

Lyapunov functional techniques on stability analysis for mathematical models

江夏洋一 (Yoichi Enatsu), 中田行彦 (Yukihiko Nakata)
早稲田大学・基幹理工学研究科

Department of Pure and Applied Mathematics, Waseda University

室谷義昭 (Yoshiaki Muroya)

早稲田大学・基幹理工学部

Department of Mathematics, Waseda University

1 導入

これまで、感染症の流行に伴い、種の時間変化に対する個体群動態に関する漸近挙動を調べるために、様々な数理モデル（微分方程式や差分方程式）が利用されてきた。Anderson と May によって考案された SIR (Susceptible-Infected-Recovered) 感染症モデル [1] は、現在にいたるまでの数理生物学の発展過程において特に有名であり、数学、生物学の双方において興味深い問題を与え続けている。現在に至っては、Korobeinikov [6] によって時間遅れをもたない、非線形接触項を含んだ感染症モデルをはじめ、ペストやマラリア、デング熱といった媒介生物のいる感染症の伝播を調べるために考案された、時間遅れをもつ SIR 感染症モデルや SIRS 感染症モデルにおいても、安定性解析に関する多くの結果が知られている。それらのモデルに対して安定性解析を行う過程で、平衡点のまわりでの線形化行列に対する固有値分布の導出、Dulac 関数による安定性判別法やリャプノフ関数法など、様々な解析手法が確立されており、特にリャプノフ関数によるアプローチに関しては、感染症モデルの大域漸近安定性解析において大変重要な役割を果たしてきた。この大域漸近安定性を調べることで、どの感染状態から時間発展しても、必ず系の長期的挙動がある一定の感染規模に収束する様子を示す結果を得ることができる。

近年では、Takeuchi ら [9] などの先覚的研究にもかかわらず、線形接触項を含んだ時間遅れをもつ SIR 感染症モデルにおいて、時間遅れが十分大きい場合での内部平衡点の大域安定性解析が長らく未解決問題として残っていたが、McCluskey [7, 8] により線形接触項、飽和型接触項を含んだ時間遅れをもつ SIR 感染症モデルにおけるリャプノフ関数の手法が開発され、遅れを持つ SIR 感染症モデルでの大域漸近安定性に関する完全解析がごく最近行われた。しかしながら、非線形接触項を含めた時間遅れをもつ感染症モデルにおける内部平衡点の大域安定性について知られている結果は非常に限定的である。

本講究録では、Korobeinikov [6] により提案された、時間遅れをもたないリャプノフ関数、および McCluskey [7, 8] により提案された時間遅れをもつリャプノフ関数を組み合わせることにより、ある

クラスの非線形感染接触項を含めた以下の時間遅れをもつ SIR 感染症モデルにおける大域漸近安定性を完全解析した [3] の内容紹介を中心に、関連する話題 [2, 4] も報告する。

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu - \int_0^h p(\tau) f(S(t), I(t-\tau)) d\tau - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \int_0^h p(\tau) f(S(t), I(t-\tau)) d\tau - (\mu + \sigma) I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \sigma I(t) - \mu R(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

このとき、初期条件は以下のように定める。

$$\begin{cases} S(\theta) = \phi_1(\theta), \quad I(\theta) = \phi_2(\theta), \quad R(\theta) = \phi_3(\theta), \\ \phi_i(\theta) \geq 0, \quad \theta \in [-h, 0], \quad \phi_i(0) > 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ (\phi_1(\theta), \phi_2(\theta), \phi_3(\theta)) \in C([-h, 0], \mathbb{R}_{+0}^3), \end{cases} \quad (1.2)$$

ただし、 $\mathbb{R}_{+0}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$ である。

$S(t), I(t), R(t)$ はそれぞれ時刻 t における感受性人口 (susceptibles), 感染者人口 (infected), 隔離された人口 (recovered/removed) を表す。 μ は感受性人口に含まれる出生率, および S, I, R の死亡率とし, σ は感染者の回復率を表し, これらはすべて正の定数とする。 また, h は非負の定数とし, 感染者が感染を拡大させる段階に至るまでの時間遅れの大きさを表す。 $p(\tau)$ は $[0, h]$ 上の非負連続関数で, $\int_0^h p(\tau) d\tau = 1$ を満たすとし, $f: \mathbb{R}_{+0}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{+0}$ は $\mathbb{R}_{+0}^2$ 上 C^1 級関数かつ, 任意の $S, I \geq 0$ に対して $f(0, I) = f(S, 0) = 0$ であること, および以下の仮定を満たすとする。

$$\begin{cases} \text{(H1)} \quad f(S, I) \text{ は } I > 0 \text{ において, } S \geq 0 \text{ に関する狭義単調増加関数かつ,} \\ \quad S \geq 0 \text{ において, } I \geq 0 \text{ に関する単調増加関数,} \\ \text{(H2)} \quad \phi(S, I) = \frac{f(S, I)}{I} \text{ は } S \geq 0 \text{ において, } I > 0 \text{ に関する有界かつ単調減少関数かつ,} \\ \quad K(S) \equiv \lim_{I \rightarrow +0} \phi(S, I) \text{ は } \mathbb{R}_{+0} \text{ 上の連続関数.} \end{cases}$$

(H1) および (H2) を満たす具体例としては, McCluskey [7, 8] における, 線形接触項 $f(S, I) = \beta SI$, 飽和接触項 $f(S, I) = \frac{\beta SI}{1+\alpha I}$ の場合, Huang ら [5] における $f(S, I) = F(S)G(I)$ の場合が挙げられる。ここで, (1.1) 式における基本再生産量 R_0 を次のように定義する。

$$R_0 = \frac{K(S_0)}{\mu + \sigma}, \quad S_0 = 1. \quad (1.3)$$

モデル (1.1) は必ず境界平衡点 $E_0 = (S_0, 0, 0)$ をもち, この点は感染症の駆逐を示す平衡状態である。一方, $R_0 > 1$ ならば, モデル (1.1) は E_0 の加えて, 唯一の内部平衡点 $E_* = (S^*, I^*, R^*)$, $S^* > 0$, $I^* > 0$, $R^* > 0$ をもつことがわかる。この点は感染症の流行を示す平衡状態である。

このとき, (1.1) 式の解 $(S(t), I(t), R(t))$ は $(0, +\infty)$ 上ただ一つ存在し, すべての $t \geq 0$ に対して $S(t) > 0, I(t) > 0, R(t) > 0$ であり, 以下の式が成立する。

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (S(t) + I(t) + R(t)) = 1. \quad (1.4)$$

本講究録の構成は以下の通りである。2 節では, あるクラスの非線形感染接触項を含む, 時間遅れをもつ SIR 感染症モデル (1.1) における平衡点の大域漸近安定性を調べる。3 節では, モデル (1.1) における内部平衡点の大域漸近安定性を示す際に用いたリャプノフ関数を, 感染症に対する免疫損失の効果を含む時間遅れをもつ SIRS モデルの大域解析に応用し (詳しくは文献 [4]), 4 節では, まとめと考察を行う。

2 主結果

本講究録で報告する主結果 (詳しくは文献 [3]) は以下の通りである.

定理 2.1 ([3]) モデル (1.1) において, $R_0 \leq 1$ ならば, E_0 はただ一つの平衡点であり, 大域漸近安定である.

(証明概略) (H1) および (H2) より, E_0 はモデル (1.1) におけるただ一つの平衡点であることは Korobeinikov [6] より明らかである. また, E_0 の大域漸近安定性を示すために, 以下のリャプノフ関数を考える.

$$U^0(t) = U_1^0(t) + I(t) + U_+^0(t),$$

ただし,

$$\begin{aligned} U_1^0(t) &= \int_{S_0}^{S(t)} \left(1 - \frac{K(S_0)}{K(s)}\right) ds, \\ U_+^0(t) &= \int_0^h p(\tau) \int_{t-\tau}^t f(S(u+\tau), I(u)) \frac{K(S_0)}{K(S(u+\tau))} du d\tau. \end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned} \frac{dU^0(t)}{dt} &= -\mu(S(t) - S_0) \left(1 - \frac{K(S_0)}{K(S(t))}\right) \\ &\quad + \int_0^h p(\tau) \left\{ \frac{\phi(S(t+\tau), I(t))}{\mu + \sigma} \cdot \frac{K(S_0)}{K(S(t+\tau))} - 1 \right\} (\mu + \sigma) I(t) d\tau \end{aligned}$$

であり, (H1) より, 以下が成り立つ.

$$-\mu(S(t) - S_0) \left(1 - \frac{K(S_0)}{K(S(t))}\right) \leq 0,$$

ただし, 等号が成立するのは $S(t) = S_0$ ときのみである. さらに, (H2) より,

$$\frac{\phi(S(t+\tau), I(t))}{\mu + \sigma} \cdot \frac{K(S_0)}{K(S(t+\tau))} \leq \frac{K(S(t+\tau))}{\mu + \sigma} \cdot \frac{K(S_0)}{K(S(t+\tau))} = \frac{K(S_0)}{\mu + \sigma} = R_0.$$

従って, $R_0 \leq 1$ において $\frac{dU^0(t)}{dt} \leq 0$ が全ての $t \geq 0$ に対して成立し, Lyapunov-La Salle asymptotic stability theorem の適用により, E_0 は大域漸近安定であることが示される. $\square$

補題 2.1 ([3]) モデル (1.1) において, $R_0 > 1$ ならば, 以下が成立する.

$$\begin{cases} \liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq v_1, \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq v_2 := qI^* \exp(-(\mu + \sigma)\rho h), \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} R(t) \geq v_3 := \frac{\sigma v_2}{\mu}, \end{cases}$$

ただし, $v = v_1 > 0$ は $\mu - K(v) - \mu v = 0$ を満たすただ一つの正根であり, $q > 0$, および $\rho \geq 1$ は以下の式を満たす.

$$S^* < \frac{\mu - K(S_0)qI^*}{\mu} (1 - e^{-\mu\rho h}), \quad 0 < q < \frac{\mu}{K(S_0)I^*}. \quad (2.1)$$

定理 2.2 ([3]) モデル (1.1) において, $R_0 > 1$ ならば, E_* は大域漸近安定である.

定理 2.2 を示す際, 以下の重要補題を用いる.

補題 2.2 ([3]) モデル (1.1) がただ一つの内部平衡点 E_* をもつとき, すべての $t \geq 0, 0 \leq \tau \leq h$ に対して, 以下が成立する.

$$g\left(\frac{I(t)}{I^*}\right) - g\left(\frac{f(S(t+\tau), I(t))}{f(S(t+\tau), I^*)}\right) \geq 0, \quad (2.2)$$

ただし, $g(x) = x - 1 - \ln x \geq 0$ である.

(証明概略) (H1) および (H2) より次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & g\left(\frac{I(t)}{I^*}\right) - g\left(\frac{f(S(t+\tau), I(t))}{f(S(t+\tau), I^*)}\right) \\ & \geq g'\left(\frac{f(S(t+\tau), I(t))}{f(S(t+\tau), I^*)}\right) \left(\frac{I(t)}{I^*} - \frac{f(S(t+\tau), I(t))}{f(S(t+\tau), I^*)}\right) \\ & = \frac{I(t) \{\phi(S(t+\tau), I^*) - \phi(S(t+\tau), I(t))\} \{f(S(t+\tau), I(t)) - f(S(t+\tau), I^*)\}}{f(S(t+\tau), I(t))f(S(t+\tau), I^*)} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

よって, 補題は示される. $\square$

(定理 2.2 の証明概略) 以下のリャプノフ関数を考える.

$$U^*(t) = U_1^*(t) + U_+^*(t), \quad (2.4)$$

ただし,

$$\begin{cases} U_1^*(t) = \int_{S^*}^{S(t)} \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(s, I^*)}\right) ds + I(t) - I^* - I^* \ln \frac{I(t)}{I^*}, \\ U_+^*(t) = f(S^*, I^*) \int_0^h p(\tau) \int_{t-\tau}^t g\left(\frac{f(S(u+\tau), I(u))}{f(S(u+\tau), I^*)}\right) du d\tau. \end{cases} \quad (2.5)$$

モデル (1.1) より, 関係式 $\mu = \mu S^* + f(S^*, I^*)$, および $\mu + \sigma = \phi(S^*, I^*)$ を用いることで, 以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{dU^*(t)}{dt} &= \mu S^* \left(1 - \frac{S(t)}{S^*}\right) \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S(t), I^*)}\right) \\ &\quad + f(S^*, I^*) \int_0^h p(\tau) \left\{ g\left(\frac{f(S(t+\tau), I(t))}{f(S(t+\tau), I^*)}\right) - g\left(\frac{I(t)}{I^*}\right) \right\} d\tau \\ &\quad - f(S^*, I^*) \int_0^h p(\tau) \left\{ g\left(\frac{f(S^*, I^*)}{f(S(t), I^*)}\right) + g\left(\frac{I^*}{I(t)} \frac{f(S(t), I(t-\tau))}{f(S^*, I^*)}\right) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (2.6)$$

(H1) より, (2.6) において以下が成り立つ.

$$\left(1 - \frac{S(t)}{S^*}\right) \left(1 - \frac{f(S^*, I^*)}{f(S(t), I^*)}\right) \leq 0,$$

ただし, 等号が成立するのは $S(t) = S^*$ ときのみである. さらに, 補題 2.2 を用いることで, $R_0 > 1$ において $\frac{dU^*(t)}{dt} \leq 0$ が全ての $t \geq 0$ に対して成立することがわかる. 補題 2.1 より, モデル (1.1) はパーマネントであり, La Salle invariance principle の適用により, E_* は大域漸近安定であることが示される. $\square$

3 SIRS モデルへの応用

本章では、前章で用いたリャプノフ関数 $U^*(t)$ の処理において重要な役割を果たしていた補題 2.2 の特別な場合である補題 3.1 に着目し、以下の時間遅れをもつ SIRS モデルにおいて、その内部平衡点が大域漸近安定であるための十分条件を導出する。

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu - \mu S(t) - \int_0^h p(\tau) f(S(t), I(t-\tau)) d\tau + \delta R(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \int_0^h p(\tau) f(S(t), I(t-\tau)) d\tau - (\mu + \sigma) I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \sigma I(t) - (\mu + \delta) R(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

δ は単位回復個体群が感染症に対する免疫を損失し、再び感受性をもつ割合を表す。なお、モデル (3.1) の初期条件は、(1.2) 式と同一である。

定理 3.1 ([4]) モデル (3.1) において、 $R_0 < 1$ ならば、 E_0 はただ一つの平衡点であり、大域漸近安定である。

(証明概略) 以下のリャプノフ関数を考え、定理 2.1 と同様の証明を行う。

$$V^0(t) = I(t) + \int_0^h p(\tau) \int_{t-\tau}^t f(S(u+\tau), I(u)) du d\tau. \quad \square$$

また、 $R_0 > 1$ において、内部平衡点 $E_*^{(3.1)} \equiv (\bar{S}^*, \bar{I}^*, \bar{R}^*)$, $\bar{S}^* > 0$, $\bar{I}^* > 0$, $\bar{R}^* > 0$ がただ一つ存在し、次の定理が得られる。

定理 3.2 ([4]) モデル (3.1) において、 $R_0 > 1$ ならば、 $E_*^{(3.1)}$ は以下の条件の下で大域漸近安定である。

(C) ある C_i ($i = 0, 1, 2$) が存在して

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \begin{cases} \inf_{0 < \bar{S} \leq S_0} \frac{(S - \bar{S}^*) \bar{I}^*}{f(S, \bar{I}^*) - f(\bar{S}^*, \bar{I}^*)} \geq C_0 > 0, \\ \inf_{0 < \bar{S}, \bar{I} \leq S_0} \frac{f(S, \bar{I}) - f(S, \bar{I}^*)}{S(\bar{I} - \bar{I}^*)} \geq C_1 > 0, \quad \inf_{0 < \bar{S}, \bar{I} \leq S_0} \frac{\frac{f(S, \bar{I})}{S} - \frac{f(S, \bar{I}^*)}{S}}{\bar{I} - \bar{I}^*} \geq C_2 > 0, \end{cases} \\ \text{(II)} \quad & \delta^2 < 4C_0 C_1 C_2 (\mu + \delta)(\mu + \gamma) \frac{f(v_1, \bar{I}^*)}{\bar{I}^*}. \end{aligned}$$

定理 3.2 を示す際、以下の重要補題を用いる。

補題 3.1 ([4]) モデル (3.1) がただ一つの内部平衡点 $E_*^{(3.1)}$ をもつとき、条件 (C) の下で、すべての $t \geq 0$, $0 \leq \tau \leq h$ に対して以下が成立する。

$$\left(1 - \frac{S(t)}{\bar{S}^*}\right) \left(1 - \frac{f(\bar{S}^*, \bar{I}^*)}{f(S(t), \bar{I}^*)}\right) \leq -C_0 \frac{f(S(t), \bar{I}^*)}{\bar{S}^* \bar{I}^*} \left(1 - \frac{f(\bar{S}^*, \bar{I}^*)}{f(S(t), \bar{I}^*)}\right)^2 \quad (3.2)$$

および

$$g\left(\frac{I(t)}{\bar{I}^*}\right) - g\left(\frac{f(S(t+\tau), I(t))}{f(S(t+\tau), \bar{I}^*)}\right) \geq C_1 C_2 \bar{I}^* \left(\frac{I(t)}{\bar{I}^*} - 1\right)^2, \quad (3.3)$$

ただし、等号が成立するのは $S(t) = \bar{S}^*$ および $I(t) = \bar{I}^*$ がそれぞれ成立するときのみである。

(定理 3.2 の証明概略) 定理 2.2 で与えたリャプノフ関数 $U^*(t)$ を用いて, 内部平衡点の大域安定性を調べる. (モデル (3.1) においても補題 2.1 が成り立っていることに注意する.)

(1.1) 式と同様, (3.1) 式においても (1.4) が成り立つ, すなわち, 平面 $S + I + R = 1$ が $\mathbb{R}_{+0}^3$ 内の大域吸引領域であることがわかる. よって, モデル (3.1) における内部平衡点 $E_*^{(3.1)}$ の大域安定性を調べるためには, 関係式 $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$ を (3.1) 式に代入した, 以下のモデルを持つ同一の内部平衡点 $E_*^{(3.1)}$ の大域安定性を調べれば十分である.

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu - \mu S(t) - \int_0^h p(\tau) f(S(t), I(t-\tau)) d\tau + \delta \{1 - S(t) - I(t)\}, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \int_0^h p(\tau) f(S(t), I(t-\tau)) d\tau - (\mu + \sigma) I(t). \end{cases} \quad (3.4)$$

まずはじめに, (3.4) の解に沿って $\frac{dU^*(t)}{dt}$ を求めると, 以下が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{dU^*(t)}{dt} &= (\mu + \delta) \bar{S}^* \left(1 - \frac{S(t)}{\bar{S}^*}\right) \left(1 - \frac{f(\bar{S}^*, \bar{I}^*)}{f(S(t), \bar{I}^*)}\right) + \delta \left(1 - \frac{f(\bar{S}^*, \bar{I}^*)}{f(S(t), \bar{I}^*)}\right) (\bar{I}^* - I(t)) \\ &\quad + \int_0^h p(\tau) \left[f(\bar{S}^*, \bar{I}^*) \left\{ -g\left(\frac{f(\bar{S}^*, \bar{I}^*)}{f(S(t), \bar{I}^*)}\right) - g\left(\frac{\bar{I}^*}{I(t)} \frac{f(S(t), I(t-\tau))}{f(\bar{S}^*, \bar{I}^*)}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + g\left(\frac{f(S(t+\tau), I(t))}{f(S(t+\tau), \bar{I}^*)}\right) - g\left(\frac{I(t)}{\bar{I}^*}\right) \right\} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.5)$$

次に, 補題 3.1 を (3.5) 式に適用することにより,

$$\begin{aligned} \frac{dU^*(t)}{dt} &\leq (\mu + \delta) \bar{S}^* \left(1 - \frac{S(t)}{\bar{S}^*}\right) \left(1 - \frac{f(\bar{S}^*, \bar{I}^*)}{f(S(t), \bar{I}^*)}\right) + \delta \left(1 - \frac{f(\bar{S}^*, \bar{I}^*)}{f(S(t), \bar{I}^*)}\right) (\bar{I}^* - I(t)) \\ &\quad + \int_0^h p(\tau) \left[f(\bar{S}^*, \bar{I}^*) \left\{ g\left(\frac{f(S(t+\tau), I(t))}{f(S(t+\tau), \bar{I}^*)}\right) - g\left(\frac{I(t)}{\bar{I}^*}\right) \right\} \right] d\tau \\ &\leq -\left\{ \frac{C_0}{\bar{I}^*} f(S(t), \bar{I}^*) (\mu + \delta) \left(1 - \frac{f(\bar{S}^*, \bar{I}^*)}{f(S(t), \bar{I}^*)}\right)^2 + \delta \bar{I}^* \left(1 - \frac{f(\bar{S}^*, \bar{I}^*)}{f(S(t), \bar{I}^*)}\right) \left(\frac{I(t)}{\bar{I}^*} - 1\right) \right. \\ &\quad \left. + C_1 C_2 (\mu + \gamma) (\bar{I}^*)^2 \left(\frac{I(t)}{\bar{I}^*} - 1\right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

ここで, 補題 2.1 より, 任意の $0 < \varepsilon < v_1$ に対し, ある $T_\varepsilon > 0$ が存在し, 任意の $t > T_\varepsilon$ に対し, $S(t) > v_1 - \varepsilon$ が成立する. さらに (II) より, $\varepsilon > 0$ を以下が成り立つように十分小さく取ることができる.

$$\delta^2 - 4C_0 C_1 C_2 (\mu + \delta) (\mu + \gamma) \frac{f(v_1 - \varepsilon, \bar{I}^*)}{\bar{I}^*} < 0.$$

従って,

$$\begin{aligned} &(\delta \bar{I}^*)^2 - 4C_0 C_1 C_2 \bar{I}^* (\mu + \delta) (\mu + \gamma) f(S(t), \bar{I}^*) \\ &< (\bar{I}^*)^2 \left\{ \delta^2 - 4C_0 C_1 C_2 (\mu + \delta) (\mu + \gamma) \frac{f(v_1 - \varepsilon, \bar{I}^*)}{\bar{I}^*} \right\} < 0. \end{aligned}$$

以上の議論より, $R_0 > 1$ において $\frac{dU^*(t)}{dt} \leq 0$ が全ての $t > T_\varepsilon$ に対して成立することがわかり, 等号が成立するのは $S(t) = \bar{S}^*$ および $I(t) = \bar{I}^*$ が成立するときのみである. また, 補題 2.1 より, モデ

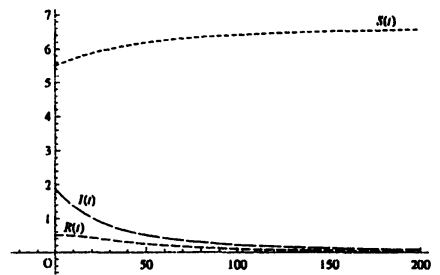


図 1: $\beta = 0.006$ ($R_0 < 1$), $\delta = 0.02$ の場合.

ル (3.1) はパーマネントであり, La Salle invariance principle の適用により, $E_*^{(3,1)}$ は大域漸近安定であることが示される. $\square$

ここで, 飽和接触項 $f(S, I) = \frac{\beta SI}{1+\alpha I}$ を含んだ時間遅れをもつ SIRS 感染症モデル (3.1) (詳しくは文献 [10]) に対して, 免疫損失項 δ の値に着目しながら, $\tau = 0.1$, $\alpha = 1$, $B = 0.2$, $\gamma = 0.015$, $\mu = 0.03$ なるパラメータ設定の下で数値シミュレーションを行う.

まずはじめに, $\beta = 0.006$ の場合を考える. このとき, $R_0 = 0.88 \dots < 1$ であるので, 定理 3.1 よりモデル (3.1) の境界平衡点 $E_0 = (6.66 \dots, 0, 0)$ は任意の δ に対して大域漸近安定であることがわかる. 図 1 は $\delta = 0.02$ としたときの計算結果である.

次に, $\beta = 0.05$ の場合, $R_0 = 7.41 \dots > 1$ であるので, 定理 3.2 よりモデル (3.1) の内部平衡点が $0 < \delta < \delta^* \equiv 0.0205 \dots$ に対して大域漸近安定であることがわかる. これは, Xu and Ma [10, Theorem 3.1] によって得られた大域安定性条件を満たさない例の一つであり, (I) および (II) がその条件を改善していることも述べておきたい. 図 2 は $\delta = 0.007 < \delta^*$ としたときの計算結果であり, $E_*^{(3,1)} = (3.151 \dots, 2.501 \dots, 1.014 \dots)$ となる. 一方で, 図 3 により, $\delta = 0.06 \geq \delta^*$ の場合においてもモデル (3.1) の内部平衡点 $E_*^{(3,1)} = (3.411 \dots, 2.790 \dots, 0.465 \dots)$ が大域漸近安定であることが見られるのは興味深い点であり, 十分大きい免疫損失項 δ に対する内部平衡点の大域安定性判別は現在も未解決の問題である.

4 結論

本講究録では, 非線形感染接触項を含めた時間遅れをもつ SIR, SIRS 感染症モデルにおいて, Korošnikov [6] と McCluskey [7, 8] によるリャプノフ関数法を組み合わせることにより, 各平衡点の大域漸近安定性解析を行った. 特に, 補題 2.2 は SIR 感染症モデル (1.1) における内部平衡点の大域漸近安定性の完全解析を達成する過程で大変重要な役割を果たしている. また, 補題 3.1 に着目することで, SIRS 感染症モデル (3.1) においても非線形感染接触項を支配する関数 f が I に関する飽和効果 (H2) および (I) を満たす場合, 対応する十分小さい免疫損失項 δ に対して, 内部平衡点の大域安定性条件を導出できた.

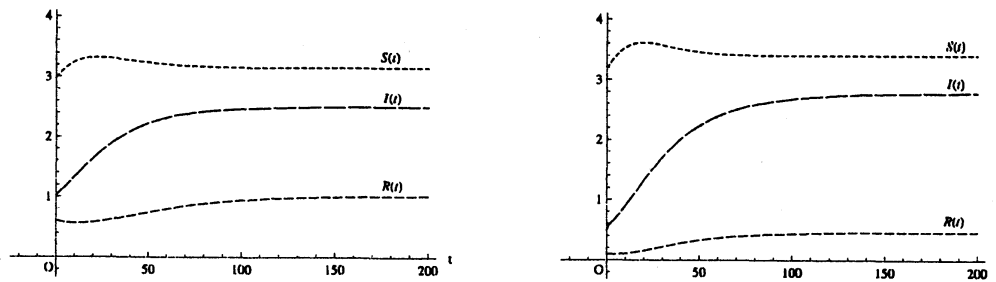


図 2: $\beta = 0.05$ ($R_0 > 1$), $\delta = 0.007 < \delta^*$ の場合. 図 3: $\beta = 0.05$ ($R_0 > 1$), $\delta = 0.06 \geq \delta^*$ の場合.

我々の解析手法は、第3節での非線形感染接触項を含めた時間遅れをもつ SIRS 感染症モデルだけでなく、各種のグループ感染症モデルや、それらの離散化モデル (Enatsu ら [2]) における大域解析にも応用が可能である。その際、モデルの permanence 証明法における各解の具体的な上極限、および下極限評価が重要になる場合があり、それらを求める単調法も現在開発中であり、リアプノフ関数法との組み合わせによる解析手法も有力と考えられる。これらは別の機会に紹介したい。

謝辞 2010 年の 1 月より 2 月末にかけての日独博士課程交流協定での著者達のダルムシュタット工科大学、およびナポリ大学での関連する研究成果 [2-4] の追加により、講演内容をより深める事が出来、本研究集会の責任者である森田善久先生に深く感謝します。

参考文献

- [1] R.M. Anderson, R.M. May, Population biology of infectious diseases: Part I, *Nature* **280** (1979) 361-367.
- [2] Y. Enatsu, Y. Nakata and Y. Muroya, Global stability for a class of discrete SIR epidemic models, *Math. Biol. Engi.* **2** (2010) 347-361.
- [3] Y. Enatsu, Y. Nakata and Y. Muroya, Global stability of SIR epidemic models with a wide class of nonlinear incidence rates and distributed delays *submitted*.
- [4] Y. Enatsu, E. Messina, Y. Muroya, Y. Nakata, E. Russo, and A. Vecchio, Global stability of SIRS epidemic models with a wide class of nonlinear incidence rates and distributed delays, *in preparation*.
- [5] G. Huang, Y. Takeuchi, W. Ma and D. Wei, Global stability for delay SIR and SEIR epidemic models with nonlinear incidence rate, *Bull. Math. Biol.*, doi:10.1007/s11538-009-9487-6.
- [6] A. Korobeinikov, Global properties of infectious disease models with nonlinear incidence, *Bull. Math. Biol.* **69** (2007) 1871-1886.
- [7] C.C. McCluskey, Complete global stability for an SIR epidemic model with delay-Distributed or discrete, *Nonl. Anal. RWA.* **11** (2010) 55-59.
- [8] C.C. McCluskey, Global stability for an SIR epidemic model with delay and nonlinear incidence, *Nonl. Anal. RWA.* doi:10.1016/j.nonrwa.2009.11.005.
- [9] Y. Takeuchi, W. Ma, E. Beretta, Global asymptotic properties of a delay SIR epidemic model with finite incubation times, *Nonlinear Anal.* **42** (2000) 931-947.
- [10] R. Xu and Z. Ma, Stability of a delayed SIRS epidemic model with a nonlinear incidence rate, *Chaos, Solitons and Fractals.* **41** (2009) 2319-2325.