

2種類 of C^* -環の包含について

山形大 佐野隆志 (Takashi SANO)

Department of Mathematical Sciences,

Faculty of Science, Yamagata University

本講演では, 浜地-幸崎による「Orbital Factor Maps」の,
 C^* -環の指数理論としての考察を紹介する。

X をコンパクト距離空間, G を X 上 homeo に作用する可算
離散群. G により定まる X 上の同値関係を $\mathcal{R}$ とする. この $\mathcal{R}$
を topological groupoid とみる. Σ を the reduced groupoid
 C^* -環 $C_{\text{red}}^*(\mathcal{R})$ を考える. (これは,

$A_0 := C_c(G) = \{ f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{cont. \& cpt supported} \}$
の適当な ℓ^2 -表現による完備化である.)

また, $\mathcal{S}$ を $\mathcal{R}$ の (clopen) subrelation と,

$\exists \{ \varphi_1, \dots, \varphi_n \} \quad (\varphi_1 \equiv \text{id}) \subseteq \text{Homeo}(X)$

なる choice functions : $\mathcal{R}(x) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{S}(\varphi_i x) \quad (x \in X)$
disjoint

が, とれるものとする。

このとき,

$$B_0 := \{ f \in A_0 \mid \text{supp } f \subseteq S \}$$

$$E_0(f)(x, y) := \chi_S(x, y) f(x, y) \quad (f \in A_0)$$

$$P_i := \{ (\varphi_i x, x) \mid x \in X \} \quad \text{とおく.}$$

Prop. $A_0 \cong B_0$ に對し, $\{ \chi_{P_i}^*, \chi_{P_i} \}$ は E_0 の quasi-basis である. $A = C_{\text{red}}^*(\mathcal{X}) = A_0^{-\|\cdot\|} \cong B := B_0^{-\|\cdot\|}$ ($\cong C_{\text{red}}^*(S)$) に對しても同様.

次に, skew product extension : $X = Y \times \{1, 2, \dots, n\}$

$\xrightarrow{\pi} Y$ におく. ある G_n -値 conti. cocycle σ on $\mathcal{X}_Y$

を. $x = (y, i), x' = (y', j) \in X$ に對し

$$x \sim_{\mathcal{X}_X} x' \iff \begin{matrix} y \sim_{\mathcal{X}_Y} y' \\ \text{and} \end{matrix} \sigma(y', y)(i) = j$$

なるものを考える. このとき,

$$\begin{aligned} A_0 &= C_c(\mathcal{S}_X) \\ &\cong B_0 := \left\{ f \in C_c(\mathcal{S}_X) \mid \begin{array}{l} \exists \hat{f} \in C_c(\mathcal{X}_Y) \text{ s.t.} \\ f(x, y) = \hat{f}(\pi(x), \pi(y)) \\ (x, y) \in \mathcal{S}_X \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$E_0(f)(x, y) := \frac{1}{n} \sum_{\substack{\pi(x) = \pi(x') \\ \pi(y) = \pi(y') \\ x' \sim_{\mathcal{S}_X} y'}} f(x', y')$$

$$P_i := X \times \{i\}$$

に對し,

Prop. $A_0 \cong B_0$ に $\lambda \neq 1$. $\{X_{P_i}^*, X_{P_i}\}$ は E_0 の quasi-basis .

このような skew product となる extension. 例としては covering map から得られる 包含 について も 同様のことが言える。

(例) $Y = \mathbb{T}$ 上の さまざまな 2:1 extensions は,

次のような 包含 を 産む:

$$A_0 \oplus A_0 \cong A_0, \quad A_0 \cong A_{20}, \quad A_{0+\frac{1}{2}} \cong A_{20}$$

などである。

Basic extensions に関する 事柄 については 別の機会に述べよう。

Remark. G が $\dot{G}$ groupoid のとき, $C^*(G^0)$ は

$C^*(G, \sigma)$ の Cartan になる。また, C が A の Cartan であり, このような形 であることが知られている, ([K])

Prop. $A \cong B$ が common Cartan C をもっている。

$\exists G \cong H$ groupoid, $\exists \sigma: 2\text{-cocycle}$ s.t.

$$A \cong B \cong C \cong C^*(G, \sigma) \cong C^*(H, \sigma) \cong C^*(G^0)$$

References

- [R] J. Renault, A groupoid approach to C^* -algebras
Lect. Notes in Math. 793, Springer-Verlag, 1980
- [HK] T. Hamachi and H. Kosaki, Orbital factor maps,
Ergod. Th. and Dynam. Sys., 13 (1993), 33-55