

Hecke Eigenvalues for Real Quadratic Fields

立命館大学理工学研究科 岡田 薫 (Kaoru Okada)

F を類数が 1 より大きい総実代数体とする. このとき F 上の Hilbert cusp forms の空間 $\mathcal{S}_k(\mathfrak{c}, \psi)$ 及び, それに作用する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{a})$ について考える. ここで次のような自然な疑問が浮かぶ: “類数が 1 より大きいということが Hecke 作用素の固有値に影響を及ぼしているのだろうか?” 例えば F の各 ideal 類に対して, 類の各元に対応する Hecke 作用素の固有値たちは, 類ごとになんらかの共通する性質を持つのであろうか?

そのような疑問について考えるために, まずは固有値のデータを見てみたいということになるのであるが, これまで類数が 1 より大きい場合には Hecke 作用素の固有値が具体的に計算された例がないようである. そこで今回 F が特に実 2 次体の場合に trace formula を用いて Hecke 作用素の固有値を具体的に計算してみた. そしてその固有値についてデータをもとに考察したところ, 特に単項類については興味深い現象が見られた.

本稿では trace formula の計算方法について簡単に説明した後, $F = \mathbf{Q}(\sqrt{401})$ (類数は 5) の場合に Hecke 作用素の固有多項式をあたえ, そのうえでそのデータから読み取れる固有値の性質について述べる. (詳しくは [Okada] を参照されたい.)

1 Hilbert cusp forms and Hecke operators

この section では, 対象となる Hilbert cusp forms の空間, 及びそれに作用する Hecke 作用素の定義について述べる. その際 formulation は [Shimura, §2] に従う. (ただし level $\mathfrak{c}$ は F の maximal order $\mathfrak{o}_F$ に限定する.)

F を g 次総実代数体とする. $\mathfrak{d}_F, D_F$ をそれぞれ F の $\mathbf{Q}$ 上の different, discriminant とする. $I(F)$ を F の ideal 群とする. $P(F), Cl(F), h_F$ を F の 単項 ideal 群, ideal 類群, 類数とする (狭義のものはそれぞれ $P^+(F), Cl^+(F), h_F^+$ で表す). $\mathfrak{a}, \mathfrak{h}$ をそれぞれ F の archimedean primes, nonarchimedean primes 全体の集合とする. $F_{\mathbf{A}}$ を F の adèle 環, $F_{\mathbf{A}}^{\times}$ を idele 群とする. F_p の prime element を π_p と書く. ここで $G = GL_2(F)$ とおき, G の adélization を $G_{\mathbf{A}}$ と表す. $F_{\mathfrak{a}}, F_{\mathfrak{h}}, F_v$ 等で $F_{\mathbf{A}}$ の $\mathfrak{a}, \mathfrak{h}, v$ -part 等を表すものとする; G の場合も同様とする.

まず $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_{\mathbf{a}+} = \{x \in G_{\mathbf{a}} \mid \det(x) \gg 0\}$, $z \in H^g$, $k \in \mathbf{Z}^g$, H^g 上の複素数値関数 f について,

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= ((a_v z_v + b_v)/(c_v z_v + d_v))_{v \in \mathbf{a}}, \\ J_k(\alpha, z) &= \prod_{v \in \mathbf{a}} (\det(\alpha_v)^{-k_v/2} (c_v z_v + d_v)^{k_v}), \\ (f|_k \alpha)(z) &= J_k(\alpha, z)^{-1} f(\alpha(z)) \end{aligned}$$

とおく (H は複素上半平面). いま $\tilde{S}_k$ を次の $(i_a), (i_b)$ をみたす H^g 上の複素数値正則関数 f 全体とする:

(i_a) ある正の整数 N が存在して, すべての $\gamma \in SL_2(\mathfrak{o}_F) \cap (1_2 + N \cdot M_2(\mathfrak{o}_F))$ について $f|_k \gamma = f$ をみたす.

(i_b) 任意の $\alpha \in G \cap G_{\mathfrak{a}+} G_{\mathfrak{h}} (\subset G_{\mathbf{A}})$ に対して,

$$(f|_k \alpha)(z) = \sum_{0 \ll \xi \in L_{\alpha}} c_{\alpha}(\xi) \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{v \in \mathfrak{a}} \xi_v z_v)$$

をみたす F の lattice L_{α} 及び $c_{\alpha}(\xi) \in \mathbf{C}$ が存在する.

さてこれより adelic な Hilbert cusp forms の空間を定義する. (類数が 1 より大きい場合には adelic な取り扱いが不可欠である.) まず $\delta_{\mathfrak{h}} \mathfrak{o}_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{d}_{\mathfrak{h}}$ をみたす $\delta_{\mathfrak{h}} \in F_{\mathfrak{h}}$ をとる (ここで $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}$ をそれぞれ $\mathfrak{o}_F, \mathfrak{d}_F$ の $F_{\mathfrak{p}}$ における topological closure とし, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{h}} = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{h}} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{h}} = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{h}} \mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}$ とおく). そして

$$Y_{\mathfrak{h}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix} M_2(\mathfrak{o}_{\mathfrak{h}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix}^{-1} \cap G_{\mathfrak{h}},$$

$$W_{\mathfrak{h}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix} GL_2(\mathfrak{o}_{\mathfrak{h}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix}^{-1},$$

$$Y = G_{\mathfrak{a}+} Y_{\mathfrak{h}}, \quad W = G_{\mathfrak{a}+} W_{\mathfrak{h}}$$

とおく. ここで位数有限な F の Hecke character ψ で, 特に $\psi(\mathfrak{o}_{\mathfrak{h}}^{\times}) = \{1\}$ (すなわち conductor の nonarchimedean part が $\mathfrak{o}_F$) をみたすものをとる. このとき $\mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F, \psi)$ を次の (ii_a), (ii_b) をみたす $G_{\mathbf{A}}$ 上の複素数値関数 $\mathbf{f}$ 全体とする:

(ii_a) $s \in F_{\mathbf{A}}^{\times}, \alpha \in G, w \in W_{\mathfrak{h}}$ に対して, $\mathbf{f}(s\alpha x w) = \psi(s)\mathbf{f}(x)$ が成り立つ ($x \in G_{\mathbf{A}}$).

(ii_b) 任意の $x \in G_{\mathfrak{h}}$ に対して, $f_x \in \tilde{\mathcal{S}}_k$ が存在して, すべての $u \in G_{\mathfrak{a}+}$ について $\mathbf{f}(\det(x)^{-1}xu) = (f_x|_k u)(\mathbf{i})$ が成り立つ. (ここで $\mathbf{i} = (\sqrt{-1}, \dots, \sqrt{-1}) \in H^g$.)

この $\mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F, \psi)$ の元を weight k , level $\mathfrak{o}_F$, character ψ の (adelic な) **Hilbert cusp form** という.

次に $\mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F, \psi)$ に作用する Hecke 作用素を定義する. まず $R_{\mathbf{C}}(W, Y)$ を W, Y に関する $\mathbf{C}$ 上の Hecke algebra とする. $y \in Y$ について, $WyW = \bigsqcup_{i=1}^m Wy_i, (y_i)_{\mathfrak{a}} = 1$ と分解し, $\mathbf{f} \in \mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F, \psi)$ について,

$$(\mathbf{f}|WyW)(x) = \sum_{i=1}^m \mathbf{f}(x \det(y_i) y_i^{-1}) \quad (x \in G_{\mathbf{A}})$$

とおく. このとき $\mathbf{f}|WyW \in \mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F, \psi)$ をみたす. この作用を $R_{\mathbf{C}}(W, Y)$ 上に $\mathbf{C}$ -linearly に拡張すると, $\mathbf{C}$ -algebra としての準同型

$$\phi : R_{\mathbf{C}}(W, Y) \longrightarrow \text{End}_{\mathbf{C}}(\mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F, \psi))$$

が得られる. $\phi(R_{\mathbf{C}}(W, Y))$ の元を **Hecke operator** という.

特に F の整 ideal $\mathfrak{a}$ について,

$$T(\mathfrak{a}) = \sum_{\substack{WyW \in W \backslash Y/W \\ \det(y)\mathfrak{o}_F = \mathfrak{a}}} WyW \quad (\in R_{\mathbf{C}}(W, Y))$$

とおく. ここで $\phi(T(\mathfrak{a}))$ も同じく $T(\mathfrak{a})$ と表すことにする.

2 Trace Formula

$S_k(\mathfrak{o}_F, \psi)$ に作用する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{a})$ の trace の公式は, [Saito, Theorem 2.1] によって与えられている. その公式を level が $\mathfrak{o}_F$ の場合に制限し, 誤植等を修正したものが次の theorem である.

Theorem 2.1 (Saito). $F (\neq \mathbf{Q})$ を g 次総実代数体, ψ を位数有限な F の Hecke character で conductor の nonarchimedean part が $\mathfrak{o}_F$ であるもの, $k = (k_1, \dots, k_g) \in \mathbf{Z}^g$ を $k_j \geq 2$ でかつ各 $v_j \in \mathfrak{a}$ で $\psi_{v_j}(-1) = (-1)^{k_j}$ をみたすものとする. η を $\eta(\mathfrak{b}P(F)) = \mathfrak{b}^2 P^+(F)$ によって定義される $Cl(F)$ から $Cl^+(F)$ への写像とする. このとき, F の任意の整 ideal $\mathfrak{a}$ について,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} T(\mathfrak{a}) = & \varepsilon(\mathfrak{a}) \delta(\mathfrak{a}) \frac{2\zeta_F(2)|D_F|^{3/2}}{(2\pi)^{2g}} \psi\left(\left(\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})/2}\right)_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{h}}\right) \left(\prod_{j=1}^g (k_j - 1)\right) \\ & + \varepsilon(\mathfrak{a}) (-1)^g 2^{-1} \sum_{\mathfrak{m} \in M_{\mathfrak{a}}} \psi\left(\left(\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m})}\right)_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{h}}\right)^{-1} \\ & \cdot \sum_{n \in N_{\mathfrak{m}}} \sum_{s \in S_n} \left(\prod_{j=1}^g \Phi(s_j, n_j, k_j)\right) \sum_{\Lambda \in R_{sn}} \frac{h(\Lambda)}{h_F[\Lambda^{\times} : \mathfrak{o}_F^{\times}]} \\ & + (-1)^{g-1} b(k) \sum_{\lambda \in C(\psi)} \lambda\left(\left(\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})}\right)_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{h}}\right) \sum_{\substack{\mathfrak{b} | \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} \subset \mathfrak{o}_F \\ \mathfrak{b} \in I(F)}} N(\mathfrak{b}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで

- $\varepsilon(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}P^+(F) \in \eta(Cl(F))$ のとき 1, そうでないとき 0;
- $\delta(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ が square のとき 1, そうでないとき 0;
- $M_{\mathfrak{a}} = \{\mathfrak{m}\}$ は $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{o}_F$ かつ $\mathrm{gcd}(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{o}_F$ をみたす $\{\mathfrak{m}P(F) \in Cl(F) \mid \mathfrak{m}^2 \mathfrak{a} \in P^+(F)\}$ の完全代表系;
- 各 $\mathfrak{m} \in M_{\mathfrak{a}}$ について, $(n_{\mathfrak{m}})_F = \mathfrak{m}^2 \mathfrak{a}$ かつ $n_{\mathfrak{m}} \gg 0$ をみたす $n_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{o}_F$ をとり, $N_{\mathfrak{m}} = n_{\mathfrak{m}} E_F$ とおく, ここで E_F は $\{\varepsilon \in \mathfrak{o}_F^{\times} \mid \varepsilon \gg 0\} / (\mathfrak{o}_F^{\times})^2$ の完全代表系とする;
- 各 $n \in N_{\mathfrak{m}}$ について, $S_n = \{s \in \mathfrak{m} \mid s^2 - 4n \ll 0\}$;
- s_j, n_j を s, n の $F_{\mathfrak{a}}$ における v_j -component とし, α_j, β_j を $X^2 - s_j X + n_j$ の 2 根とする; このとき

$$\Phi(s_j, n_j, k_j) = \frac{\alpha_j^{k_j-1} - \beta_j^{k_j-1}}{\alpha_j - \beta_j} n_j^{-(k_j-2)/2};$$

- $K_{sn} = F(\sqrt{s^2 - 4n})$ とおき, R_{sn} を $\mathfrak{o}_F \subset \Lambda$ かつ $D_{K_{sn}/F}(\Lambda) \mid (s^2 - 4n)_F \mathfrak{m}^{-2}$ をみたす K_{sn} の order Λ 全体とする (ここで $D_{K_{sn}/F}(\Lambda)$ は K_{sn}/F に関する order Λ の relative discriminant である);
- $h(\Lambda)$ は Λ の類数, すなわち, $h(\Lambda) = |(K_{sn} \otimes_F F_{\mathfrak{h}})^{\times} / K_{sn}^{\times} \prod_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{h}} \Lambda_{\mathfrak{p}}^{\times}|$ (ここで $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ は $K_{sn} \otimes_F F_{\mathfrak{p}}$ における Λ の topological closure である);

- $b(k)$ は $k = (2, \dots, 2)$ のとき 1, そうでないとき 0;
- $C(\psi)$ は $\lambda^2 = \psi$ をみたす F の unramified Hecke character λ 全体とする.

さてこれより (2.1) の右辺の第 2 項の order の類数がはしる部分をより計算しやすい形に変形する.

有限次代数体 F , 及び F の 2 次拡大体 K に対して, $\mathfrak{o}_F$ を含む K の order 全体を $\mathcal{O}_{K/F}$ と表すことにする. このとき

Lemma 2.2. F を有限次代数体, K を F の 2 次拡大体とする. F の 整 ideal $\mathfrak{c}$ に対して, $\rho(\mathfrak{c}) = \mathfrak{o}_F + \mathfrak{c}\mathfrak{o}_K$ とおく. このとき ρ は F の 整 ideal 全体から $\mathcal{O}_{K/F}$ への全単射となる.

ここで ρ^{-1} を c と表し, $\Lambda \in \mathcal{O}_{K/F}$ に対して $c(\Lambda)$ を Λ の conductor と呼ぶ. いま $\mathfrak{p} \in \mathfrak{h}$ に対して,

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = \begin{cases} 1 & \mathfrak{p} \text{ が } K \text{ で分解するとき,} \\ -1 & \mathfrak{p} \text{ が } K \text{ で分解も分岐もしないとき,} \\ 0 & \mathfrak{p} \text{ が } K \text{ で分岐するとき} \end{cases}$$

とおく. このとき

Lemma 2.3. F を有限次総実代数体, K を F の 総虚 2 次拡大体とする. このとき $\Lambda \in \mathcal{O}_{K/F}$ に対して,

$$h(\Lambda) = h_K[\mathfrak{o}_K^\times : \Lambda^\times]^{-1} N(c(\Lambda)) \prod_{\substack{\mathfrak{p}|c(\Lambda) \\ \mathfrak{p} \in \mathfrak{h}}} \left(1 - \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) N(\mathfrak{p})^{-1}\right)$$

が成り立つ.

上の lemmas から次の proposition が得られる.

Proposition 2.4. 記号は Theorem 2.1 と同じとする. このとき

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} T(\mathfrak{a}) &= \varepsilon(\mathfrak{a}) \delta(\mathfrak{a}) (-1)^{g2^{1-g}} \zeta_F(-1) \psi \left(\left(\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})/2} \right)_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{h}} \right) \left(\prod_{j=1}^g (k_j - 1) \right) \\ &+ \varepsilon(\mathfrak{a}) (-1)^{g2^{-g}} \sum_{\mathfrak{m} \in M_{\mathfrak{a}}} \psi \left(\left(\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m})} \right)_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{h}} \right)^{-1} \sum_{n \in N_{\mathfrak{m}}} \sum_{s \in S_n} \left(\prod_{j=1}^g \Phi(s_j, n_j, k_j) \right) \\ &\cdot L_F(0, \chi_{K_{sn}/F}) \left(\prod_{\substack{\mathfrak{p}|f_{sn} \\ \left(\frac{K_{sn}}{\mathfrak{p}}\right) = -1 \\ \mathfrak{p} \in \mathfrak{h}}} \frac{N(\mathfrak{p})^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f_{sn})+1} + N(\mathfrak{p})^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f_{sn})} - 2}{N(\mathfrak{p}) - 1} \right) \\ &\cdot \left(\prod_{\substack{\mathfrak{p}|f_{sn} \\ \left(\frac{K_{sn}}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \\ \mathfrak{p} \in \mathfrak{h}}} N(\mathfrak{p})^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f_{sn})} \right) \left(\prod_{\substack{\mathfrak{p}|f_{sn} \\ \left(\frac{K_{sn}}{\mathfrak{p}}\right) = 0 \\ \mathfrak{p} \in \mathfrak{h}}} \frac{N(\mathfrak{p})^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f_{sn})+1} - 1}{N(\mathfrak{p}) - 1} \right) \\ &+ (-1)^{g-1} b(k) \sum_{\lambda \in C(\psi)} \lambda \left(\left(\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})} \right)_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{h}} \right) \sum_{\substack{\mathfrak{b}|\mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} \subset \mathfrak{o}_F \\ \mathfrak{b} \in I(F)}} N(\mathfrak{b}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

ここで $f_{sn} = ((s^2 - 4n)_F D_{K_{sn}/F}^{-1})^{1/2} m^{-1}$, $\chi_{K_{sn}/F}$ は拡大 K_{sn}/F に対応する *ideal character* である.

3 Computation for real quadratic fields

この section では F が実 2 次体の場合に, (2.2) を計算する方法について簡単に説明する.

$F = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ とおく. (ここで m は square-free integer とする.) F が実 2 次体のときには (2.2) は次の 3 つの factor を除いて容易に計算することができる:

$$(i) D_{K_{sn}/F}, \quad (ii) \left(\frac{K_{sn}}{\mathfrak{p}}\right), \quad (iii) L_F(0, \chi_{K_{sn}/F}).$$

よってこの 3 つの factor の求め方について述べる. ただし簡単のためここでは $m \equiv 1 \pmod{8\mathbf{Z}}$ をみたす場合についてのみ取り扱うことにする.

いま $\omega = (1 + \sqrt{m})/2$ とおく. $\beta, \gamma \in F$ について, β, γ で生成される $\mathbf{Z}$ -加群を $[\beta, \gamma]$ で表す. $\alpha = s^2 - 4n$ とおく. また K_{sn} を単に K と書くことにする. (このとき $K = F(\sqrt{\alpha})$, $0 \gg \alpha \in \mathfrak{o}_F$.) ここで $D_{K/F} = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{h}} D_{\mathfrak{p}}$ と prime ideal 分解しておく.

最初に, $\mathfrak{p}$ が odd prime (すなわち $\mathfrak{p} \nmid (2)_F$) の場合に $D_{\mathfrak{p}}$ 及び $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$ の求め方について述べる. まず $\mathfrak{p}$ が odd より $D_{\mathfrak{p}}$ は

$$D_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \mathfrak{o}_F & 2 \mid \text{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha) \text{ のとき,} \\ \mathfrak{p} & \text{otherwise} \end{cases}$$

と表せるので, これによって $D_{\mathfrak{p}}$ が決定できる. 一方 $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$ については Dedekind の判別定理より

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = 0 \iff \mathfrak{p} \mid D_{\mathfrak{p}}$$

という関係がなりたっているので, $\mathfrak{p} \nmid D_{\mathfrak{p}}$ をみたす場合のみ考えればよい. ここで次の proposition が成り立つ.

Proposition 3.1. m を $m \equiv 1 \pmod{4\mathbf{Z}}$ をみたす square-free positive integer とし, $F = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ とおく. $K = F(\sqrt{\alpha})$ ($0 \gg \alpha \in \mathfrak{o}_F$) とし, $\alpha = a_1 + a_2\omega$ ($a_1, a_2 \in \mathbf{Z}$) とおく. $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p} \nmid D_{\mathfrak{p}}$ をみたす F の odd prime ideal とし, p を $\mathfrak{p}$ の下にある素数とする. $t = \text{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha)$ とおく. 特に p が $F/\mathbf{Q}$ で分解するとき, $\mathfrak{p} = [p, r + \omega]$ ($r \in \mathbf{Z}$), $l = \text{ord}_p(\gcd(a_1, a_2))$ とおき, $u^2 \equiv m \pmod{p^{t-l+1}\mathbf{Z}}$ かつ $u \equiv -2r - 1 \pmod{p\mathbf{Z}}$ をみたす $u \in \mathbf{Z}$ をとる. ここで

$$a = \begin{cases} p^{-2t}(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2(1-m)/4) & p \text{ が } F/\mathbf{Q} \text{ で分解も分岐もしないとき,} \\ (mp^{-2})^{t/2}(a_1 - a_2(p-1)/2) & p \text{ が } F/\mathbf{Q} \text{ で分岐するとき,} \\ p^{-t}((p+1)/2)(2a_1 + a_2(1+u)) & p \text{ が } F/\mathbf{Q} \text{ で分解するとき} \end{cases}$$

とおく. このとき

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{a}{p}\right),$$

ここで $\left(\frac{a}{p}\right)$ は Legendre symbol である.

Proposition 3.1 は α が $F_{\mathfrak{p}}^2$ に含まれる必要十分条件を詳しく調べることによって得られる.

次に, $\mathfrak{p}$ が even prime (すなわち $\mathfrak{p} \mid (2)_F$) の場合の $D_{\mathfrak{p}}$ 及び $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$ の求め方であるが, これについては次の proposition が成り立つ.

Proposition 3.2. m を $m \equiv 1 \pmod{8\mathbf{Z}}$ をみたす square-free positive integer とし, $F = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ とおく. $K = F(\sqrt{\alpha})$ ($0 \gg \alpha \in \mathfrak{o}_F$) とし, $\alpha = a_1 + a_2\omega$ ($a_1, a_2 \in \mathbf{Z}$) とおく. $\mathfrak{p}$ を F の even prime ideal とする. いま $\mathfrak{p}^2 \nmid (\alpha)_F$ であると仮定する. ここで $l = (m-1)/8$, $\mathfrak{p} = [2, r + \omega]$ ($r = 0$ or 1) とおく. さらに

$$A_m = \{(a, b) \in \mathbf{Z}^2 \mid a + b(2l(-1)^r + r) - 1 \in 8\mathbf{Z}\},$$

$$A'_m = \{(a, b) \in \mathbf{Z}^2 \mid a - b(2l - r) - 1 \in 4\mathbf{Z}\}$$

とおく. このとき

$$\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = \begin{cases} 1 & \mathfrak{p} \nmid (\alpha)_F, (a_1, a_2) \in A_m \text{ のとき,} \\ -1 & \mathfrak{p} \nmid (\alpha)_F, (a_1, a_2) \notin A_m, (a_1, a_2) \in A'_m \text{ のとき,} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

及び

$$D_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \mathfrak{o}_F & \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0 \text{ のとき,} \\ \mathfrak{p}^2 & \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = 0, \mathfrak{p} \nmid (\alpha)_F \text{ のとき,} \\ \mathfrak{p}^3 & \mathfrak{p} \mid (\alpha)_F \text{ のとき} \end{cases}$$

をみたす.

ここで Proposition 3.2 における条件 $\mathfrak{p}^2 \nmid (\alpha)_F$ はなんら問題はない. というのは, たとえ α がその条件をみたさなかったとしても, $K = F(\sqrt{\alpha_1})$, $\mathfrak{p}^2 \nmid (\alpha_1)_F$ をみたす $\alpha_1 \in \mathfrak{o}_F$ をとることができるので, その α_1 に対して Proposition 3.2 を適用してやればよい.

最後に, [Shintani] において一般の総実代数体 F に対して開発された“新谷の方法”による $L_F(0, \chi_{K/F})$ の求め方について述べる.

さて [Okazaki] は新谷公式を F が特に実 2 次体の場合に適用し, K/F に対応する ideal character の値を Legendre symbol 及び Hilbert symbol で表すことで L -関数の値を計算した. その結果を整理すると次のようになる:

$F, m, \alpha, K, a_1, a_2$ は Proposition 3.1 と同じとする. ε を 1 よりも大きい F の基本単数とし,

$$\varepsilon_+ = \begin{cases} \varepsilon & \varepsilon \gg 0 \text{ のとき,} \\ \varepsilon^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく. $\varepsilon_+ = e + e'\omega$ をみたす $e, e' \in \mathbf{Z}$ をとる. $a_1, \dots, a_{h_F^+}$ をすべての μ で $\mathfrak{a}_{\mu} \subset \mathfrak{o}_F$ をみたす $Cl^+(F)$ の完全代表系とする. $1 \leq \mu \leq h_F^+$ について,

$$d_{\mu}[d'_{\mu}, d''_{\mu} + \omega] = \mathfrak{a}_{\mu} D_{K/F},$$

$d_{\mu}, d'_{\mu} > 0, 0 \leq d''_{\mu} < d'_{\mu}$ をみたす $d_{\mu}, d'_{\mu}, d''_{\mu} \in \mathbf{Z}$ が一意的に決まる. また $s_{\mu}, s'_{\mu}, Q_{\mu} \in \mathbf{Z}$ を次のようにとる:

(i) $\mathfrak{a}_\mu D_{K/F} \in P(F)$ のとき,

$$(s_\mu + s'_\mu \omega)_F = \mathfrak{a}_\mu D_{K/F}$$

をみたす s_μ, s'_μ をとり,

$$Q_\mu = 1$$

とおく.

(ii) $\mathfrak{a}_\mu D_{K/F} \notin P(F)$ のとき, $\gcd(\mathfrak{q}_\mu, (\alpha)_F) = \mathfrak{o}_F$, $\mathfrak{q}_\mu \mathfrak{a}_\mu D_{K/F} \in P(F)$ をみたす F の odd split prime ideal $\mathfrak{q}_\mu$ をとり, $\mathfrak{q}_\mu = [q_\mu, r_\mu + \omega]$ ($q_\mu, r_\mu \in \mathbf{Z}$) と表す. そして

$$(s_\mu + s'_\mu \omega)_F = \mathfrak{q}_\mu \mathfrak{a}_\mu D_{K/F}$$

をみたす s_μ, s'_μ をとり,

$$Q_\mu = \left(\frac{a_1 - a_2 r_\mu}{q_\mu} \right)$$

とおく.

さらに, $1 \leq i \leq d_\mu$, $1 \leq j \leq e' d_\mu d'_\mu$ について,

$$r_{\mu ij} \equiv e' d'_\mu i - (e + e' (d''_\mu + 1)) j \pmod{e' d_\mu d'_\mu \mathbf{Z}}$$

をみたす整数 $1 \leq r_{\mu ij} \leq e' d_\mu d'_\mu$ をとり,

$$\begin{aligned} B_{\mu ij} &= 4^{-1} (e' d_\mu d'_\mu)^{-2} ((2e + e') (r_{\mu ij}^2 + j^2) + 4r_{\mu ij} j) \\ &\quad - 4^{-1} (e' d_\mu d'_\mu)^{-1} (2e + e' + 2) (r_{\mu ij} + j) \\ &\quad + 12^{-1} (2e + e' + 3), \end{aligned}$$

$$u_{\mu ij} = (e' d_\mu d'_\mu)^{-1} \left(r_{\mu ij} s_\mu + j \left(e s_\mu + e' s'_\mu \frac{m-1}{4} \right) \right),$$

$$v_{\mu ij} = (e' d_\mu d'_\mu)^{-1} \left(r_{\mu ij} s'_\mu + j (e s'_\mu + e' s_\mu + e' s'_\mu) \right)$$

とおく. (このとき $u_{\mu ij}, v_{\mu ij} \in \mathbf{Z}$ であることに注意.) ここで F の odd prime ideal $\mathfrak{p}$, $u + v\omega \in \mathfrak{o}_F$ に対して,

$$\chi_{\mathfrak{p}}(u + v\omega) = \begin{cases} \left(\frac{N_{F/\mathbf{Q}}(u+v\omega)}{p} \right) & \mathfrak{p} = (p)_F \text{ のとき,} \\ \left(\frac{u-vr}{p} \right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく (ここで p は $\mathfrak{p}$ の下にある素数, r は $\mathfrak{p} = [p, r + \omega]$ をみたす整数). また $D_{K/F}$ を割る F の even prime ideal $\mathfrak{p}$ と $\beta \in \mathfrak{o}_F$ に対して,

$$\chi_{\mathfrak{p}}(\beta) = \begin{cases} (\beta, \alpha)_{F_{\mathfrak{p}}} & \mathfrak{p} \nmid (\beta)_F \text{ のとき,} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく (ここで $(\cdot, \cdot)_{F_p}$ は Hilbert symbol). このとき

$$L_F(0, \chi_{K/F}) = \sum_{\mu=1}^{h_F^+} \operatorname{sgn}(N_{F/\mathbf{Q}}(s_\mu + s'_\mu \omega)) Q_\mu \cdot \left(\sum_{i=1}^{d_\mu} \sum_{j=1}^{e' d_\mu d'_\mu} B_{\mu ij} \prod_{\substack{\mathfrak{p} | D_{K/F} \\ \mathfrak{p} \in \mathfrak{h}}} \chi_{\mathfrak{p}}(u_{\mu ij} + v_{\mu ij} \omega) + \sum_{l=1}^{d_\mu} \frac{2l - d_\mu}{2d_\mu} \prod_{\substack{\mathfrak{p} | D_{K/F} \\ \mathfrak{p} \in \mathfrak{h}}} \chi_{\mathfrak{p}}(l d_\mu^{-1}(s_\mu + s'_\mu \omega)) \right) \quad (3.1)$$

が成り立つ.

よって even prime ideal $\mathfrak{p}$ に対して Hilbert symbol $(\beta, \alpha)_{F_p}$ ($\alpha, \beta \in \mathfrak{o}_F - \{0\}$) が計算できれば, (3.1) によって $L_F(0, \chi_{K/F})$ を求めることができる. ここで $m \equiv 1 \pmod{8\mathbf{Z}}$ の場合には次の proposition が成り立つ.

Proposition 3.3. m を $m \equiv 1 \pmod{8\mathbf{Z}}$ をみたす square-free positive integer とし, $F = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ とおく. F の even prime ideal $\mathfrak{p} = [2, r + \omega]$ ($r = 0$ or 1) をとる. $\beta_1, \beta_2 \in \mathfrak{o}_F - \{0\}$ について, $\beta_j = c_j + d_j \omega$ ($c_j, d_j \in \mathbf{Z}$) とおく. ここで $l_j = \min\{\operatorname{ord}_2(2c_j + d_j), \operatorname{ord}_2(d_j)\}$ とおき, $u_j^2 \equiv m \pmod{2^{\operatorname{ord}_p(\beta_j) - l_j + 5}\mathbf{Z}}$, $u_j \equiv -2r - 1 \pmod{4\mathbf{Z}}$ をみたす $u_j \in \mathbf{Z}$ をとる. そして $t_j = 2^{-\operatorname{ord}_p(\beta_j)}(c_j + d_j(1 + u_j)/2)$ とおく. このとき

$$(\beta_1, \beta_2)_{F_p} = (-1)^{(t_1-1)(t_2-1)/4 + \operatorname{ord}_p(\beta_1)(t_2^2-1)/8 + \operatorname{ord}_p(\beta_2)(t_1^2-1)/8}$$

である.

4 Numerical Example

この section では, $F = \mathbf{Q}(\sqrt{401})$ の場合に Hecke 作用素の固有値について考察する. このとき F の類数は広義及び狭義ともに 5 である. ここでは特に $k = (2, 2)$, ψ が identity character 1 (すなわち $\psi(F_{\mathbf{A}}^\times) = \{1\}$) の場合のみ取り扱うことにする.

まず $\mathcal{S}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, 1)$ は次のように分解される:

$$\mathcal{S}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, 1) = \mathcal{S}_{(2,2)}^N(\mathfrak{o}_F, 1) \oplus \mathcal{S}_{(2,2)}^0(\mathfrak{o}_F, 1),$$

ここで $\mathcal{S}_{(2,2)}^N(\mathfrak{o}_F, 1)$ は level 401 の “Neben”-type の elliptic cusp forms の空間 $S_2(\Gamma_0(401), \left(\frac{401}{\cdot}\right))$ からの Base change lift, $\mathcal{S}_{(2,2)}^0(\mathfrak{o}_F, 1)$ は $\mathcal{S}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, 1)$ の “ F -proper” な部分空間, すなわち $\mathcal{S}_{(2,2)}^N(\mathfrak{o}_F, 1)$ の standard な内積による直交補空間である. ここで $\mathcal{S}_{(2,2)}^N(\mathfrak{o}_F, 1)$ 及び $\mathcal{S}_{(2,2)}^0(\mathfrak{o}_F, 1)$ は $T(\mathfrak{a})$ の作用で閉じている.

いま $\dim_{\mathbf{C}} S_2(\Gamma_0(401), \left(\frac{401}{\cdot}\right)) = 32$ より $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{S}_{(2,2)}^N(\mathfrak{o}_F, 1) = 16$. 一方 (2.2) より $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{S}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, 1) = \operatorname{tr} T(\mathfrak{o}_F) = 24$. よって

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{S}_{(2,2)}^0(\mathfrak{o}_F, 1) = 8$$

である.

さて $T(\mathbf{a})$ を $\mathcal{S}_{(2,2)}^N(\mathfrak{o}_F, 1)$ に制限したものは良く知られている elliptic cusp forms の空間の trace formula によって計算することができる. そして $\mathcal{S}_{(2,2)}^0(\mathfrak{o}_F, 1)$ の部分が今回初めて計算されたところである. よって以後, この空間に対する固有値に注目する.

$\mathcal{S}_{(2,2)}^0(\mathfrak{o}_F, 1)$ における trace は $\mathcal{S}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, 1)$ における trace から $\mathcal{S}_{(2,2)}^0(\mathfrak{o}_F, 1)$ における trace を引くことによって求まる. そして Hecke の関係式と Newton の公式を用いると trace から固有多項式が得られる. Table 4.1 は F の split prime ideal $\mathfrak{p}$ に対する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{p})$ の $\mathcal{S}_{(2,2)}^0(\mathfrak{o}_F, 1)$ における固有多項式の表である. (ここで $\mathfrak{p}$ の範囲は $N(\mathfrak{p}) \leq 643$ をみたす単項な $\mathfrak{p}$, 及び $N(\mathfrak{p}) \leq 263$ をみたす非単項な $\mathfrak{p}$ である.)

このとき $T([2, \omega])$ の固有値は,

$$c_{ijl} = \frac{1}{40} \left(15 - (-1)^i 5\sqrt{5} + (-1)^{i+j} \sqrt{5} \sqrt{110 + 10\sqrt{5}} \right. \\ \left. + (-1)^l \sqrt{4900 - (-1)^i 100\sqrt{5} + (-1)^j (150 - (-1)^i 10\sqrt{5}) \sqrt{110 + 10\sqrt{5}}} \right)$$

($0 \leq i, j, l \leq 1$). ここで $\mathbf{f}|T([2, \omega]) = c_{000}\mathbf{f}$ をみたす $\mathcal{S}_{(2,2)}^0(\mathfrak{o}_F, 1)$ の primitive form $\mathbf{f}$ をとる. このとき

$$K_{\mathbf{f}} = \mathbf{Q} \left(\sqrt{4900 - 100\sqrt{5} + (150 - 10\sqrt{5}) \sqrt{110 + 10\sqrt{5}}} \right), \\ K_{\mathbf{f}}^+ = \mathbf{Q} \left(\sqrt{110 + 10\sqrt{5}} \right),$$

ここで $K_{\mathbf{f}}$ は $\mathbf{f}$ の Hecke field であり, $K_{\mathbf{f}}^+$ はすべての有理素数 p に対応する Hecke 作用素の固有値 $C_{\mathbf{f}}((p)_F)$ で生成される $K_{\mathbf{f}}$ の部分体である. (このとき $K_{\mathbf{f}}$ の $\mathbf{Q}$ 上の Galois closure は 128 次体である.) ここで

$$D_{K_{\mathbf{f}}/\mathbf{Q}} = 5^4 \cdot 29^2 \cdot 131 \cdot 139, \\ D_{K_{\mathbf{f}}^+/\mathbf{Q}} = 5^2 \cdot 29, \\ N(D_{K_{\mathbf{f}}/K_{\mathbf{f}}^+}) = 131 \cdot 139.$$

いま Table 4.1 の範囲の split prime ideal $\mathfrak{p}$ について, それに対応する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{p})$ の固有値 $C_{\mathbf{f}}(\mathfrak{p})$ によって生成される, $\mathfrak{o}_{K_{\mathbf{f}}^+}$ を含む $K_{\mathbf{f}}$ の order

$$\Lambda(\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}_{K_{\mathbf{f}}^+} + C_{\mathbf{f}}(\mathfrak{p})\mathfrak{o}_{K_{\mathbf{f}}^+}$$

を考え, その conductor

$$c(\Lambda(\mathfrak{p})) = (D_{K_{\mathbf{f}}/K_{\mathbf{f}}^+}(C_{\mathbf{f}}(\mathfrak{p})) \cdot D_{K_{\mathbf{f}}/K_{\mathbf{f}}^+}^{-1})^{1/2}$$

をとってみる. (これは $K_{\mathbf{f}}^+$ の ideal である.) その norm をとったものの表が Table 4.2 である.

このとき Table 4.2 の範囲のすべての単項な split prime ideal $\mathfrak{p}$ について

$$19 \mid N(c(\Lambda(\mathfrak{p})))$$

をみたしている. よって各 $c(\Lambda(\mathfrak{p}))$ は $(19)_{K_f^+}$ のいずれかの素因子で割れている.
これをもう少し詳しくみしてみる. いま

$$\mathfrak{P}_{19} = c(\Lambda([83, 30 + \omega]))$$

とおくと, これは K_f^+ の prime ideal で, $(19)_{K_f^+}$ は

$$(19)_{K_f^+} = \mathfrak{P}_{19} \mathfrak{P}'_{19} \mathfrak{P}''_{19}$$

と分解される. ここで $\mathfrak{P}'_{19}, \mathfrak{P}''_{19}$ は

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{19} \mathfrak{P}'_{19} &= [19, 4 + (1 + \sqrt{5})/2] \cdot \mathfrak{o}_{K_f^+}, \\ \mathfrak{P}''_{19} &= [19, 14 + (1 + \sqrt{5})/2] \cdot \mathfrak{o}_{K_f^+} \end{aligned}$$

で決まる K_f^+ の prime ideal である. そして実は Table 4.2 の範囲のすべての単項な split prime ideal $\mathfrak{p}$ について

$$\mathfrak{P}_{19} \mid c(\Lambda(\mathfrak{p}))$$

をみたしていることがわかる.

Table 4.1. $\mathbb{Q}(\sqrt{401})$ の split prime ideal $\mathfrak{p}$ に対する $T(\mathfrak{p})|_{S_{(2,2)}^0(\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}(\sqrt{401})}, I)}$ の固有多項式 $X^8 + a_1X^7 + \cdots + a_7X + a_8$ の係数:

$\mathfrak{p}$	$a_1,$	$a_2,$	$a_3,$	$a_4,$	$a_5,$	$a_6,$	$a_7,$	a_8
$[2, \omega]$	-3,	-10,	28,	37,	-78,	-58,	53,	19
$[5, \omega]$	-3,	-18,	41,	111,	-163,	-234,	155,	1
$[7, 5 + \omega]$	-6,	-12,	120,	-175,	-42,	175,	-83,	11
$[11, 7 + \omega]$	9,	10,	-101,	-253,	149,	918,	809,	179
$[29, 22 + \omega]$	13,	-5,	-523,	-408,	8053,	1917,	-48078,	38359
$[41, 27 + \omega]$	-16,	-90,	2332,	-2437,	-86432,	249407,	263905,	43909
$[43, 26 + \omega]$	-32,	309,	-148,	-11780,	43156,	18606,	-138350,	-42131
$[47, 44 + \omega]$	15,	-46,	-1114,	861,	24682,	-30282,	-133239,	211541
$[73, 39 + \omega]$	4,	-362,	-1343,	36721,	107356,	-1265768,	-1867352,	14282224
$[83, 30 + \omega]$	-32,	92,	5761,	-41264,	-341588,	3084758,	6681459,	-69332531
$[89, 60 + \omega]$	-10,	-278,	3166,	13505,	-241434,	703443,	-114403,	-611281
$[103, 85 + \omega]$	27,	-118,	-6456,	-10369,	372198,	1371298,	-3479619,	-15228421
$[109, 74 + \omega]$	29,	-186,	-10994,	-61417,	448682,	4111874,	7230513,	-1231091
$[113, 23 + \omega]$	-34,	88,	7570,	-77675,	-156608,	5544655,	-26618987,	40066931
$[149, 55 + \omega]$	-68,	1775,	-22208,	131704,	-237922,	-810800,	2670928,	1079011
$[151, 92 + \omega]$	-22,	-151,	5415,	-7430,	-329865,	1334049,	-291087,	-2791879
$[173, 110 + \omega]$	-11,	-381,	7795,	-37942,	-157229,	2060155,	-6349795,	5629151
$[179, 107 + \omega]$	-88,	2950,	-45092,	245937,	1261812,	-21112768,	83231088,	-104306576
$[181, 21 + \omega]$	-7,	-310,	2548,	18965,	-210804,	594832,	-493872,	-100624
$[197, 45 + \omega]$	40,	168,	-9515,	-110360,	121710,	6701416,	29340685,	31232399
$[223, 31 + \omega]$	-68,	1453,	-2076,	-317709,	3811290,	-9269721,	-49448362,	130826831
$[229, 57 + \omega]$	33,	-67,	-8851,	-51342,	253023,	1988777,	-1662381,	-18676169
$[239, 206 + \omega]$	-53,	1066,	-10574,	54335,	-132516,	96784,	72897,	-69191
$[241, 167 + \omega]$	-35,	218,	2705,	-15695,	-84085,	59836,	48125,	-30371
$[257, 122 + \omega]$	10,	-1119,	-14842,	336025,	6080144,	-7871441,	-548680256,	-2339785241
$[263, 201 + \omega]$	-36,	-295,	12183,	91010,	-605219,	-5055489,	-2431643,	17176609
$[337, 172 + \omega]$	-47,	105,	24343,	-327430,	-1820659,	57625757,	-337202462,	582948571
$[379, 103 + \omega]$	-25,	-1214,	26233,	458881,	-6336001,	-81101528,	302094243,	3696976091
$[383, 205 + \omega]$	-63,	286,	61218,	-1739923,	17945914,	-49335124,	-306466744,	1582083824
$[397, 197 + \omega]$	-77,	690,	64185,	-1089907,	-15159265,	255263350,	1030269191,	-910014589
$[421, 304 + \omega]$	48,	-494,	-47086,	-216435,	13127696,	123014259,	-842081917,	-9542329681
$[487, 70 + \omega]$	-25,	-1553,	38867,	743048,	-20170693,	-84273537,	3477790992,	-11951208719
$[499, 264 + \omega]$	-22,	-1402,	39386,	246139,	-13711178,	90023337,	71238749,	-717378001
$[643, 474 + \omega]$	-72,	-896,	147914,	-1370115,	-68019308,	937509055,	3125818491,	-4860460921

*: 単項 ideal

Table 4.2. $\mathbb{Q}(\sqrt{401})$ の split prime ideal $\mathfrak{p}$ に対する $c(\Lambda(\mathfrak{p}))$ の norm:

$\mathfrak{p}$	$N(c(\Lambda(\mathfrak{p})))$
$[2, \omega]$	1
$[5, \omega]$	1
$[7, 5 + \omega]$	1
$[11, 7 + \omega]$	1
$[29, 22 + \omega]$	1
$[41, 27 + \omega]$	31
$[43, 26 + \omega]$	31
$[47, 44 + \omega]$	31
$[73, 39 + \omega]$	3^4
$[83, 30 + \omega]$ *	19
$[89, 60 + \omega]$	41
$[103, 85 + \omega]$	23^2
$[109, 74 + \omega]$	$19 \cdot 29$
$[113, 23 + \omega]$	1
$[149, 55 + \omega]$	5^2
$[151, 92 + \omega]$	29
$[173, 110 + \omega]$	41
$[179, 107 + \omega]$	19
$[181, 21 + \omega]$	11
$[197, 45 + \omega]$	379
$[223, 31 + \omega]$	61
$[229, 57 + \omega]$	19
$[239, 206 + \omega]$	1
$[241, 167 + \omega]$	7^2
$[257, 122 + \omega]$ *	$19 \cdot 139$
$[263, 201 + \omega]$	409
$[337, 172 + \omega]$ *	$19 \cdot 41$
$[379, 103 + \omega]$ *	$19 \cdot 31$
$[383, 205 + \omega]$ *	$7^2 \cdot 19$
$[397, 197 + \omega]$ *	$19 \cdot 41$
$[421, 304 + \omega]$ *	$11 \cdot 19^2$
$[487, 70 + \omega]$ *	$19^2 \cdot 31$
$[499, 264 + \omega]$ *	$11^2 \cdot 19$
$[643, 474 + \omega]$ *	$19 \cdot 79$

* : 単項 ideal

References

- [Okada] K. Okada, *Hecke eigenvalues for real quadratic fields*, preprint.
- [Okazaki] R. Okazaki, *On evaluation of L -functions over real quadratic fields*, J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), 1125–1153.
- [Saito] H. Saito, *On an operator U_χ acting on the space of Hilbert cusp forms*, J. Math. Kyoto Univ. **24** (1984), 285–303.
- [Shimura] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. J. **45** (1978), 637–679.
- [Shintani] T. Shintani, *On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **23** (1976), 393–417.