

レベルセット法を用いた非粘性液体シートの解析

阪大院・基礎工 菅 健太郎 (Kentarou Kan)

阪大院・基礎工 吉永 隆夫 (Takao Yoshinaga)

阪大院・基礎工 杉本 信正 (Nobumasa Sugimoto)

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1 はじめに

液体シートの振る舞いは表面張力波の安定性に大きく依存することはよく知られている。この安定性の問題は流体力学での代表的な問題の一つであるばかりでなく、噴霧器、平板への塗装やコーティングにおけるカーテンフローコート法 [1]、噴水などの水空間の設計 [2] などへの応用においても重要である。塗装、コーティング等ではシートを安定化させシートの破断を防止する必要がある一方、噴霧器に使用する場合は逆にシートの不安定性を利用してシートを積極的に破断させる必要がある。

液体シートに関する研究は古くから行われている。特に非粘性の平面液体シートを伝播する微小攪乱には、二つのモードが存在することが知られている [3]。一つは fig. 1.1 に示すようにシートの中央面は平面で厚みが増減することによって起こる対称モード、もう一つは fig. 1.2 に示すようにシートの厚みは一定で中央面が増減することによって起こる反対称モードである。線形ではこの二つのモードが互いに独立であり、外部流を考慮した場合、長波長攪乱に対して両モードとも不安定となる。条件によってはその不安定領域は液体の粘性を考慮した方が非粘性の場合よりも拡大するが、外部流がなければ粘性は攪乱を安定化させるだけであることが明らかにされた [4]。このように微小攪乱に対する安定性は詳しく調べられているが、一般に液体シートは界面が自由境界で容易に変形するため、問題は本質的に非線形で、またほとんどの場合非定常であるため解析的な取り扱いが容易ではない。

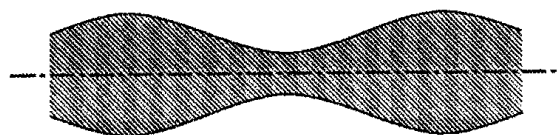


fig. 1.1: 対称モード

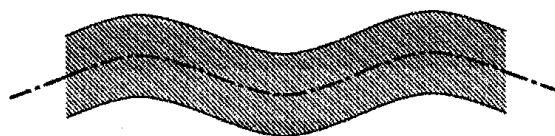


fig. 1.2: 反対称モード

近年、強い非線形性や非定常を伴う流体運動に対して数値解析がさかんに行われて、特に自由界面を持つ流体運動の問題に対してレベルセット法と呼ばれる方法が有効であることが示されている [5,6]。レベルセット法ではまず、界面以外で成立する方程式に対して、界面に特異性を考えることによって界面も入れた全領域で成り立ち、しかもその中に適切な境界条件が含まれる

よう方程式を拡張することから始める。次いで、界面からの距離関数としてレベルセット関数を定義し、拡張した方程式を書き直す。この方程式を数値的に解くために、特異性を通常関数で平滑化する近似を用いる。その際界面では、通常粘性があるため速度の不連続は考慮されていない。しかし、非粘性流体の場合には界面で速度不連続となり、この方法がどの程度有効であるかはこれまで明らかにされていない。

本研究では、これまで扱われてこなかった界面において速度不連続（非粘性）となる場合でも使用できる発展方程式を導出している。そして、非粘性流体に対して用いられるレベルセット法の有効性を確認するため、微小攪乱を加えた場合の非粘性平面液体シートの振る舞いを調べ、線形解と比較している。

2 レベルセット法

気体と液体の2流体モデルを考え、界面を Γ とする (fig.2.1 参照)。以下で、添え字 l, g はそれぞれ液相、気相を示す。

2.1 関数の定義

レベルセット関数 Φ は fig.2.1 に示すように、界面からの符号つき距離で定義され、液体側を正、気体側を負とする。すなわち

$$\begin{cases} \Phi > 0 & x \in \text{liquid}, \\ \Phi = 0 & x \in \Gamma, \\ \Phi < 0 & x \in \text{gas}. \end{cases} \quad (2.1)$$

となる。 $H(\Phi)$ はレベルセット関数 Φ を引数とするステップ関数

$$H(\Phi) = \begin{cases} 1 & \text{for } \Phi > 0, \\ 0 & \text{for } \Phi < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

と定義し、デルタ関数 $\delta(\Phi)$ はステップ関数 $H(\Phi)$ の Φ に関する一階の導関数と定義する：

$$\delta(\Phi) = \frac{dH(\Phi)}{d\Phi}. \quad (2.3)$$

次に、界面における単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ と曲率 κ はレベルセット関数 Φ を用いると

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|}, \quad (2.4)$$

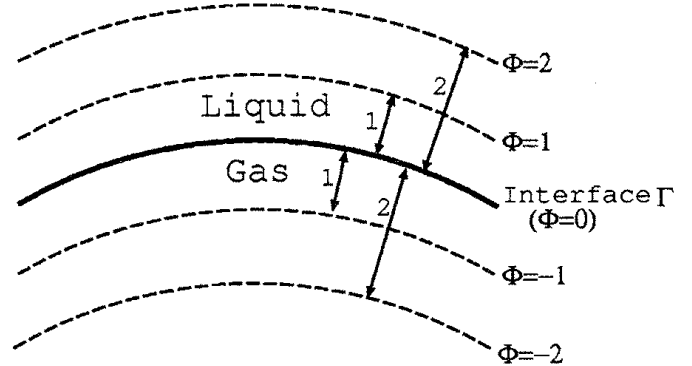


fig. 2.1: 二流体モデル

$$\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n} = \nabla \cdot \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|}, \quad (2.5)$$

となる. また $\delta(\Phi) = \delta(-\Phi)$ であるので, $H(\Phi)$ と $H(-\Phi)$ のそれぞれの空間微分, 時間微分は

$$\nabla H(\Phi) = \frac{dH(\Phi)}{d\Phi} \nabla \Phi = \nabla \Phi \delta(\Phi) = |\nabla \Phi| \mathbf{n} \delta(\Phi), \quad (2.6)$$

$$\nabla H(-\Phi) = \frac{dH(-\Phi)}{d(-\Phi)} \nabla(-\Phi) = -\nabla \Phi \delta(\Phi) = -|\nabla \Phi| \mathbf{n} \delta(\Phi), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial H(\Phi)}{\partial t} = \frac{dH(\Phi)}{d\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \delta(\Phi), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial H(-\Phi)}{\partial t} = \frac{dH(-\Phi)}{d(-\Phi)} \frac{\partial(-\Phi)}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \delta(\Phi). \quad (2.9)$$

2.2 基礎方程式

まず, 液相と気相における運動方程式と連続の式はそれぞれ

$$\rho_l \frac{D\mathbf{u}_l}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{T}_l = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_l = 0 \quad x \in \text{liquid}, \quad (2.10)$$

$$\rho_g \frac{D\mathbf{u}_g}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{T}_g = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_g = 0 \quad x \in \text{gas}, \quad (2.11)$$

であり, これらの基礎方程式を次に述べる境界条件の下で解く. ただし, 応力テンソル $\mathbf{T}$ は, ひずみ速度テンソル $\mathbf{D}$ を用いて

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad (2.12)$$

と定義され, $\mathbf{I}$ は単位行列, $\mathbf{D}$ は

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

である.

2.3 境界条件

界面での運動学的条件を考える. $t = t_0$ において界面上にある粒子は

$$\Phi(\mathbf{x}, t_0) = 0, \quad (2.14)$$

を満たす. また, δt 後においてもその粒子は界面上にあるので

$$\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{u}\delta t, t_0 + \delta t) = 0, \quad (2.15)$$

が成り立つ. 上式を $t = t_0$ まわりでテーラー展開すると

$$\Phi(\mathbf{x}, t_0) + \mathbf{u} \delta t \cdot \nabla \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \delta t = 0, \quad (2.16)$$

となる。式(2.14)を上式に代入し整理すると

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \Phi \quad x \in \Gamma, \quad (2.17)$$

式(2.4)より上式は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} |\nabla \Phi| \quad x \in \Gamma, \quad (2.18)$$

となる。また、界面での液相と気相の応力の差は表面張力に等しいので

$$(\mathbf{T}_l - \mathbf{T}_g) \cdot \mathbf{n} = \sigma \kappa \mathbf{n} \quad x \in \Gamma, \quad (2.19)$$

が成り立つ。ここで σ は表面張力係数である。速度に関しては速度の法線方向成分は非粘性流体でも界面で連続であるので

$$\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{n} \quad x \in \Gamma. \quad (2.20)$$

2.4 発展方程式の導出

従来のレベルセット法では界面での速度連続を仮定し、界面を含む任意の領域で運動方程式と連続の式を積分することによって数値計算で用いる発展方程式が導出されている。その方程式は連続の式と界面張力の効果を含めた運動方程式である。しかしながら、その方法では界面での速度不連続による効果を正しく見積もることができない。そこで、本研究ではこれまでとは全く異なる方法を用い速度不連続の効果を含めた、つまり粘性の有無によらない発展方程式を導出する。まず、密度 ρ 、速度ベクトル $\mathbf{u}$ 、応力テンソル $\mathbf{T}$ を以下のように定義する：

$$\rho = \rho_l H(\Phi) + \rho_g H(-\Phi) \quad x \in all, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l H(\Phi) + \mathbf{u}_g H(-\Phi) \quad x \in all, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_l H(\Phi) + \mathbf{T}_g H(-\Phi) \quad x \in all. \quad (2.23)$$

ここで $\rho_l, \rho_g, \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_g, \mathbf{T}_l, \mathbf{T}_g$ は $\Phi = 0$ で正則であると仮定し、不連続は全てステップ関数が担うものとする。

2.4.1 連続の式

式(2.22)を用いると

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla \cdot [\mathbf{u}_l H(\Phi) + \mathbf{u}_g H(-\Phi)] \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{u}_l) H(\Phi) + \mathbf{u}_l \cdot \nabla H(\Phi) + (\nabla \cdot \mathbf{u}_g) H(-\Phi) + \mathbf{u}_g \cdot \nabla H(-\Phi), \end{aligned} \quad (2.24)$$

となる. 液相と気相の連続の式より上式は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_l \cdot \nabla H(\Phi) + \mathbf{u}_g \cdot \nabla H(-\Phi), \quad (2.25)$$

となり, 式(2.6),(2.7) を用いると

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n} |\nabla \Phi| \delta(\Phi) - \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{n} |\nabla \Phi| \delta(\Phi) \\ &= (\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{n}) |\nabla \Phi| \delta(\Phi). \end{aligned} \quad (2.26)$$

ここで $\Phi \neq 0$ では $\delta(\Phi) = 0$ である. 一方, 式(2.20) より $\Phi = 0$ では $\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{n}$ であるので上式は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad x \in all, \quad (2.27)$$

となる.

2.4.2 運動方程式

前節と同様に式(2.23) を用いると $\nabla \cdot \mathbf{T}$ は

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = (\nabla \cdot \mathbf{T}_l) H(\Phi) + (\nabla \cdot \mathbf{T}_g) H(-\Phi) + (\mathbf{T}_l - \mathbf{T}_g) \cdot \mathbf{n} |\nabla \Phi| \delta(\Phi), \quad (2.28)$$

となり, 式(2.19) を用いると,

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \nabla \cdot \mathbf{T}_l H(\Phi) + \nabla \cdot \mathbf{T}_g H(-\Phi) + \sigma \kappa \mathbf{n} |\Phi| \delta(\Phi), \quad (2.29)$$

となる. 次に式(2.22) を両辺 t で偏微分すると,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} H(\Phi) + \mathbf{u}_l \frac{\partial H(\Phi)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial t} H(-\Phi) + \mathbf{u}_g \frac{\partial H(-\Phi)}{\partial t}, \quad (2.30)$$

となり, 式(2.8),(2.9) を上式に代入し, その後, 式(2.18) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} H(\Phi) + \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial t} H(-\Phi) + (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \delta(\Phi) \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} H(\Phi) + \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial t} H(-\Phi) - (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) |\nabla \Phi| \delta(\Phi), \end{aligned} \quad (2.31)$$

を得る.

次に $\mathbf{u}$ の x 成分 u の空間微分 ∇u について考える. 式(2.22) より $u = u_l H(\Phi) + u_g H(-\Phi)$ とおき, 両辺を空間微分すると

$$\nabla u = \nabla u_l H(\Phi) + \nabla u_g H(-\Phi) + (u_l - u_g) \mathbf{n} |\nabla \Phi| \delta(\Phi), \quad (2.32)$$

となる. これより式(2.22) と上式より $\mathbf{u} \cdot \nabla u$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla u &= [u_l H(\Phi) + u_g H(-\Phi)] \cdot [\nabla u_l H(\Phi) + \nabla u_g H(-\Phi)] + (u_l - u_g) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} |\nabla \Phi| \delta(\Phi) \\ &= \mathbf{u}_l \cdot \nabla u_l H^2(\Phi) + \mathbf{u}_g \cdot \nabla u_g H^2(-\Phi) + (\mathbf{u}_l \cdot \nabla u_g + \mathbf{u}_g \cdot \nabla u_l) H(\Phi) H(-\Phi) \\ &\quad + (u_l - u_g) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} |\nabla \Phi| \delta(\Phi), \end{aligned} \quad (2.33)$$

となる. ここで, $H^2(\Phi) = H(\Phi) + [H^2(\Phi) - H(\Phi)]$, $H^2(-\Phi) = H(-\Phi) + [H^2(-\Phi) - H(-\Phi)]$ を用いると,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= \mathbf{u}_l \cdot \nabla \mathbf{u}_l H(\Phi) + \mathbf{u}_g \cdot \nabla \mathbf{u}_g H(-\Phi) + (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} |\nabla \Phi| \delta(\Phi) \\ &\quad + \mathbf{u}_l \cdot \nabla \mathbf{u}_l [H^2(\Phi) - H(\Phi)] + \mathbf{u}_g \cdot \nabla \mathbf{u}_g [H^2(-\Phi) - H(-\Phi)] \\ &\quad + (\mathbf{u}_l \cdot \nabla \mathbf{u}_g + \mathbf{u}_g \cdot \nabla \mathbf{u}_l) H(\Phi) H(-\Phi), \end{aligned} \quad (2.34)$$

となる. 上式の右辺第4項以降を f_1 とおく. ここで, $\Phi \neq 0$ では $f_1 = 0$ であり, $\Phi = 0$ でのみ f_1 の値は定義されていない事を注意する. 以上より $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ は

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{u}_l \cdot \nabla \mathbf{u}_l H(\Phi) + \mathbf{u}_g \cdot \nabla \mathbf{u}_g H(-\Phi) + (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} |\nabla \Phi| \delta(\Phi) + f_1, \quad (2.35)$$

となる. $D\mathbf{u}/Dt$ は式 (2.31) と上式より

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{D\mathbf{u}_l}{Dt} H(\Phi) + \frac{D\mathbf{u}_g}{Dt} H(-\Phi) + f_1. \quad (2.36)$$

式 (2.21) と上式より,

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \rho_l \frac{D\mathbf{u}_l}{Dt} H^2(\Phi) + \left(\rho_g \frac{D\mathbf{u}_l}{Dt} + \rho_l \frac{D\mathbf{u}_g}{Dt} \right) H(\Phi) H(-\Phi) + \rho_g \frac{D\mathbf{u}_g}{Dt} H^2(-\Phi) + \rho f_1, \\ &= \rho_l \frac{D\mathbf{u}_l}{Dt} H(\Phi) + \rho_g \frac{D\mathbf{u}_g}{Dt} H(-\Phi) + \left(\rho_g \frac{D\mathbf{u}_l}{Dt} + \rho_l \frac{D\mathbf{u}_g}{Dt} \right) H(\Phi) H(-\Phi) \\ &\quad + \rho_l \frac{D\mathbf{u}_l}{Dt} [H^2(\Phi) - H(\Phi)] + \rho_g \frac{D\mathbf{u}_g}{Dt} [H^2(-\Phi) - H(-\Phi)] + \rho f_1, \end{aligned} \quad (2.37)$$

となり, 右辺第3項以降を f_2 とおくと, f_2 も f_1 と同様に $\Phi \neq 0$ では $f_2 = 0$ であり, $\Phi = 0$ でのみその値は定義されていない. 上式と式 (2.29) より

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{T} = \left(\rho_l \frac{D\mathbf{u}_l}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{T}_l \right) H(\Phi) + \left(\rho_g \frac{D\mathbf{u}_g}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{T}_g \right) H(-\Phi) - \sigma \kappa \mathbf{n} |\nabla \Phi| \delta(\Phi) + f_2, \quad (2.38)$$

となり, 液相と気相の運動方程式より

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{T} = -\sigma \kappa \mathbf{n} |\nabla \Phi| \delta(\Phi) + f_2, \quad (2.39)$$

となる. ここで, 右辺第1項と第2項を比べると, 共に $\Phi \neq 0$ では0となるが, $\Phi = 0$ ではデルタ関数 $\delta(\Phi)$ を含む第1項の方が第2項よりも十分大きいと考えられる. また, デルタ関数の本来の定義に戻って, 性質の良い任意の関数 $f(x), g(x), h(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ \delta(x) + g(x)[H^2(x) - H(x)] + h(x)H(x)H(-x) \} f(x) dx = f(0), \quad (2.40)$$

が成り立つので, f_2 の寄与は無視できる. よって, 以下では f_2 を無視する. 式 (2.4), (2.5) を用いると上式は

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{T} = -\sigma \left(\nabla \cdot \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \right) \nabla \Phi \delta(\Phi), \quad (2.41)$$

となる.

上式の両辺を ρ で割り空間微分すると

$$\nabla \cdot \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{T} \right) = \nabla \cdot \left\{ -\frac{\sigma}{\rho} \left(\nabla \cdot \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \right) \nabla \Phi \delta(\Phi) \right\}, \quad (2.42)$$

となり, 式 (2.27) を用いると

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{T} \right) = \nabla \cdot \left\{ -\frac{\sigma}{\rho} \left(\nabla \cdot \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \right) \nabla \Phi \delta(\Phi) \right\}, \quad (2.43)$$

となる. 以上より問題は式 (2.17), (2.27), (2.43) を解くことに帰着される.

2.4.3 無次元化

代表長さ A , 代表速度 U 及び代表時間 A/U を用いて式 (2.17), (2.27), (2.43) を無次元化すると以下ようになる. ただし, 以下の式ですべての変数は無次元量を表す:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \Phi, \quad (2.44)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.45)$$

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\rho_r} \nabla \cdot \mathbf{T} \right) = \nabla \cdot \left\{ -\frac{1}{\rho_r \text{We}} \left(\nabla \cdot \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \right) \nabla \Phi \delta(\Phi) \right\}, \quad (2.46)$$

ここで, 無次元パラメータとして, 以下のように定義されるウェーバー数 We , 液相の密度に対する密度比 ρ_r が導入されている:

$$\text{We} = \frac{\rho_l U^2 A}{\sigma}, \quad \rho_r = \frac{\rho}{\rho_l}. \quad (2.47)$$

式 (2.44)~(2.46) は従来の界面で速度連続な場合のレベルセット法の結果と形式的には全く同じであるが, ただし, f_2 を無視していることに注意したい. このとき, 式 (2.22) のような速度不連続がある場合でも有効であると考えられる.

2.5 近似関数

数値計算は上で導出した無次元化された発展方程式 (2.44)~(2.46) を離散化し差分法を用いて行う. ただし, デルタ関数 $\delta(\Phi)$ や ρ_r に含まれるステップ関数 $H(\Phi)$ が $\Phi = 0$ で不連続である

ため, このままの形では差分法を適用できない. そこで, 以下のように定義された近似ステップ関数 $H_a(\Phi)$ と近似デルタ関数 $\delta_a(\Phi)$ を用いる:

$$H_a(\Phi) = \begin{cases} 1 & \text{for } \Phi > \alpha, \\ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\Phi + \alpha}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sin \left(\frac{\pi \Phi}{\alpha} \right) \right\} & \text{for } |\Phi| \leq \alpha, \\ 0 & \text{for } \Phi < -\alpha, \end{cases} \quad (2.48)$$

$$\delta_a(\Phi) = \frac{dH_a}{d\Phi} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \cos \left(\frac{\pi \Phi}{\alpha} \right) \right\} & \text{for } |\Phi| \leq \alpha, \\ 0 & \text{for } |\Phi| > \alpha. \end{cases} \quad (2.49)$$

近似ステップ関数 $H_a(\Phi)$ と近似デルタ関数 $\delta_a(\Phi)$ を fig.2.2 と fig.2.3 はそれぞれ示す. 共に $|\Phi| \leq \alpha$ で連続的に変化する, 近似デルタ関数 $\delta_a(\Phi)$ の最大値は $1/\alpha$ となる.

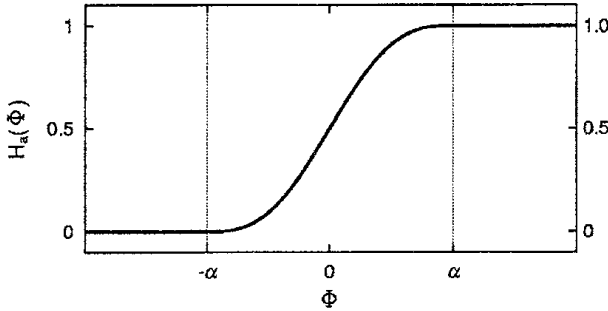


fig. 2.2: 近似ステップ関数 $H_a(\Phi)$

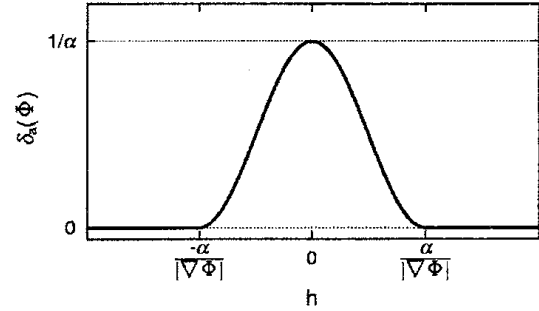


fig. 2.3: 近似デルタ関数 $\delta_a(\Phi)$

3 線形解析

ここでは非粘性外部流体を考慮した非粘性液体シートの線形解析を行う. ただし, シート上下に存在する外部流体は上下に無限に広がっているのではなく, fig.3.1 に示すように壁面とシートに挟まれている状態を考える. 添字 l は液体シートを示し, $g_{\pm}$ はそれぞれ上下の外部流体を示す. 平衡状態では界面は平らであり, シート中心面から界面までの距離を A_0 , 壁面までの距離を L とする. また, 液体シートは主流 U_0 で流れており外部流体は静止している. 主流方向に x 軸, 厚み方向に y 軸をとる二次元直交座標系をとり, 原点をシート中心面にとる.

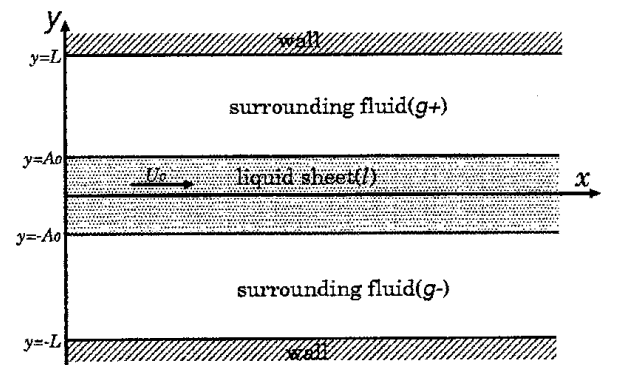


fig. 3.1: 液体シートのモデル

3.1 基礎式と境界条件

基礎式は液体シートと外部流体に対する連続の式と運動方程式式 (2.10) と (2.11) を用いる。シートの上下界面の y 座標をそれぞれ $h_{\pm}$ とすると、運動学的条件より

$$v_l = \frac{\partial h_{\pm}}{\partial t} + u_l \frac{\partial h_{\pm}}{\partial x} \quad \text{at } y = h_{\pm}, \quad (3.1)$$

$$v_{g\pm} = \frac{\partial h_{\pm}}{\partial t} + u_{g\pm} \frac{\partial h_{\pm}}{\partial x} \quad \text{at } y = h_{\pm}, \quad (3.2)$$

となる。また、 $h_{\pm}$ を用いると界面での曲率 κ は

$$\kappa = \pm \left[1 + \left(\frac{\partial h_{\pm}}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 h_{\pm}}{\partial x^2}, \quad (3.3)$$

となり、応力連続条件である式 (2.19) は非粘性流体 ($\mu_l = \mu_{\pm} = 0$) より

$$p_l - p_{g\pm} = \mp \sigma \left[1 + \left(\frac{\partial h_{\pm}}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 h_{\pm}}{\partial x^2} \quad \text{at } y = h_{\pm} \quad (3.4)$$

となる。壁面 ($y = \pm L$) では非粘性流体は壁面に対する法線方向成分のみ 0 となるので

$$v_{g\pm} = 0 \quad \text{at } y = \pm L. \quad (3.5)$$

3.2 線形化

平衡状態での緒量は

$$u_l = U_0, \quad h_{\pm} = \pm A_0, \quad v_l = u_{g\pm} = v_{g\pm} = 0, \quad p_l = p_{g\pm} = P_0, \quad (3.6)$$

となる。次にこの平衡状態に微小攪乱 ($\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{h}$) を加える:

$$u_l = U_0 + \tilde{u}_l(x, y, t), \quad v_l = \tilde{v}_l(x, y, t), \quad p_l = P_0 + \tilde{p}_l(x, y, t), \quad (3.7)$$

$$u_{g\pm} = \tilde{u}_{g\pm}(x, y, t), \quad v_{g\pm} = \tilde{v}_{g\pm}(x, y, t), \quad p_{g\pm} = P_0 + \tilde{p}_{g\pm}(x, y, t), \quad (3.8)$$

$$h_{\pm} = \pm A_0 + \tilde{h}_{\pm}(x, t). \quad (3.9)$$

上式を基礎式と境界条件に代入し、微小量の二次以上の項を無視して線形化する。まず、連続の式と運動方程式は

$$\frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_l} \nabla \cdot \tilde{p}_l, \quad \nabla \cdot \tilde{u}_l = 0 \quad x \in \text{liquid}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_g}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_g} \nabla \cdot \tilde{p}_g, \quad \nabla \cdot \tilde{u}_g = 0 \quad x \in \text{gas}, \quad (3.11)$$

となる。ただし $\tilde{u} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ である。境界条件 (3.1), (3.2), (3.4), (3.5) は

$$\tilde{v}_l = \frac{\partial \tilde{h}_\pm}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \tilde{h}_\pm}{\partial x}, \quad \text{at } y = \pm A_0, \quad (3.12)$$

$$\tilde{v}_{g\pm} = \frac{\partial \tilde{h}_\pm}{\partial t} \quad \text{at } y = \pm A_0, \quad (3.13)$$

$$\tilde{p}_l - \tilde{p}_{g\pm} = \mp \frac{\partial^2 \tilde{h}_\pm}{\partial x^2} \sigma \quad \text{at } y = \pm A_0, \quad (3.14)$$

$$\tilde{v}_{g\pm} = 0 \quad \text{at } y = \pm L, \quad (3.15)$$

と線形化される。

3.3 線形分散関係

ここで攪乱は波数 k , 周波数 ω をもつ正弦的なものを加えたとし

$$[\tilde{u}_l, \tilde{v}_l, \tilde{u}_{g\pm}, \tilde{v}_{g\pm}, \tilde{p}_l, \tilde{p}_{g\pm}, \tilde{h}_\pm] = [\hat{u}_l(y), \hat{v}_l(y), \hat{u}_{g\pm}(y), \hat{v}_{g\pm}(y), \hat{p}_l(y), \hat{p}_{g\pm}(y), \hat{h}_\pm(y)] \exp[i(kx - \omega t)], \quad (3.16)$$

とする。上式を式 (3.10) ~ (3.15) に代入して解くことにより $\hat{h}_\pm$ に関する連立方程式

$$\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{h}_+ \\ \hat{h}_- \end{pmatrix} = 0. \quad (3.17)$$

を得る。ただし,

$$D_1 = -\frac{\rho_l (U_0 k - \omega)^2}{k \tanh(2kA_0)} - \frac{\rho_g \omega^2}{k \tanh[k(L - A_0)]} + \sigma k^2, \quad (3.18)$$

$$D_2 = \frac{\rho_l (U_0 k - \omega)^2}{k \sinh(2kA_0)}, \quad (3.19)$$

である。方程式 (3.17) が自明でない解を持つための必要十分条件は係数の行列式が 0 となることである。よって, $D_1^2 - D_2^2 = (D_1 + D_2)(D_1 - D_2) = 0$ となり $D_1 = D_2$, もしくは $D_1 = -D_2$ となる。式 (3.17) より $D_1 = D_2$ の場合 $\hat{h}_+ = -\hat{h}_-$ となり対称モード, $D_1 = -D_2$ の場合 $\hat{h}_+ = \hat{h}_-$ となり反対称モードとなる。以下では対称, 反対称モードに分けて分散関係を示す。

3.3.1 対称モード

$D_1 = D_2$ より

$$\frac{\rho_g \omega^2}{\tanh[k(L - A_0)]} - \sigma k^3 + \frac{\rho_l (U_0 k - \omega)^2}{\tanh(kA_0)} = 0, \quad (3.20)$$

となり,これを無次元化すると,

$$\frac{\gamma\omega^2}{\tanh[k(L-1)]} + \frac{(k-\omega)^2}{\tanh(k)} - \frac{k^3}{\text{We}} = 0. \quad (3.21)$$

ここで γ は液体シートに体する外部流体の密度比 ρ_g/ρ_l である. $D_1 = D_2$ より攪乱振幅 $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{p})$ を計算するとそれぞれ

$$\hat{u}_{g\pm} = -\frac{\cosh[k(L \mp y)]}{\sinh[k(L - A_0)]}\omega\hat{h}_+, \quad (3.22)$$

$$\hat{v}_{g\pm} = \mp \frac{\sinh[k(L \mp y)]}{\sinh[k(L - A_0)]}i\omega\hat{h}_+, \quad (3.23)$$

$$\hat{p}_g = -\rho_g \frac{\omega}{k} \frac{\cosh[k(L \mp y)]}{\sinh[k(L - A_0)]}\omega\hat{h}_+, \quad (3.24)$$

$$\hat{u}_l = \frac{-(kU_0 - \omega)\{\cosh[k(A_0 + y)] + \cosh[k(A_0 - y)]\}}{2 \cosh(kA_0) \sinh(kA_0)}\hat{h}_+, \quad (3.25)$$

$$\hat{v}_l = \frac{i(kU_0 - \omega)\{\sinh[k(A_0 + y)] - \sinh[k(A_0 - y)]\}}{2 \cosh(kA_0) \sinh(kA_0)}\hat{h}_+, \quad (3.26)$$

$$\hat{p}_l = \frac{\rho_l(kU_0 - \omega)^2\{\cosh[k(A_0 + y)] + \cosh[k(A_0 - y)]\}}{2k \cosh(kA_0) \sinh(kA_0)}\hat{h}_+. \quad (3.27)$$

3.3.2 反対称モード

対称モードと同様に無次元化すると分散関係は

$$\frac{\gamma\omega^2}{\tanh[k(L-1)]} + (k-\omega)^2 \tanh(k) - \frac{k^3}{\text{We}} = 0. \quad (3.28)$$

となり,攪乱振幅 $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{p})$ は

$$\hat{u}_{g\pm} = \mp \frac{\cosh[k(L \mp y)]}{\sinh[k(L - A_0)]}\omega\hat{h}_+, \quad (3.29)$$

$$\hat{v}_{g\pm} = -\frac{\sinh[k(L \mp y)]}{\sinh[k(L - A_0)]}i\omega\hat{h}_+, \quad (3.30)$$

$$\hat{p}_g = \mp \rho_g \frac{\omega^2}{k} \frac{\cosh[k(L \mp y)]}{\sinh[k(L - A_0)]}\hat{h}_+, \quad (3.31)$$

$$\hat{u}_l = \frac{-(kU_0 - \omega)\{\cosh[k(A_0 + y)] - \cosh[k(A_0 - y)]\}}{2 \cosh(kA_0) \sinh(kA_0)}\hat{h}_+, \quad (3.32)$$

$$\hat{v}_l = \frac{i(kU_0 - \omega)\{\sinh[k(A_0 + y)] + \sinh[k(A_0 - y)]\}}{2 \cosh(kA_0) \sinh(kA_0)}\hat{h}_+, \quad (3.33)$$

$$\hat{p}_l = \frac{\rho_l(kU_0 - \omega)^2\{\cosh[k(A_0 + y)] - \cosh[k(A_0 - y)]\}}{2k \cosh(kA_0) \sinh(kA_0)}\hat{h}_+, \quad (3.34)$$

となる.

4 解析結果

液体シートに攪乱を加えた場合の時間発展を調べるために、レベルセット法を用い数値計算を行った結果を以下に示す。ただし、パラメータには $We = 1000, \gamma = 0.9$ を使い、初期攪乱振幅 $\hat{h}_+ = 0.001$ 、波数 $k = \pi$ (攪乱波長 $\lambda = 2$) としている。また、速度 u の初期値には線形解析の結果を用いる。ここで、線形の値をそのまま用いると界面で初期速度が不連続である。そのため、線形解は $u = u_l H_a(\Phi) + u_g H_a(\Phi)$ の u_l, u_g に相当することに注意する。

4.1 対称モード

まず、対称モードの攪乱を加えた場合の時間発展の結果を fig.4.1 に示す。式 (3.21) より、 $k = \pi$ のとき $\omega \simeq 1.65 + 1.56i$ となる。図 (a) が $t = 0.5$ での上下界面 $h_{\pm}$ 、図 (b) が $t = 1.0$ での上下界面 $h_{\pm}$ を示す。実線が線形解析による結果であり、破線が近似関数 (2.2) で $\alpha = 0.02$ 、一点鎖線が $\alpha = 0.06$ のレベルセット法による数値結果である。 ω の虚部が正であるので攪乱は増幅する。攪乱が約 5 倍に増幅した時 ($t = 1$)、 $\alpha = 0.06$ では線形の結果とかなりの違いが見られるが $\alpha = 0.02$ では線形の結果とほぼ一致していることがわかる。ここで $t = 1$ でも攪乱振幅は 0.005 以下であるので、非線形性の影響は極めて小さく線形の範囲内では数値解析結果は正確であると考えられる。

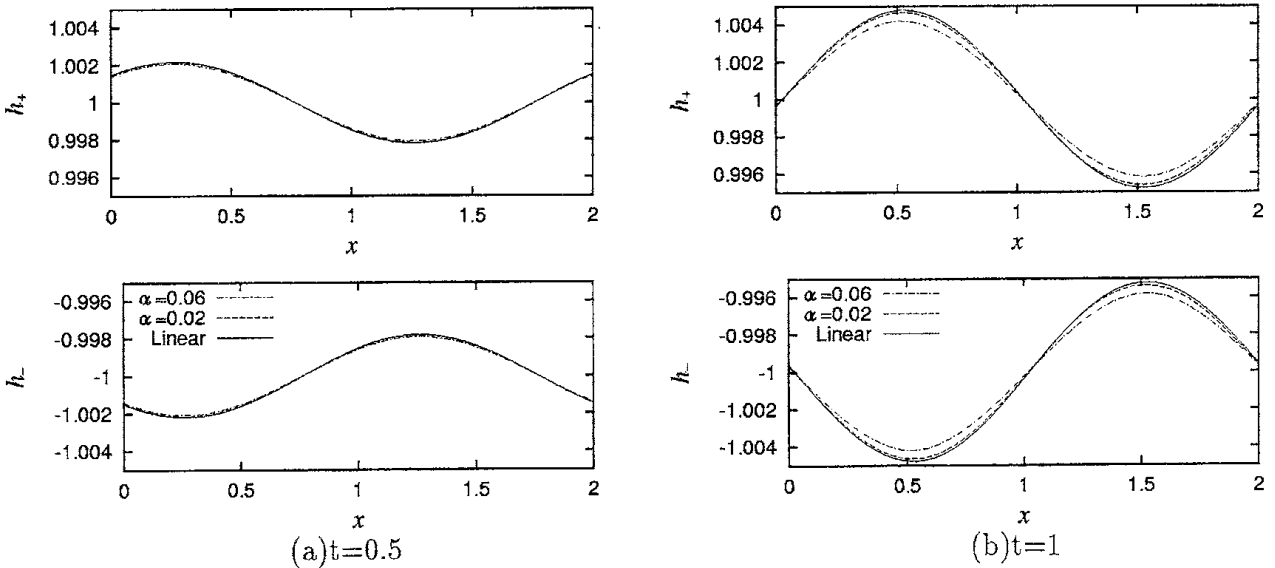


fig. 4.1: 界面の時間発展 (対称モード)

時刻 $t = 1$ での界面形状の数値解析と線形解析との差 ΔS を fig.4.2 に示す。この差 ΔS は

$$\Delta S = \frac{\int_0^\lambda |\tilde{h}_{LevelSet} - \tilde{h}_{Linear}| dx}{\int_0^\lambda |\tilde{h}_{Linear}| dx}, \quad (4.1)$$

によって算出したものである。ここで $\tilde{h}_{LevelSet}, \tilde{h}_{Linear}$ はそれぞれレベルセット解析と線形解析により計算された攪乱振幅である。この図からもわかるように α が小さいほど線形解析の結果とよく一致する。よって、レベルセット法により正確な結果を得るためにはできるだけ α を小さくとる必要がある。

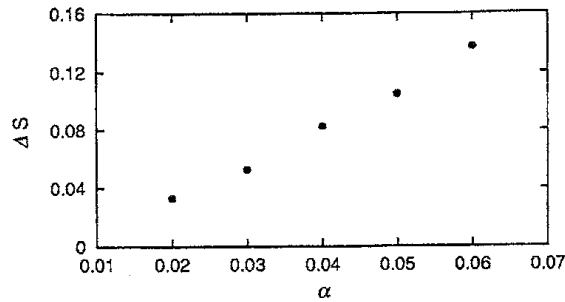


fig. 4.2: レベルセット法と線形解析の差 (対称モード)

4.2 反対称モード

反対称モードの攪乱を加えた場合のシートの上下界面の時間発展を fig.4.3 に示す。式 (3.28) より $k = \pi$ に対して $\omega \simeq 1.65 + 1.56i$ となる。図 (b) より対称モードと同様に $\alpha = 0.06$ では線形の結果とかなりの違いが見られるが $\alpha = 0.02$ では線形の結果とほぼ一致していることがわかる。

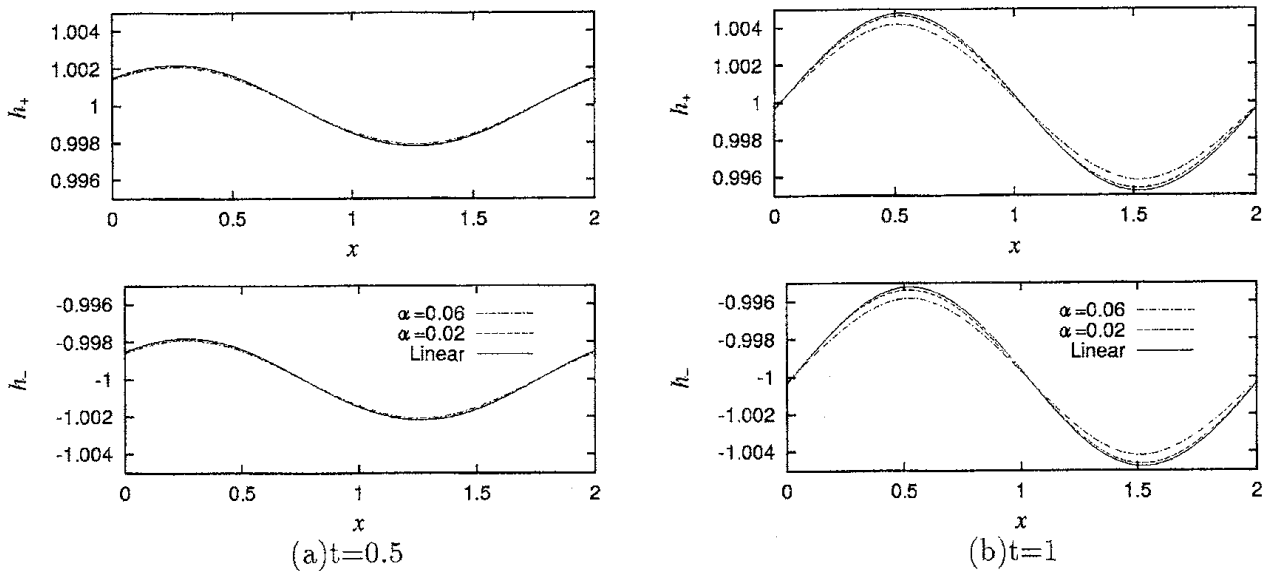


fig. 4.3: 界面の時間発展 (反対称モード)

時刻 $t = 1$ での界面形状の数値解析と線形解析との差 ΔS を fig.4.4 に示す。対称モードの場合と同様、正確な結果を得るためには、できるだけ α を小さくとる必要がある。

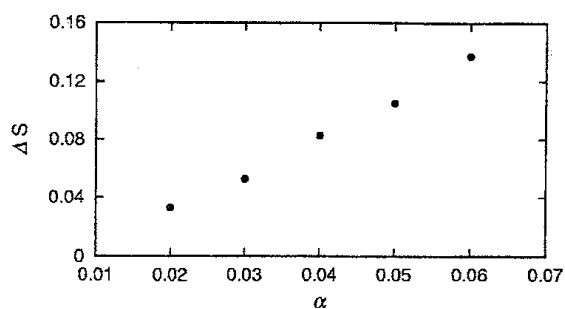


fig. 4.4: レベルセット法と線形解析の差 (反対称モード)

5 結論

前節までに得られた結果をまとめると以下ようになる:

- 非粘性流体に対するレベルセット法の有効性を議論した.
- 得られた方程式は界面で $H(\Phi)H(-\Phi)$, $H^2(\Phi) - H(\Phi)$ を無視すれば形式的には粘性流体に対して既に得られている方程式と同じになる.
- この方程式を用いると速度不連続がある場合でも α を小さくするほど線形解に近づく. 例として, 界面のぼかし幅を $\alpha = 0.02$ 程度に狭くとると, 攪乱が約 5 倍に増幅した場合 ($t = 1$) でも誤差は約 3% に抑えることができた.

参考文献

- [1] 島健太郎: 特殊機能塗料の開発 (1987), 290.
- [2] L.W.Casperson: J. Sound and Vibration **162**(1993), 251.
- [3] H. B. Squire: Brit. J. Appl. Phys. **4**(1953), 167.
- [4] X.Li & R.S.Tankin: J. Fluid Mech. **226**(1991), 425.
- [5] J.A.Sethian & P.Smereka: *Annu.Rev.FluidMech.* **35**(2003), 341.
- [6] S.Osher & R.Fedkiw: *LevelSetMethodsandDynamicImplicitSurfaces*, Springer(2003).