

参 考 文 献

- 1) E.N. Parker, *Astrophys. J.* 180 (1973), 247.
- 2) E.N. Parker, *J. Geophys. Res.* 62 (1957), 509 ; *Astrophys. J. Suppl.* 8 (1963), No. 77.
- 3) H. P. Furth, J. Killeen, and M. N. Rosenbluth, *Phys.* 6 (1963), 459.
- 4) S. M. Hamberger and J. Janárik, *Phys. Fluids* 15 (1972), 825.
- 5) D. Bohm, in "The Characteristics of Electric Discharges in Magnetic Fields", ed. by A. Guthrie and R. K. Wakerling (McGraw Hill, New York, 1949), Chap. 2, Sec. 5.
- 6) S. Ichimaru and M. N. Rosenbluth, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research* (IAEA, Vienna, 1971) Vol. II, p. 373 ; S. Ichimaru and T. Tange, *J. Phys. Soc. Japan* 36 (1974) 603 ; S. Ichimaru, "Basic Principles of Plasma Physics" (Benjamin, Reading, Mass., 1973), Chap. 11.
- 7) S. Ichimaru, "Electric Resistivity of Electromagnetically Turbulent Plasma and Reconnection Rate of Magnetic Fields", *Plasma Theory Group Preprint No. 10*, to be published.
- 8) O. Buneman, *Phys. Rev.* 115 (1959), 503.

不安定系の確率過程 — 臨界点近傍での Gunn Instability

日電中研 中村紀一

不安定系は熱平衡と異なる統計的性質をもっと考えられる。その確率過程が何であるかを探るのが我々の目的である。乱流は典型的な実例であるが、最近ではレーザー¹⁾、ベナール渦²⁾の問題が非平衡系での相転移と云う観点から研究されている。Pytte と Thomas³⁾ は Ga As のような負性抵抗を示す半導体で誘電率の周波数および電界依存性

から微分抵抗が零になる臨界電界ではプラズマ・モードの周波数がソフト・モードのように純虚数になり零に近づくことを示し, Gunn instability を非平衡系での相転移と考えた。彼等の理論は線形であるから不安定性を通して増幅された電界の揺らぎの統計的性質は分らない。我々は Gunn instability の臨界点近傍での振舞を非線形の統計理論で考察し, これがレーザーと同じ相転移であることを示す。

問題を 1 次元で取り扱い, 連続の式と等価な電界 $E(x, t)$ に対する方程式から出発する:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \left(\frac{4\pi en_0}{\epsilon_0} \right) v(E) + D \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - v(E) \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{4\pi}{\epsilon_0} I(t). \quad (1)$$

D は拡散係数, $v(E)$ は電子のドリフト速度である。全電流 $I(t)$ は外部電界 $E_0 = (1/L) \int_0^L dx E(x, t) = (\text{一定})$ の条件から決まる, (L は試料の長さ)。 E を x についてフーリエ分解すると, 振幅 E_k について (k は波数) モード coupling 方程式が(1)から得られる:

$$\begin{aligned} \partial E_k / \partial t = & (\alpha_k - i\omega_k) E_k \\ & - \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{(k=k_1+\dots+k_s)} \frac{1}{s!} \left\{ \left(\frac{4\pi en_0 v_0^{(s)}}{\epsilon_0} \right) + i k v_0^{(s-1)} \right\} E_{k_1} E_{k_2} \dots E_{k_s}. \end{aligned} \quad (2)$$

$\omega_k = kv(E_0)$ はドップラー効果による振動数, $v_0^{(s)} = (d^s v(E)/dE^s)_{E=E_0}$ 又, $\alpha_k = \omega_R - Dk^2$ はモード k の増幅 (減衰) 率である。但し, $\omega_R = -(4\pi en_0 v_0^{(1)})/\epsilon_0$ 。

周期境界条件を用いるなら $k = (2\pi/L)m$, 但し m は正又は負の整数であるが, $m=0$ のモードは外部電界 $E_0 = (\text{一定})$ の条件から除かれる。モードを整数 m で区別し α_k を $\alpha_m = \omega_R - (Dk_0^2)m^2$ とかく, 但し $k_0 = 2\pi/L$ 。臨界点近傍では $m = \pm 1$ のモードのみが不安定で, 他のモードが安定であるように ω_R を選ぶことができる。 $\omega_R = (1+\epsilon)(Dk_0^2)$ とおくと $\alpha_{\pm 1} = \epsilon(Dk_0^2)$ となる。 $|\epsilon| \ll 1$ であるから, 他のモード ($|m| \geq 2$) の減衰率に比べ時間的に非常に緩やかに変化する: $|\alpha_{\pm 1}| \ll \beta_m$ 。

次に臨界点近傍では $m = \pm 1$ 附近のモードが現象に寄与すると考えるのは合理的である。このとき Eq. (2) のモード coupling 係数の k 依存性を無視できる。これは $v(E)$ に対する Kroemer⁴⁾ の式を使って数値的に確かめることができる。 $E_k = c_k e^{-i\omega_k t}$ とおくと, 4 モード coupling の近似で(2)は

$$\partial c_m / \partial t = \alpha_m c_m + \sum_{(m=m'+m'')} \frac{1}{2} V c_{m'} c_{m''} - \sum_{(m=m'+m''+m''')} \frac{1}{6} W c_{m'} c_{m''} c_{m'''} \quad (3)$$

但し $V = -(4\pi e n_0 v_0^{(2)} / \epsilon_0)$ で、 $W = -(4\pi e n_0 v_0^{(3)} / \epsilon_0)$ は正の量である。

不安定モード ($m = \pm 1$) が $m = \pm 2$ のモードのみと相互作用すると仮定し、他のモード ($|m| \geq 3$) を無視する。(3)から次の方程式が得られる。

$$\partial c_1 / \partial t = \alpha c_1 + V c_2 c_1^* - \frac{W}{2} |c_1|^2 c_1 - W |c_2|^2 c_1, \quad (4)$$

$$\partial c_2 / \partial t = -\beta c_2 + \frac{V}{2} c_1^2 - W |c_1|^2 c_2 - \frac{W}{2} |c_2|^2 c_2, \quad (5)$$

但し、 $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_2$ である。 $\beta \gg |\alpha|$ であるから(5)を断熱近似 ($\partial c_2 / \partial t = 0$) で解く。右辺の最後の項を無視すると漸近解は $c_2 = \frac{V}{2} c_1^2 / (\beta + W |c_1|^2)$ 。この解は $|c_1| \rightarrow \infty$ で有限であるから c_1 が生長し続けても、それに引摺られて c_2 が不安定になることがない。これは $m = \pm 2$ のモードが熱浴の一部と見做され、臨界点近傍での系の振舞がシングル・モードで記述されることを意味する。 c_2 の解を(4)に代入し、 $c = c_1$ において、

$$\partial c / \partial t = -\partial \psi / \partial c^*$$

が得られる。ここで、

$$\psi = \frac{W}{4} I^2 - (\alpha + V^2 / 4W) I - (V^2 \beta / 4W^2) / (1 + \frac{W}{\beta} I). \quad (7)$$

但し $I = c^* c$ 。

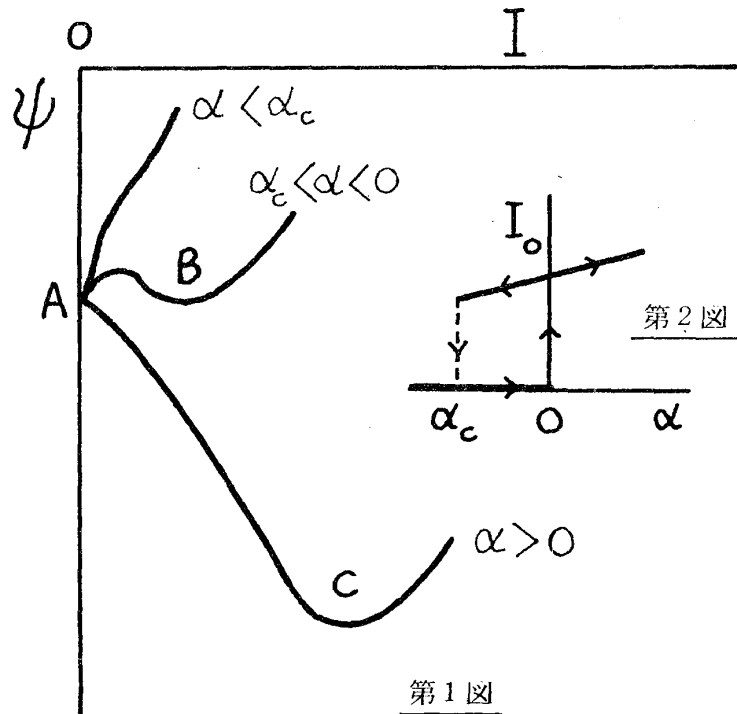
いま(6)の右辺にランダム力 $R(t)$ を付け加えると (但し $\langle R^*(t) R^*(t') \rangle = 2\sigma \delta(t-t')$), 非線形ランジュバン方程式が得られる。従って、確率密度 $P(c, t)$ に対する Fokker-Planck 方程式は、 $c = I^{1/2} e^{i\varphi}$ とすると、

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial I} \left(I \frac{\partial \psi}{\partial I} P \right) + 2\sigma \frac{\partial}{\partial I} \left(I \frac{\partial P}{\partial I} \right) + \frac{\sigma}{2I} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} \quad (8)$$

となる。(8)の定常解は容易に求まり

$$P_0 = N \exp(-\psi / \sigma). \quad (9)$$

(6)と(9)から ψ は非平衡系での熱力学的ポテンシャルとして働く。(7)の右辺の最後の項を落す ψ の型はレーザーと同じで、(6)はファン・デル・ポール方程式になる。然しこの項の為に ψ の振舞が臨界点近傍で異なり(第1図)、例えば I の最確値 I_0 に対してヒステリシス効果がでる(第2図)。これは実験で観測される。又、異常な臨界点揺らぎ⁵⁾はヒステリシスの存在と関連しているように思われる。シングルモードの概念は、臨界点から非常にずれたところでは成立しない。そのとき、モード coupling 方程式(2)に戻って考え直さなければならぬが、事情は乱流と似たものになる。



参考文献

- 1) H. Haken: Advances in Solid State Physics, ed. O. Madelung (Pergamon, Braunschweig, 1970) vol. X, pp 351-365;
V. De Giorgio and M. O. Scully: Phys. Rev. A 2 (1970) 1170.
- 2) R. Graham: Phys. Rev. Letters 31 (1973) 1479.
- 3) E. Pytte and H. Thomas: Phys. Rev. 179 (1969) 431.
- 4) S. M. Sze: Physics of Semiconductor Devices (John Wiley & Sons, New York, 1969) p. 784.
- 5) K. Matusno: Phys. Letters 31A (1970) 335.