$$

であるものとする。

以上の仮定のもとに

Σ の nbd の極大過剰決定系は micro local には $\Pi \Sigma'$ と同型ゆえ $\Lambda_{\mathbb{R}}, \Lambda'_{\mathbb{R}}$ の real connected components の数は各々 l 個づつである。 Σ の nbd で $\Lambda_{\mathbb{R}} = \bigsqcup_{j=1}^k \Lambda_{\mathbb{R}}^j, \Lambda'_{\mathbb{R}} = \bigsqcup_{j=1}^k \Lambda_{\mathbb{R}}^{'j}$ と分解するとして各々が $V_{\mathbb{R}}' \times \{0\}, \{0\} \times V_{\mathbb{R}}^{*0}$ の分解に対応して、いるとするとき $\Lambda_{\mathbb{R}}^j$ の同位数 $c_j, \Lambda_{\mathbb{R}}^{'j}$ の同位数 c_j' として、その関係は次のようにして与えられる。

$$\begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_k \end{bmatrix} = A(\lambda) \begin{bmatrix} \tau(\Lambda'_R) - \tau(\Lambda_R \cap \Lambda'_R) \\ \vdots \\ \tau(\Lambda_R^2) - \tau(\Lambda_R \cap \Lambda'_R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{ここから } \tau(\Lambda_R^i) &= \rho_{\text{gen}} \langle Ax_i, -Ay_i \rangle \\ &\quad A \in \mathfrak{g} \end{aligned} \quad \begin{aligned} (x_i, y_i) &\text{は } \Lambda_R^i \text{ の} \\ &\text{generic pt.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(\Lambda_R \cap \Lambda'_R) &= \rho_{\text{gen}} \langle Ax, Ay \rangle \\ &\quad A \in \mathfrak{g} \end{aligned} \quad \begin{aligned} (x, y) &\text{は 交わりの} \\ &\text{generic pt} \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}$ は G の Lie Algebra. λ は $|\mathfrak{f}|^S$ の原点の
Conormal での order が. $a\lambda + b$ とするとき.

$$\text{ord}_{\Lambda'_R} |\mathfrak{f}|^S - \text{ord}_{\Lambda_R} |\mathfrak{f}|^S = a\lambda + b.$$

としてきまる。

(定理の statement 終わり)

(証明)

証明は 次の順序で行なう。

- ① 局所的な座標を定める。
- ② Real に制限したときの symbol の構成。
- ③ 不変な比をつくること。
- ④ 公式をみらびくこと。

① 局所的な座標を定める。

Λ' のかわりに Λ_0 , Λ のかわりに Λ_2 を用いる。

$\Lambda_0 \cap \Lambda_2 = S$ とする。 $\text{Real} \cap$ の制限を S_R とし、 S_R の generic pt. Λ の nbd U で考える。 $U_R \subseteq U$ の $\text{real} \cap$ の制限とする。
以下単に Λ_0, Λ_2, S と書いても、それは U との intersection のことであるとする。

$$\dim S = n-1 \text{ である。}$$

Λ_0 (resp. Λ_2) 上の holomorphic function φ_0 (resp. φ_2) で、次の条件を満たすものをつくる。

i) φ_0 (resp. φ_2) は S 上 r' 次で消えている。

すなわち $z \in \Lambda_0$ (resp. Λ_2) 上の局所座標として
とき $\frac{\partial r' \varphi_0}{\partial z^\alpha} \Big|_S = 0 \quad (|\alpha| = r' \text{ (resp. } \frac{\partial r' \varphi_2}{\partial z^\alpha} \Big|_S = 0 \text{ } |\alpha| = r'))$

ii) φ_0^{loc} (resp. φ_2^{loc}) を

$$\begin{aligned} \varphi_0(s + \varepsilon t) &= \varepsilon^r \varphi_0^{\text{loc}}(s, t) + O(\varepsilon^r) \\ (\text{resp. } \varphi_2(s + \varepsilon t) &= \varepsilon^r \varphi_2^{\text{loc}}(s, t) + O(\varepsilon^r)) \end{aligned}$$

として $(s, t) \in T_S \Lambda_0$ (resp. $(s, t) \in T_S \Lambda_2$) 上の函数を定義する。 $\mathfrak{g}'$ ($\mathfrak{g}$ の Lie Algebra) は π の normal bundle に作用しているが、 φ_0^{loc} (resp. φ_2^{loc}) は

//

λ (resp. λ') について, r 次式で, c_f' 相対不変である。

$\varphi_0^{\text{loc}}, \varphi_2^{\text{loc}}$ は S' の座標に関する, non zero holomorphic function 倍をのぞいて, unique にきまることは, c_f' 相対不変性よりわかる。($T_S \Lambda_0$ と (resp. $T_S \Lambda_2$ と) trivialize してみればよい。)

$T_S \Lambda_0 \times_S T_S \Lambda_2 \simeq (TS)^4$ と同一視することができる。
したがって, この trivialization によ, $(TS)^4 = \{(p, z, \xi)\}$ と座標をとることができる。ここで, p は S' 上の座標 (つまり $\{z = \xi = 0\} = S'$) で, S' の点 Λ を fix したとき $(TS)^4_\Lambda$ は 2d 次元 symplectic vector space になる, といえる。

$\varphi_0^{\text{loc}}, \varphi_2^{\text{loc}}$ は, $T_S \Lambda_0, T_S \Lambda_2$ 上の函数であるか。

$$(T_S \Lambda_2) \times_S (T_S \Lambda_0) \simeq (TS)^4$$

$\swarrow$
 $T_S \Lambda_2$

$\searrow$
 $T_S \Lambda_0$

を自然, な Projection とし, $\varphi_0^{\text{loc}}, \varphi_2^{\text{loc}}$ は $(TS)^4$ 上
a holomorphic function となる。

$(T, S)^+$ の S' の nbd U' をとる。このとき、次の map ψ が
次の条件を満たすようにとることができる。

$$\left[\begin{array}{l} \psi: T_S \Lambda_2 \times_{S'} T_S \Lambda_0|_{U'} \hookrightarrow V \times V^* = T^*V \\ \psi(S) = S' \quad \psi(T_S \Lambda_0) = \Lambda_0 \quad \psi(T_S \Lambda_2) = \Lambda_2. \\ \text{そしてこの写像で、両方の symplectic structure は} \\ \text{両立する。} \end{array} \right.$$

なぜならば、 $\Lambda_0 = \{x'=0, x''=0\}$ $\Lambda_2 = \{y'=0, x''=0\}$
と symplectic 変換でうつせるから。(ここで symplectic
変換とは、同次正準変換のことである。)

②. Real locus に制限したときの symbol の構成。

標準型での symbol を考えよう。YKF はすべて Real locus
に制限したときの話であるから、 Λ_R, S_R などは、単に Λ
などと書くことにする。今まで使用してきた座標、map
もすべてそのまま real locus に制限して使うものとする。

さて標準型で、 $\Lambda_2 = \{y'=0, x''=0\}$ $\Lambda_0 = \{x'=0, x''=0\}$
をとるとする。 $u = \sum_{i=1}^k C_i |f'(x')|^p \delta(x')$ という超関数のみ
たず、極大過剰決定系 $D_X u \in \sqrt{h} T^*X$ ($X = \{(x_1, x_n)\}$)
にもらあげて考える。あると、その $\sum_X$ module $\mathcal{H}$ の
support は Λ_0, Λ_2 を含む。

$$\Lambda_2 = \bigcup_{i=1}^k \Lambda_2^i \quad \Lambda_0 = \bigcup_{i=1}^k \Lambda_0^i$$

と connected components に分解しているとする。各 Λ_2^i , Λ_2^i は $\pi^*\Sigma$ の support の V_R^i , V_R^{*i} に対応している。connected components である。

$u_i = 2^{\frac{n-k}{2}} |f'(x)|_i^\lambda \delta(x'')$ $i=1, \dots, k$ とし、その asymptotic を求めよう。 $A(s) = (a_{ij}(s))_{1 \leq i, j \leq k}$ とし、

$$\sigma_{\Lambda_2^i}(u_i) = \begin{cases} |f'(x)|_i^\lambda \sqrt{\frac{dx dy}{dx}} & i=i' \\ 0 & i \neq i' \end{cases}$$

$$\sigma_{\Lambda_2^i}(u_i) = |c_i|^\lambda |c_i|^{-\frac{1}{2}} a_{ji}(\lambda) |f^*(y)|_{j'}^{-\lambda - \frac{d}{r}} \sqrt{\frac{dx dy}{dx}} \\ 1 \leq i', j' \leq k$$

これは [/] p. 65 補題 (2.2) による。

(3) 不変な比をつくること。

(G', Y', f') の G' の表現が $Y' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix} \right\}$ の座標を代入して書いたとき

$$q \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix} \mapsto p(q) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix}$$

となる。とすると、この座標を使って相対不変式 $f(x)$ を書いたとき、それは必ず x_1 を含む。単項式 $x_1^{k_1} \dots x_k^{k_k}$

$(k_i \geq 0, \sum_{i=1}^l k_i = r)$ を持つ、 r である。もしなければ regular prehomogeneous vector space である。

$$\{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_l^{k_l} f(x)\} \cdots$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\{x_1\}}_{k_1 \text{ 回}} \underbrace{\{x_2\}}_{k_2 \text{ 回}} \cdots \underbrace{\{x_l\}}_{k_l \text{ 回}} \{x_l f(x)\} \cdots$$

と定義する。

G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ としよう。 $\mathfrak{g}$ は $T_S \Lambda_2$ に作用している。 S の座標を s とすれば、 $T_S \Lambda_2 = \{(s, z_1, \dots, z_l)\}$ と座標をえらんで、 $\mathfrak{g}$ の作用は、

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix} \mapsto \Sigma(p)(g) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix} \quad \Sigma(p) \text{ は } p \text{ の微分表現}$$

となる。

$$\Sigma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k_1! \cdots k_l!} \{z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_l^{k_l} f_1^{loc}\}$$

と $T_S \Lambda_2$ 上の関数を定義する。同様にして、 $\Sigma_2, \dots, \Sigma_l$ も定義することができる。

$T_S \Lambda_0$ にも、同様にして、 $(\xi_1, \dots, \xi_l)$ を $(z_1, \dots, z_l)$ の dual の座標として $\mathfrak{g}$ が反傾表現に作用しているので、(内積は明らかに $\langle \xi, \zeta \rangle = \sum_{i=1}^l \xi_i \zeta_i$ で定義する。) $\zeta_1, \dots, \zeta_l$ を定義することができる。そして今定義した関数で、 l -form ζ_2, ζ_0 を次のように定義する。

$$\zeta_2 = dZ_1 \wedge \cdots \wedge dZ_r / (\det \{Z_i, Z_j\})^{(1-\frac{1}{r})}$$

$$\zeta_0 = dZ_1 \wedge \cdots \wedge dZ_r / (\det \{Z_i, Z_j\})^{(1-\frac{1}{r})}$$

なぜわざわざこのように書きなおした理由は、これは相対不変式のとおりおこなない、同次正準変換で不変な form であるということを示すためである。

ここで、Complex 領域にもどって考える。 Λ_2 と余次元 1 で交わる codimension が Λ_2 より高い Lagrangian $\in \Lambda_1$ とする。そして

$$\text{ord}_{\Lambda_1} f^S - \text{ord}_{\Lambda_2} f^S + \frac{1}{2} = \ell(S) + a + 1$$

となる a とする。ここで $f^S = f_1^{s_1} \cdots f_m^{s_m}$ で $|f|^S = |f_1|^{s_1} \cdots |f_m|^{s_m}$ の hyperfunction のみならず極大過剰決定系 $\mathcal{O}_{\Lambda_1}$ の Complex 領域での generator をあらわしているものとする。 $\ell(S)$ は S にちの一次結合であり、 $\ell(S) = \sum a_i s_i$ と書けたとする。このとき $\alpha_{\Lambda_2}^X(S) = \ell(S) r^{\ell(S)}$ $\alpha_{\Lambda_2}^X(S)$ となることに注意しよう。 χ は 相対不変式 $f^X = f_1^{x_1} \cdots f_m^{x_m}$ に対応する character で、 $\alpha^X(S)$ などその α -函数のことである。詳しくは 佐藤-新谷 [3], などを参照のこと。(あるいは [1] でもよい p. 54)

再び, real にもどって 次の analytic function の比を考えるとこれは, $\varphi_0, \varphi_2, \eta$ のとり方にはよらない比で, 当然, のこるから有限で意味をもつ。これは Λ_2 に制限したとき Λ_2' のみに support をもつ micro-function で, $\mathbb{R}^2$ の solution であるとする。

$$\tau_{\Lambda_2'}(u_i) |\varphi_0|^{\lambda + \frac{\rho}{r}} \exp \frac{\pi}{4} (\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_0}, M) + \tau(\lambda_{\Lambda_0}, \lambda_{\Lambda_2}, M))$$

$$\times \sqrt{\frac{|dx|}{\varphi_*(s_0) \wedge \eta}} \Big|_S$$

$$\cdot \tau_{\Lambda_2'}(u_i) |\varphi_2|^{-\lambda} \exp \frac{\pi}{4} (\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_2}, M)) \left[\left| \frac{\{\varphi_0, \varphi_2\}}{r' e(s) r'^{-1}} \right| \right]^{\lambda + \frac{\rho}{2r}}$$

$$\times \sqrt{\frac{dx}{\varphi_*(s_2) \wedge \eta}} \Big|_S$$

η は S' の volume element.

ここで, λ とは $\text{ord}_{\Lambda_2} f^s - \text{ord}_{\Lambda_0} f^s = r\lambda + \beta$ 。 $\tau \in \mathbb{R}^2$ 。
 $-\text{ord}(\text{原点の normal}) f^{s'} = r s' + \beta$ 。として決まる。(計算してみればわかるが, じつは, $\lambda = e(s) + (1 \text{ である})$ 。そしてこの比の右側の [] 内にある分母の $e(s)$ というのは,

$$S_i = \langle A_i x, y \rangle / \sum x_j(A_j) \quad \delta x_i(A_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

$$A_i \in \sigma_j$$

で定義された。 $W = \{(\lambda, \text{grad log } |f(\alpha)|^2); S \in \mathbb{R}, f(\alpha) \neq 0\}$

上の函数である。

この比が $\varphi_0, \varphi_2, \eta$ のとり方によらぬことを示そう。
 φ_2 は $\mathcal{S}$ 上の non zero analytic function 存在する。
 いてきまる。したがって $\varphi_2' = f \varphi_2$ $f \in C_S, f \neq 0$
 とする。 $\varphi_2' = f \varphi_2 + \varphi_2''$ (φ_2'' は $\mathcal{S}$ 上 normal
 方向の微分で $\eta+1$ 次以上消えている) と書くことができる。
 したがって $\varphi_2' = f \varphi_2 (1 + \varphi_2'')$ (φ_2'' は $\mathcal{S} \neq 0$) と書き直すこ
 とができる。 φ_2 のかわりに φ_2' を代入しても其の右側は $f^{-\lambda}$
 $\times f^{\lambda + \frac{\eta}{2\pi}} f^{-\frac{\eta}{2\pi}}$ 倍されて結局比の値は変わらない。 φ_0 に
 ついても同様。 η によらないことは明らかであろう。

次に標準型の場合に直してこの比を計算してみよう。 Λ_2
 $= \{y'=0, x''=0\}$ $\Lambda_0 = \{x'=0, x''=0\}$ 。 (x, y) と (x', y') を
 同じ空間の同じ座標とみることができる。 P の symbol
 を P の比に代入し $\varphi_0 = f^*(y)$ $\varphi_2' = f(x')$ とおくと
 次のようになる。 Maslov index の影響はこのとき消えて
 いる。

$$W_2' = \begin{cases} (\langle A'x', D_{x'} \rangle - s' \sum x(A')) u = 0 \\ x_{k+1} u = \dots = x_n u = 0 \end{cases} \quad A' \in \mathcal{G}'$$

と書くことができる。

$$W_1 = \{ (x', s' \text{grad log } f(x')), s' \in \mathbb{R}, f'(x') \neq 0 \}$$

$$e(S) = S' = \langle x', y' \rangle / r' \quad f_1 = f^*(y') \quad f_2 = f(x')$$

$$\eta = dy_{i+1} \wedge dy_{i+2} \cdots \wedge dy_n = dy''$$

と書くことも出来る。ただし

$$|c_0|^\lambda |c_1|^{\frac{1}{2}} a_{j,i}(\Omega) |f^*(y')|^{-\lambda - \frac{\ell}{r'}} \sqrt{\frac{|dy|}{|dx|}} |f^*(y')|^{\lambda + \frac{\ell}{r'}} \\ \sqrt{\frac{|dx|}{|dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_\ell \wedge \eta|}} \Big|_S$$

$$\therefore |f'(x')|^\lambda \sqrt{\frac{dx' dy''}{dx}} |f'(x')|^{-\lambda} \left[\frac{\{f'(x'), f^*(y')\}}{r' \left(\frac{\langle x', y' \rangle}{r'} \right) r'} \right]^{\lambda + \frac{\ell}{2r'}} \\ \sqrt{\frac{|dx|}{|dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_\ell \wedge \eta|}} \Big|_S$$

$$= |c_0|^\lambda |c_1|^{\frac{1}{2}} a_{j,i}(\Omega) : \left[\frac{\{f'(x'), f^*(y')\}}{r' \left(\frac{\langle x', y' \rangle}{r'} \right) r'} \right]^{\lambda + \frac{\ell}{2r'}} \dots (1)$$

$\pi' \in W_1$ から $\Lambda_2 \wedge$ の projection map とし

$$\begin{cases} f'(x') = f'_0 \pi' |_{\Lambda_2} \\ f'^{-1}(y') = c_0^{-1} \frac{f'_0 \pi'}{s' r'} |_{\Lambda_0} \end{cases}$$

と仮定する。これによつて $f^*(y') f'(x') \in W$ 上に落ちる。

延長するにこれができ、これで $\frac{\{f'(x'), f^*(y')\}}{r' s' r'^{-1}} \Big|_S$ を計算する。

これはよい。すると

$$\{c_0 f'^{-1}(y') s' r', f^*(y')\} / r' s' r'^{-1} \Big|_S$$

$$= \frac{C_0' r' s'^{r'-1} f^{*-1}(y) \{s'^{r'}, f^*(y)\}}{r' s'^{r'-1}} \Big|_{s'} = C_0'$$

すなわち

$$\begin{aligned} (1) &= |C_0'|^\lambda |C_1'|^{\frac{1}{2}} a_{j_1}(\lambda) : |C_0'|^{\lambda + \frac{\ell}{2r'}} \\ &= |C_1'|^{\frac{1}{2}} a_{j_1}(\lambda) : |C_0'|^{\lambda + \frac{\ell}{2r'}} \\ &= |C_0'|^{-\frac{\ell}{2r'}} |C_1'|^{\frac{1}{2}} a_{j_1}(\lambda) : 1 \dots \dots (2). \end{aligned}$$

次に $\mathcal{W}$ の Λ_0, Λ_2 における micro function u_{Λ_2}
 u_{Λ_0} が

$$\sigma_{\Lambda_2}(u_{\Lambda_2}) = f_{\Lambda_2}^S \sqrt{\omega_{\Lambda_2}} / \sqrt{dx}$$

$$\sigma_{\Lambda_0}(u_{\Lambda_0}) = f_{\Lambda_0}^S \sqrt{\omega_{\Lambda_0}} / \sqrt{dx}$$

と取るものとして、 $u_{\Lambda_0}, u_{\Lambda_2}$ を base としてとき $C_2^i : C_0^j$
 が、"く"であらば、 $C_2^i u_{\Lambda_2}$ と $C_0^j u_{\Lambda_0}$ が "と"をつぎの $\mathcal{W}$
 の解としてつるが"のかを求めよう。ここで、 $\mathcal{W}$ の support
 の good Lagrangian Λ_i ([1] p48). に対しては、
 $f_{\Lambda_i}^\pi = f^\pi \circ \pi / a_{\Lambda_i}^\pi(s)$ と定義している。 π はもちろん W
 から V への projection map である。 $f_0 = (f_{\Lambda_0}^\pi)^{-\frac{1}{2\omega}}|_{\Lambda_0}$
 $f_2 = (f_{\Lambda_2}^\pi)^{\frac{1}{2\omega}}|_{\Lambda_2}$ ととることにができる。 $a_{\Lambda_0}^\pi(s) =$
 $e(s)^{r'} e(x) a_{\Lambda_2}^\pi(s)$ と書けることに注意して (P.16).

$$\{ \varphi_0, \varphi_2 \} \Big|_S$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ e(s)^{r'} (f^x / a_{A_2}^x(s))^{-\frac{1}{e(x)}}, (f^x / a_{A_2}^x(s))^{\frac{1}{e(x)}} \right\} \Big|_S \\
&= (f^x / a_{A_2}^x(s))^{-\frac{1}{e(x)}} \left\{ e(s)^{r'}, (f^x / a_{A_2}^x(s))^{\frac{1}{e(x)}} \right\} \Big|_S \\
&= r' e(s) (f^x / a_{A_2}^x(s))^{-\frac{1}{e(x)}} \left\{ e(s), (f^x / a_{A_2}^x(s))^{\frac{1}{e(x)}} \right\} \Big|_S.
\end{aligned}$$

$e(s) = \sum_{i=1}^m a_i s_i$ とする、ことに注意しつつ、

$$\begin{aligned}
&\left\{ e(s), (f^x / a_{A_2}^x(s))^{\frac{1}{e(x)}} \right\} \Big|_S \\
&= \left(\frac{1}{a_{A_2}^x(s)} \right)^{\frac{1}{e(x)}} \left\{ e(s), (f^x)^{\frac{1}{e(x)}} \right\} \Big|_S \\
&= \left(\frac{1}{a_{A_2}^x(s)} \right)^{\frac{1}{e(x)}} \sum_{i=1}^m a_i \left\{ s_i, f^x \right\}^{\frac{1}{e(x)}} (f^x)^{\frac{1}{e(x)}-1} \\
&= \sum_{i=1}^m a_i \left\{ \frac{\langle A_i, x, y \rangle}{\delta x_i(A_i)} f^x \right\}^{\frac{1}{e(x)}} (f^x)^{-1} (f^x / a_{A_2}^x(s))^{\frac{1}{e(x)}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^m a_i h_i f^x \right) \left(\frac{1}{e(x) f^x} \right) (f^x / a_{A_2}^x(s))^{\frac{1}{e(x)}}
\end{aligned}$$

したがって、 $\left\{ \varphi_0, \varphi_2 \right\} \Big|_S = r' e(s)$ としてこの値が φ_0, φ_2 の W 上への延長のしかたによらぬことは、ホアリニブラーの性質より明らかである。そこで

$$\int_{\Lambda_0}^S \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_0}}{dx}} \left((f_{\Lambda_0}^x)^{-\frac{1}{e(x)}} \right)^{(e(s)+a)+\frac{2}{r}} \sqrt{\frac{dx}{\psi_*(\xi_0) \wedge \eta}} \Big|_S$$

$$: f_{A_2}^S \sqrt{\frac{\omega_{A_2}}{dx}} \left((f_{A_2}^x)^{\frac{1}{e(x)}} \right)^{-e(s)-a} \sqrt{\frac{dx}{\psi_*(s_2)\wedge\eta}} \Big|_S$$

の比を求めよう。 $\varphi_0 = (f_{A_2}^x)^{-\frac{1}{e(x)}}$ $\varphi_2 = (f_{A_2}^x)^{\frac{1}{e(x)}}$ であ
 るから、 $f_{A_0}^S = f_{A_2}^{xS} = ((\varphi_0)^{-e(x)})^S = \varphi_0^{-e(s)}$ 、 $f_{A_2}^S =$
 $f_{A_2}^{xS} = ((\varphi_2)^{e(x)})^S = \varphi_2^{e(s)}$ 。

右の両者の比は、

$$\sqrt{\omega_{A_0}} (\varphi_0)^{a+\frac{p}{r}} \sqrt{\frac{dx}{\psi_*(s_0)\wedge\eta}} \Big|_S : \sqrt{\omega_{A_2}} (\varphi_2)^{-a} \sqrt{\frac{dx}{\psi_*(s_2)\wedge\eta}} \Big|_S$$

これは正則関数の絶対値の比であるから、2乗してくらべ
 てよい。また、 ψ^{-1} で、 $T_S A_2 \times_S T_S A_0$ 上に引きもどして考え
 ておしつかえないう。このとき、 ψ は symplectic (contact)
 structure を保存していることとこの空間 $(T_S A_2 \times_S T_S A_0)$
 には環 $\mathcal{O}'$ が作用してそれはもとの空間における $\mathcal{O}$ の作用で
 S' 上の点を fix してゐる作用であることに注意する。 $\mathcal{O}$ orbit
 $\widetilde{W}$ は $T_S A_2 \times_S T_S A_0$ 上では $\mathcal{O}'$ orbit $\widetilde{W}$ とは

$$\begin{aligned} \widetilde{W} &= \overline{\{(x, s' \operatorname{grad} \log \varphi_2(x)) ; s' \in \mathbb{R}, x \in T_S A_2, \varphi_2(x) \neq 0\}} \\ &= \overline{\{(s' \operatorname{grad} \log \varphi_0(s), s) ; s' \in \mathbb{R}, s \in T_S A_0, \varphi_0(s) \neq 0\}} \end{aligned}$$

ととる：とができて $\widetilde{W}$ 上の函数 S' は、 $S'=0$ によつて good
 Lagrangian の近傍で、 $\operatorname{supp}(\mathcal{W})$ を定義する函数で、
 $S' = \langle x, s \rangle / r'$ とおくことが出来る、これは $\mathcal{W}$ の方程

式の generator で、 $\langle A'x', D'x' \rangle = \delta X(A')$ の $A' \in \mathcal{O}' \in A'$
 $= I_{\mathbb{R}}$ とおくことにより得られる。

さて先ほどの比において $\mathcal{S}$ 上 normal 方向に $(r+1)$ 次以
 上で消える項は $(\varphi_0, \varphi_{2n})$ 比には影響しないので、以下
 $T_5 \Lambda_2 \times_5 T_5 \Lambda_0$ 上で $\varphi_0^{loc} \varphi_2^{loc} \in \varphi_0, \varphi_{2n}$ かかりに
 と、議論する。 $T_5 \Lambda_2 \times_5 T_5 \Lambda_0 = \{(P, z_1, \dots, z_L, \xi_1, \dots, \xi_L)\}$
 として、 P は $\mathcal{S}$ 上の座標である。

φ_0^{loc} は $\mathcal{S}$ 上の non zero analytic fcn $d(P)$ とお
 くと、 $\varphi_2 = d(P) f'(z)$ とおくと φ_2 が定まる。また $\tilde{\pi}$
 $: \tilde{W} \rightarrow T_5 \Lambda_2$ は Projection map とし $\varphi_0^{-1} = \varphi_2 \circ \tilde{\pi} / s' r' |_{T_5 \Lambda_0}$
 とおくことが定まる。これは $f^X_{\Lambda_0} = f^X_{\Lambda_2} / (s' r' |_{T_5 \Lambda_0})$ であ
 ることより互いにわかる。そしてまた $T_5 \Lambda_0$ への $\mathcal{O}'$ の
 作用 (正確には Hamilton vector 場の無限小作用) による相
 対不変式となるので、 φ_0^{loc} は $\varphi_0' = f^*(\xi)$ の constant
 倍である。したがって $\varphi_0 = C \varphi_0'$ として

$$\begin{aligned} \varphi_0^{-1} &= \varphi_2 \circ \tilde{\pi} / s' r' |_{T_5 \Lambda_0} = d(P) \frac{f'(s' \text{grad log } f^*(\xi))}{s' r'} \\ &= C^{-1} f'^*(\xi). \end{aligned}$$

$$| \text{したがって} \quad C^{-1} d(P)^{-1} = f'^*(\xi) f'(s' \text{grad log } f^*(\xi)) = C_0$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = C_0^{-1} d(P)^{-1} \varphi_0' = C_0^{-1} d(P)^{-1} f'^*(z) \\ \varphi_2 = f'(z) d(P) \end{cases}$$

と比を代入しよう。

$$\begin{aligned}
 & \omega_{\Lambda_0} (c_0^{-1} d(p)^{-1})^{-2(a+\frac{\ell}{2r'})} |\psi_0'|^{2(a+\frac{\ell}{r'})} (dz_1 \wedge \dots \wedge dz_\ell \wedge \eta)^{-1} \Big|_S \\
 & : \omega_{\Lambda_2} (d(p) f'(z))^{-2a} (d(p))^{\frac{\ell}{2r'}} (dz_1 \wedge \dots \wedge dz_\ell \wedge \eta)^{-1} \Big|_S \\
 & = \omega_{\Lambda_0} (c_0)^{-2(a+\frac{\ell}{2r'})} |f^*(\xi)|^{2(a+\frac{\ell}{r'})} (dz_1 \wedge \dots \wedge dz_\ell \wedge \eta)^{-1} \Big|_S \\
 & : \omega_{\Lambda_2} |f'(z)|^{-2a} (dz_1 \wedge \dots \wedge dz_\ell \wedge \eta)^{-1} \Big|_S
 \end{aligned}$$

$$\exists c \quad |\omega_{\Lambda_2}| |f'(z)|^{-2a} = \text{const} \, dz_1 \wedge \dots \wedge dz_\ell \wedge \eta$$

$$|\omega_{\Lambda_0}| |f^*(\xi)|^{2(a+\frac{\ell}{r'})} = \text{const} \, dz_1 \wedge \dots \wedge dz_\ell \wedge \eta.$$

と書ける。なぜなら左辺は、 η' 相対不変であるから。そして両方の constant terms は

$$|\omega_{\Lambda_0}| = \frac{\pi_*(|\omega_{\Lambda_2}|) \wedge ds'}{c(s')} / ds'$$

によ、て関連してゐる。ここで、 $c(s')$ とは Λ_0 と Λ_2 の間の c 函数の factor で、 $(s')^{r'a+\beta}$ である。

$\tilde{c}$ とある constant として

$$|\omega_{\Lambda_0}| = \frac{\pi_*(|\omega_{\Lambda_2}|) \wedge ds'}{c(s')} / ds' \Big|_{\Lambda_0}$$

$$|\omega_{\Lambda_2}| = \tilde{c} |f'(z)|^{2a} |dz_1 \wedge \dots \wedge dz_\ell \wedge \eta|$$

と仮定する。

すると

$$\begin{aligned}
 & |f^{*'}(\xi)|^{2(a+\frac{\ell}{r'})} |\omega_{\Lambda_0}| \\
 &= |f^{*'}(\xi)|^{2(a+\frac{\ell}{r'})} \frac{\pi_*(|\omega_{\Lambda_2}|) \wedge ds'}{c(s')} / ds' \Big|_{T_S \Lambda_0} \\
 &= \tilde{c} |f^{*'}(\xi)|^{2a} |f(s' \text{ grad } \log f^{*'}(\xi))|^{2a} |f^{*'}(\xi)|^{\frac{2\ell}{r'}} |H_{\omega}(s' \log f^{*'}(\xi))| \\
 &\quad \times \frac{d\xi \wedge \eta \wedge ds'}{c(s')} / ds' \Big|_{T_S \Lambda_0} \\
 &= \tilde{c} |c_0|^{2a} |c_1| d\xi \wedge \eta
 \end{aligned}$$

したがって P.21 の比は $\tilde{c} |c'_0|^{-\frac{\ell}{r'}} |c'_1| : \tilde{c} = |c'_0|^{-\frac{\ell}{r'}} |c'_1|$ である (P.22 で 2 乗しているから).

P.20, P.17 にらみあわせて

$$\begin{aligned}
 & C_0^{j'} \exp \frac{\pi}{4} (\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_0}, \mu) + \tau(\lambda_{\Lambda_0}, \lambda_{\Lambda_2}, \mu)) : C_2^i \exp \left(\frac{\pi}{4} \tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_2}, \mu) \right) \\
 &= a_{j',i}(\lambda) : 1
 \end{aligned}$$

あとは [1] に準じて「方法で」 Maslov index の計算をすれば、結局 Theorem の公式が明らかになる。

(q. e. d.).

§2 1列 $(SL(3) \times SL(3) \times GL(2))$ □ ⊗ □ ⊗ □

1 我々は §1 において導いた定理も、二次型式以外の Prehomogeneous vector space に対して適用することを考える。すでに [4] において 二次型式のあらわれの場合を扱い、
 も、とも、基本的な Prehomogeneous vector space の系列についての Fourier 変換の問題は (explicit formula を求めるという意味においては) 完全に解決された。我々が今度扱おうとしているのは、表題に挙げたものを含めて、4 つの prehomogeneous vector space を含む系列のひとつである。それらの特徴は、binary cubic forms の discriminant のおける極大過剰決定量と、その holonomy diagram に含んでいるということである。

まず、Prehomogeneous vector space $(GL(2), \text{III})$ を考えよう。この real form は $(GL(2, \mathbb{R}), \text{III})$ のみであり 作用は次のようになる。

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2) \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad \begin{pmatrix} u^3 \\ uv^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

$$\lambda_1 u^3 + \lambda_2 u^2 v + \lambda_3 u v^2 + \lambda_4 v^3 \quad \text{に対して}$$

$$\lambda_1 u^3 + \lambda_2 u^2 v + \lambda_3 u v^2 + \lambda_4 v^3 = \rho_1^3(\lambda) u^3 + \rho_2^3(\lambda) u^2 v + \rho_3^3(\lambda) u v^2 + \rho_4^3(\lambda) v^3 \quad \text{として。}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \xrightarrow{P^3} (p_1^3(x), p_2^3(x), p_3^3(x), p_4^3(x))$$

を g の作用とすると、この作用に対する相対不変式は、

$$P(x) = x_2^2 x_3^2 + 18 x_1 x_2 x_3 x_4 - 4 x_1 x_3^3 - 4 x_2^3 x_4 - 27 x_1^2 x_4^2$$

である。これは u, v についての binary cubic form の discriminant である。具体的に Lie 群の作用を書けば、

$$(g \cdot x)' = \begin{bmatrix} a^3 & a^2 b & a b^2 & b^3 \\ 3 a^2 c & a^2 d + 2 a b c & 2 a b d + c b^2 & 3 b^2 d \\ 3 a c^2 & 2 a c d + c^2 b & a d^2 + 2 b c d & 3 b d^2 \\ c^3 & c^2 d & c d^2 & d^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

である。

$\langle x, y \rangle = x_4 y_1 - \frac{1}{3} x_3 y_2 + \frac{1}{3} x_2 y_3 - x_1 y_4$ と内積をとるとき、この内積による反傾表現によ、て $g^L = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} g^{-1} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ とおいたとき、 $y \mapsto (g^L \cdot y)'$ という表現になり、これも全く同じ $P(y) = y_2^2 y_3^2 + 18 y_1 y_2 y_3 y_4 - 4 y_1 y_3^3 - 4 y_2^3 y_4 - 27 y_1^2 y_4^2$ の相対不変式をもつ。

$$|P|_1^S(x) = \begin{cases} P^S(x) & P(x) > 0 \\ 0 & P(x) < 0 \end{cases}$$

$$|P|_2^S(x) = \begin{cases} (-P(x))^S & P(x) < 0 \\ 0 & P(x) > 0 \end{cases}$$

と定義したとき

= $\mathcal{M}$ の Fourier 変換は、おこに Sinterni [5] によ、計算
算せられている。おなめら。

$$\int \left[\frac{|P|_1^s(x)}{|P|_2^s(x)} \right] \exp \sqrt{-1} \langle x, y \rangle dx = \Gamma(s + \frac{5}{6}) \Gamma(s+1)^2 \Gamma(s + \frac{7}{6}) 2^{4(s+1)} \\ \times 3^{6(s+1)} \times \frac{1}{18} \begin{pmatrix} \sin 2\pi s, & -\sin \pi s \\ -3 \sin \pi s, & \sin 2\pi s \end{pmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} |P|_1^{-s-1}(y) \\ |P|_2^{-s-1}(y) \end{bmatrix} \quad ([5] \text{ p. 164})$$

$$-\bar{J}. |C_0|^s = (3^3 \cdot 2^2)^s \quad \sqrt{|C_1|} = 3^3 \cdot 2^2. \quad \therefore \mathcal{M} \text{ 上 } \mathcal{A} \text{ として}$$

$$\left[\frac{|P|_1^s(y)}{|P|_2^s(y)} \right] = \int (2\pi)^{-\frac{s}{2}} (3^6 \cdot 2^4)^s (3^3 \cdot 2^2) \left(\frac{1}{3 \cdot 2 \pi^2} \right) \Gamma(s + \frac{5}{6}) \Gamma(s+1)^2 \Gamma(s + \frac{7}{6}) \\ \times \begin{pmatrix} \sin 2\pi s, & -\sin \pi s \\ -3 \sin \pi s, & \sin 2\pi s \end{pmatrix} |P|^{-s-1} \exp \sqrt{-1} \langle x, y \rangle dx$$

となり。同件数のつながりの公式は。

$${}^t A(s) = \left(\frac{1}{6\pi^2} \right) \Gamma(s + \frac{5}{6}) \Gamma(s+1)^2 \Gamma(s + \frac{7}{6}) \\ \times \begin{pmatrix} \sin 2\pi s, & -\sin \pi s \\ -3 \sin \pi s, & \sin 2\pi s \end{pmatrix}$$

で与えられる。

2. 次に $GL(3) \times GL(3) \times GL(2)$ の Prehomogeneous vector

space について。これについては、その相対不変式のみならず極大過剰決定系の holonomy diagram と詳しく記述したものが [6] にある。これは、昨年の研究集会で、共同計算をしたものに山口次郎氏が、多大の努力を払って整理執筆されたものである。以下それにならって、相対不変式などを書いておこう。

$$g = (A, B, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \in G = SL(2) \times SL(3) \times GL(2)$$

に對して、

$$V \ni (X_1, X_2) \xrightarrow{g} (A(aX_1 + bX_2)B^{-1}, A(cX_1 + dX_2)B^{-1})$$

が群の作用である。相対不変式は、

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{bmatrix}$$

とおくとき、

$$f(X_1, X_2) = P_1^2 P_2^2 + 18 P_0 P_1 P_2 P_3 - 4 P_0 P_2^3 - 4 P_1^3 P_3 - 27 P_0^2 P_3^2.$$

ここで

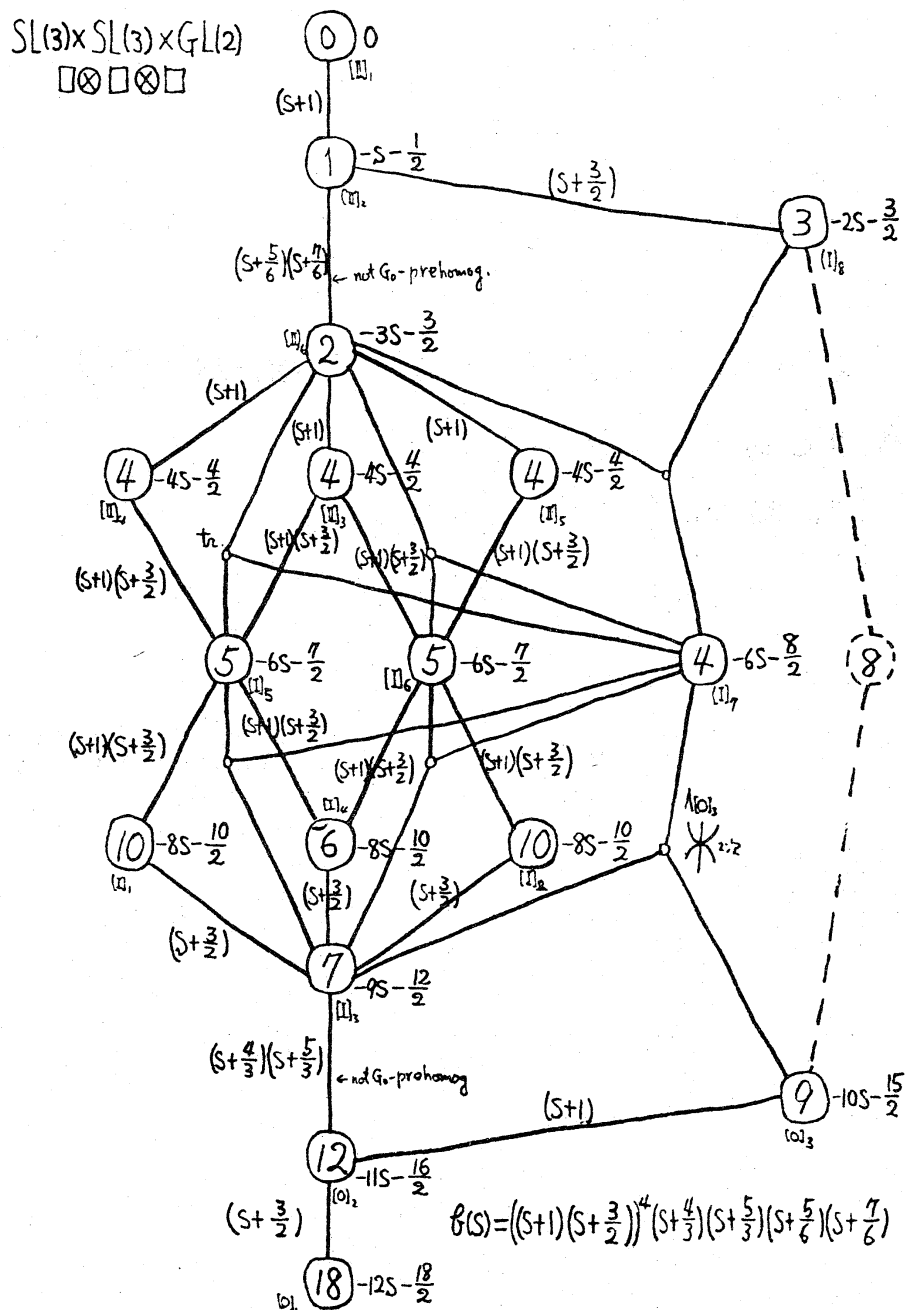
$$P_0 = \det \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \det \begin{bmatrix} x'_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x'_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x'_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x_{11} & x'_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x'_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x'_{32} & x_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x'_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x'_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x'_{33} \end{bmatrix}$$

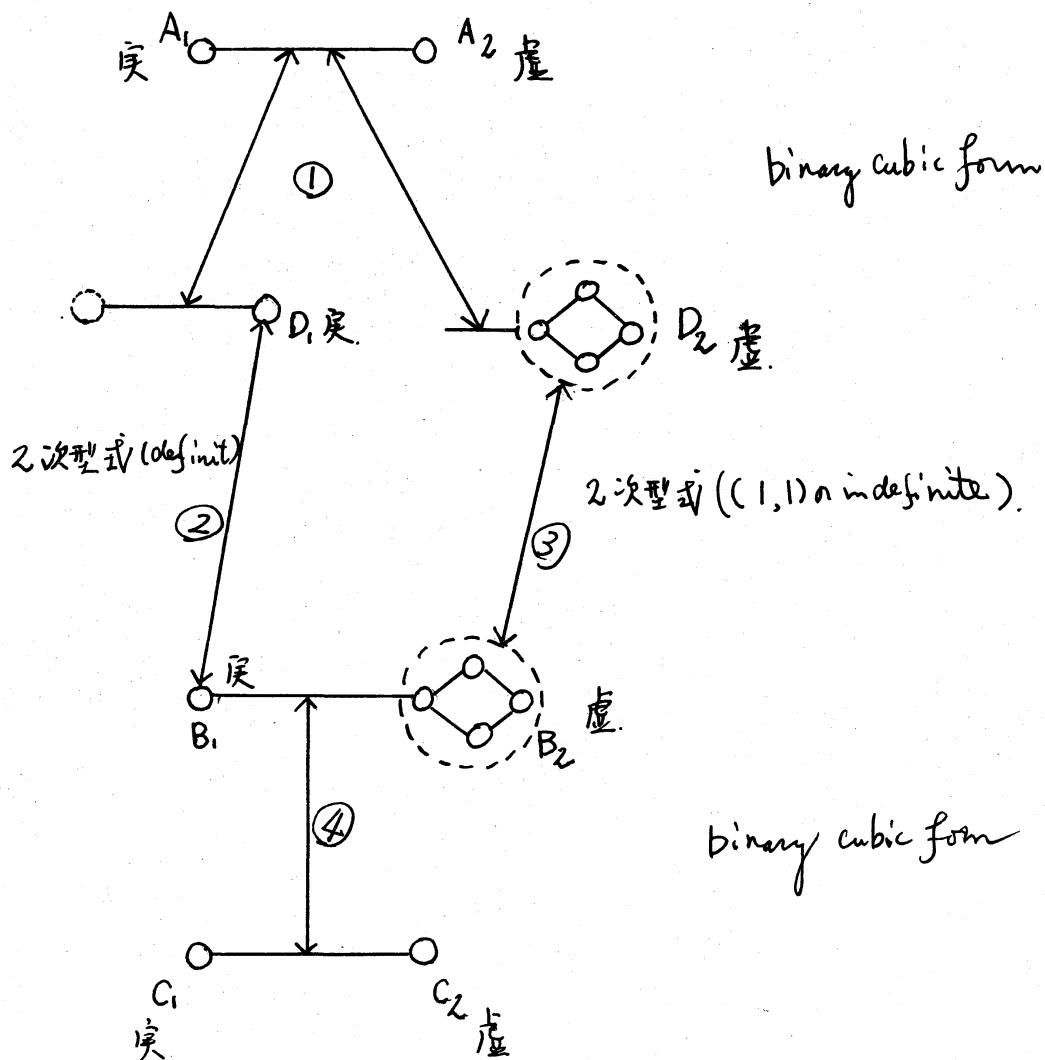
$$P_2 = \det \begin{bmatrix} x_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x'_{11} & x_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x_{32} & x'_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \det \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{bmatrix}$$

これ holonomy diagram は次のようになる。



3 我々の必要とする. 原点, の *conormal* 型での. (*gerosection* の) 同伴数のつながりを示す行列を求めるために我々は次の *Lagrangian* と 極大过剩決定系を使う. 原点, の *conormal* 及び, *gerosection* の. *Lagrangian* の *real locus* への制限によ, て. それらは二個に分かれる. 証明は省くが. 結局次のようにな, ていることがわかる.



①②③④における、同伴数の関係とあらわす。行列などは次のようである。ここで、 holonomy diagram において、実とか虚とか書いた意味は、次のとおりである。すなわち、 D_1 実、 D_2 虚というのは、①の交わりで局所化した、極大過剰決定系は、binary cubic form の discriminant であるものであるが、その際、 D_1, D_2 は、いわば、反傾表現における作用の二つの orbit により、 D_1 は、discriminant が正になる orbit、 D_2 は、負になる orbit で、これによりそのあらわす binary cubic form が、実根を二つつか、一実根と二虚根をもつかに分かれる。 B_1 実、 B_2 虚についても同様である。

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \text{ は}$$

$$\left(\frac{1}{6\pi^2} \right) \Gamma(s + \frac{5}{6}) \Gamma(s+1)^2 \Gamma(s + \frac{7}{6}) \begin{pmatrix} \sin 2\pi s, -3 \sin \pi s \\ -\sin \pi s, \sin 2\pi s \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} D_1 \rightarrow B_1 \text{ は}$$

$$\Gamma(2s+2)^2 \int_0^1 \sin \pi(1+t) \cos \pi(1+t) / \pi.$$

$$\textcircled{3} D_2 \rightarrow B_2 \text{ は}$$

$$\Gamma(2s+2)^2 \int_0^1 \cos^2 \pi(1+t) / \pi.$$

$$\textcircled{4} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad \text{is}$$

$$\left(\frac{1}{6\pi^2}\right) \Gamma\left(s+\frac{p}{6}\right) \Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)^2 \Gamma\left(s+\frac{17}{6}\right) \begin{pmatrix} \sin 2\pi\left(s+\frac{1}{2}\right), -3\sin\pi\left(s+\frac{1}{2}\right) \\ -\sin\pi\left(s+\frac{1}{2}\right), \sin 2\pi\left(s+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Maslov index の 影響 は、どのようになりにおくことも無い。

したがって、 $\tau = \tau'$: $\forall \varepsilon$ がけあわせると。

$$A(s) = \left(\frac{1}{6\pi^2}\right)^2 \left(\frac{2}{\pi}\right) \Gamma\left(s+\frac{5}{6}\right) \Gamma(s+1)^2 \Gamma\left(s+\frac{7}{6}\right) \Gamma\left(s+\frac{8}{6}\right) \Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)^2 \Gamma\left(s+\frac{17}{6}\right) \\ \times \Gamma(2s+2)^2$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi s) \sin(\pi s) (3\cos^2\pi s - \sin^2(2\pi s)), 3\sin(2\pi s) \cos(\pi s) (\sin^2\pi s - \cos^2\pi s) \\ 0, (\cos^2\pi s) (3\sin^2\pi s - \sin^2(2\pi s)) \end{pmatrix}$$

となることがわかる。これが求めるべき結果である、 $\tau = //$

$A(s)$ に関しては、P.29. の $f(x, x_2)$ の Fourier 変換は、

$$\begin{bmatrix} |f|_1^s(x) \\ |f|_2^s(x) \end{bmatrix} = (2\pi)^{-9} |C_0|^s \sqrt{|C_1|} \, tA(s) \begin{bmatrix} \int |f|_1^{-s-\frac{3}{2}}(y) \exp \sqrt{t} \langle x, y \rangle \, dy \\ \int |f|_2^{-s-\frac{3}{2}}(y) \exp \sqrt{t} \langle x, y \rangle \, dy \end{bmatrix}$$

としてあらわされる。ただし $C_0 = 3^4 \cdot 2^{12}$ $C_1 = 3^{13} \cdot 2^{18}$

であり、 $|f|_1^s(x)$ は $f > 0$ と 3 に support をもつ函数 $|f|_2^s(x)$ は $f < 0$ なる 3 に support をもつものである。

- [1] 柏原-三輪 *Micro-local calculus* と 概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換.
 数研講究録 238 P 60 ~ P 147
- [2] 佐藤-柏原-三輪-空 *Imaginary Lagrangian* のあらわれる Fourier 変換について.
 数研講究録 248 P 212 - P 260
- [3] 佐藤-新谷 概均質ベクトル空間の理論.
 数学の歩み 15-1 P 85 ~ P 157
- [4] 空 *Prehomogeneous vector space* の相対不変式の Fourier 変換について (I).
 数研講究録 "代数解析学の諸問題" に発表予定
- [5] T. Sintani On Dirichlet series whose coefficients are class number of integral binary cubic forms. Jour. Math. Soc of Japan. Vol 24. No. 1 (1972) PP. 132 - 188.
- [6] 関口 既約な概均質ベクトル空間の 1 例について.
 数研講究録 238. P 148 ~ P 183.