

微分非線形 Schrödinger 方程式の周期進行波解列

広島大学大学院理学研究科 今村 耕也 (Imamura Kouya)
Graduate School of Sciences
Hiroshima University

1 導入

本小論は [2] の続きである. 次の微分非線形 Schrödinger 方程式

$$iu_t + u_{xx} + i(|u|^2u)_x = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (1.1)$$

の周期進行波解について考察する. すなわち

$$u(t, x) = \phi(kx - \omega t) = \phi(\xi) \quad (\xi = kx - \omega t)$$

となる周期関数 $\phi(\xi)$ について考える. ここで

k : 波数, ω : 角振動数

であり, $\omega, k > 0$ としておく. (1.1) はプラズマ中の Alfvén 波の挙動を記述する電磁流体モデルの縮約方程式として [5] 等で導出された.

定理 1. (1.1) の周期進行波 $\phi(\xi)$

$$\begin{cases} \phi(\xi) = X(\xi) + iY(\xi) & (X(\xi), Y(\xi) \in \mathbb{R}), \\ \phi(0) = r_0 \in \mathbb{R}, \\ \phi'(0) = iD_0 \in i\mathbb{R}, \end{cases}$$

は次のように表現される:

$$\begin{aligned} X(\xi) &= \begin{cases} \sqrt{k}r \cos(d - r^2)\xi & (A = 0), \\ \frac{\sqrt{k}(U(\xi)^2 - B)}{A} & (A \neq 0), \end{cases} \\ Y(\xi) &= \begin{cases} \sqrt{k}r \sin(d - r^2)\xi & (A = 0), \\ -\frac{2\sqrt{k}U'(\xi)}{A} & (A \neq 0), \end{cases} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} A &= 4(r^3 - dr + D), \\ B &= r^4 - 2dr^2 - Ar + d^2, \\ r &= \frac{r_0}{\sqrt{k}}, \\ D &= \frac{D_0}{\sqrt{k}}, \\ d &= \frac{\omega}{k^2}. \end{aligned}$$

$U(\xi), U'(\xi)$ については, 形が複雑なので, §3 で述べることにする.

2 周期解の求め方

2.1 周期軌道

$u(t, x) = \phi(kx - \omega t) = \phi(\xi)$ ($\xi = kx - \omega t$) を (1.1) に代入すると

$$-i\omega\phi' + k^2\phi'' + ik(|\phi|^2\phi)' = 0 \quad \left(' = \frac{d}{d\xi}\right).$$

これを一回積分すると

$$-i\omega(\phi - \phi(0)) + k^2(\phi' - \phi'(0)) + ik(|\phi|^2\phi - |\phi(0)|^2\phi(0)) = 0.$$

$\phi(0) = r_0 \in \mathbb{R}$ とする. さらに, 次の補題 1 より, $\phi'(0)$ を $\phi(0) \perp \phi'(0)$, すなわち,

$$\phi'(0) = iD_0 \quad (D_0 \in \mathbb{R})$$

となるようにとることが出来る.

補題 1. $u(t, x)$ が (1.1) の解ならば, 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$v_r(t, x) := e^{i\theta} u(t, x)$$

も (1.1) の解である.

$\phi = X + iY$ ($X, Y \in \mathbb{R}$) とおくと

$$\begin{cases} X' = \frac{1}{k^2}(kX^2 + kY^2 - \omega)Y, \\ Y' = -\frac{1}{k^2}(kX^2 + kY^2 - \omega)X - \frac{\omega r_0}{k^2} + \frac{r_0^3}{k} + D_0. \end{cases}$$

$D_0 = 0$ とすると $(p, q) = (r_0, 0)$ が平衡解となる. よって, $D_0 \neq 0$ とできる. 以下, 簡単のため, $D_0 > 0$ とする. $X = \sqrt{k}p, Y = \sqrt{k}q, r_0 = \sqrt{k}r, D_0 = \sqrt{k}D$ でリスケールすると

$$\begin{cases} p' = (p^2 + q^2 - d)q, \\ q' = -(p^2 + q^2 - d)p + \frac{A}{4}. \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで $A = 0$ とすると

$$\begin{cases} p' = (r^2 - d)q, \\ q' = -(r^2 - d)p, \end{cases}$$

となり,

$$p + iq = re^{i(d-r^2)\xi}$$

すなわち

$$\phi(\xi) = \sqrt{k}re^{i(d-r^2)\xi}$$

を得る.

以下, $A \neq 0$ とする. (2.1) は

$$H(p, q) := \frac{1}{4}(p^2 + q^2)(p^2 + q^2 - 2d) - \frac{A}{4}p$$

をハミルトン関数とするハミルトン系である. よって周期軌道は $H(p, q)$ の等高線に含まれる. 従って, $(p, q) = (r, 0)$ を通る等高線を見つける必要がある. この等高線は

$$H(p, q) - H(r, 0) = 0$$

で定められる. これを解いて,

$$q^4 - 2(d - p^2)q^2 + p^4 - 2dp^2 - Ap - r^4 + 2dr^2 + Ar = 0.$$

q^2 について解くと

$$q^2 = \begin{cases} d - p^2 - \sqrt{f(p)} & (d \geq 0 \text{ かつ } |p + iq| \leq \sqrt{d}), \\ d - p^2 + \sqrt{f(p)} & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad (2.2)$$

ここで

$$f(p) := Ap + B$$

である.

$$U = \begin{cases} \sqrt{f(p)} & (d \geq 0 \text{ かつ } |p + iq| \leq \sqrt{d}), \\ -\sqrt{f(p)} & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

で変数変換すると

$$p = \frac{U^2 - B}{A}.$$

また, (2.1), (2.2) より, $p' = -Uq$ であるから

$$q = -\frac{2U'}{A}.$$

次に, U を ξ の関数として表す. ここでは $|p + iq| \leq \sqrt{d}$ ($d \geq 0$) の場合を考えるが, 他の場合も同様の方法により同じ結果 (すなわち (2.3)) を得る.

$$\begin{cases} p' = -\sqrt{f(p)}(d - p^2 - \sqrt{f(p)})^{1/2} =: -G(p), \\ p(0) = r. \end{cases}$$

これは次のように解ける.

$$\int_0^\xi \frac{p'(\xi)}{G(p(\xi))} d\xi = -\xi = \int_r^{p(\xi)} \frac{dp}{G(p)}$$

この最右辺を計算する.

$$R := d - r^2$$

とおくと

$$\int_r^{p(\xi)} \frac{dp}{G(p)} = 2 \int_R^U \frac{dU}{\sqrt{g(U)}}.$$

ここで

$$g(U) = -U^4 + 2BU^2 - A^2U + dA^2 - B^2.$$

よって

$$\xi = -2 \int_R^U \frac{dU}{\sqrt{g(U)}} \quad (2.3)$$

を得る.

(2.3) のように

$$\int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} \quad (F \text{ は } x \text{ の 3 次または 4 次関数})$$

の形をした積分は楕円積分と呼ばれ、普通は初等的な方法で求めることは出来ない。このため、ヤコビの楕円関数を導入する必要がある。

2.2 ヤコビの楕円関数

$$y = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\kappa^2 z^2)}} \quad (0 < \kappa < 1) \quad (2.4)$$

の逆関数を

$$z = \operatorname{sn} y = \operatorname{sn}(y, \kappa)$$

と記す。(2.4) の右辺を (第一種楕円積分の) 標準形と呼ぶ。

$$K = K(\kappa) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\kappa^2 z^2)}}$$

とおくと, $\operatorname{sn}(y, \kappa)$ は $4K$ を周期とする周期関数となる。また, $\operatorname{cn}, \operatorname{dn}$ を

$$\operatorname{cn}(y, \kappa) = \begin{cases} \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(y, \kappa)} & (-K \leq y \leq K), \\ -\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(y, \kappa)} & (K \leq y \leq 3K), \end{cases}$$

$$\operatorname{dn}(y, \kappa) = \sqrt{1 - \kappa^2 \operatorname{sn}^2(y, \kappa)},$$

のように定義する。 $\operatorname{cn} y$ は周期 $4K$, $\operatorname{dn} y$ は周期 $2K$ の関数である。微分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \operatorname{sn} y &= \operatorname{cn} y \operatorname{dn} y \\ \frac{d}{dy} \operatorname{cn} y &= -\operatorname{sn} y \operatorname{dn} y \\ \frac{d}{dy} \operatorname{dn} y &= -\kappa^2 \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y \end{aligned}$$

となる。詳細については, [1],[3],[4] 等を参照。

2.3 楕円積分の計算の準備

$$\int_R^U \frac{dU}{\sqrt{g(U)}}$$

を標準形にするとき、次の2つの情報が必要となる:

1. $g(U) = 0$ の実数解の (重根を含めた) 個数 (これを $i(g)$ とおく).
2. 実数解の大きさの順序 (R は何番目に大きい解であるか).

R は必ず $g(U) = 0$ の実数解となることに注意する.

まず, $i(g)$ が 2 と 4 のどちらになるか, という条件を求める. $g(U)$ は

$$g(U) = -(U - R)(U^3 + RU^2 - (2B - R^2)U + A^2 - (2B - R^2)R)$$

と因数分解できる. よって $i(g)$ の値を求めるには,

$$U^3 + RU^2 - (2B - R^2)U + A^2 - (2B - R^2)R = 0$$

の実数解の個数を求めればよい. このため, 次の補題を用いる.

補題 2. z の 3 次方程式

$$z^3 + az + b = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

が実数解を 3 つ持つための必要十分条件は,

$$b^2 + \frac{4}{27}a^3 \leq 0$$

となることである.

補題 2 を使うため, $U = U_0 - R/3$ とおくと

$$g(U) = -\left(U_0 - \frac{4}{3}R\right) \left\{ U_0^3 + \left(\frac{2}{3}R^2 - 2B\right)U_0 + A^2 - \frac{4}{3}BR + \frac{20}{27}R^3 \right\}.$$

(i) $r = 0$ のとき

補題 2 より, $i(g) = 4$ となる必要十分条件は

$$\begin{aligned} & \left(A^2 - \frac{4}{3}BR + \frac{20}{27}R^3 \right)^2 + \frac{4}{27} \left(\frac{2}{3}R^2 - 2B \right)^3 \\ &= \frac{256}{27} D^2 (27D^2 - 2d^3) \leq 0. \end{aligned}$$

よって

$$i(g) = \begin{cases} 4 & \left(d \geq 0 \text{ かつ } 0 < D \leq \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} d\sqrt{d} \right), \\ 2 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

(ii) $r \neq 0$ のとき

補題 2 より, $i(g) = 4$ となる必要十分条件は

$$\begin{aligned} & \left(A^2 - \frac{4}{3}BR + \frac{20}{27}R^3 \right)^2 + \frac{4}{27} \left(\frac{2}{3}R^2 - 2B \right)^3 \\ &= \frac{16}{27}r^6 A^2 \left\{ 27\tilde{D}^2 + 4(2 - 9\chi)\tilde{D} - 2\chi^3 + 8\chi^2 - 8\chi \right\} < 0 \end{aligned}$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} \tilde{D} &:= \frac{D}{r^3}, \\ \chi &:= \frac{d}{r^2} - 1. \end{aligned}$$

これにより,

$$i(g) = \begin{cases} 4 & \left(\chi \geq -\frac{2}{3} \text{ かつ } h_- \leq \tilde{D} \leq h_+ \right), \\ 2 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

ここで,

$$h_{\pm} := \frac{18\chi - 4 \pm \sqrt{2(3\chi + 2)^3}}{27}.$$

次に, 実数解の大きさの順序 (R は何番目に大きい) を考える. $i(g) = 2$ の場合は, $g'(R)$ の正負を調べればよい. $i(g) = 4$ の場合は, $g(U) = 0$ の R 以外の実数解を $P < Q < S$ とおくと, 以下の 3 つの情報

1. $g'(R)$ の正負,
2. $dA^2 - B^2 (= g(0))$ の正負,
3. R の正負,

および以下の 3 つの事実

1. $P + Q + R + S = 0$ ($g(U)$ の 3 次の項が 0 より),
2. $g(-R) = 2A^2R$,
3. R の大きさの順序が入れ替わるとき, $g'(R) = 0$ となる,

により, 実数解の大きさの順序が次ページのように決定される. なお, $g'(R)$ の正負については, $r = 0$ のときは $g'(R) = -16D^2$ より, 恒等的に $g'(R) < 0$ となる. また, $r \neq 0$ のときは

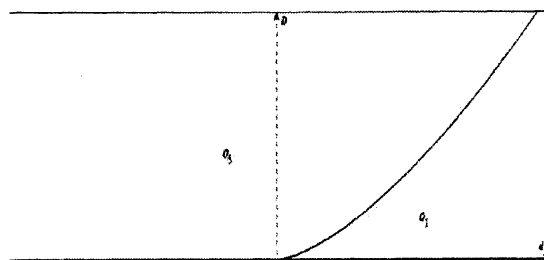
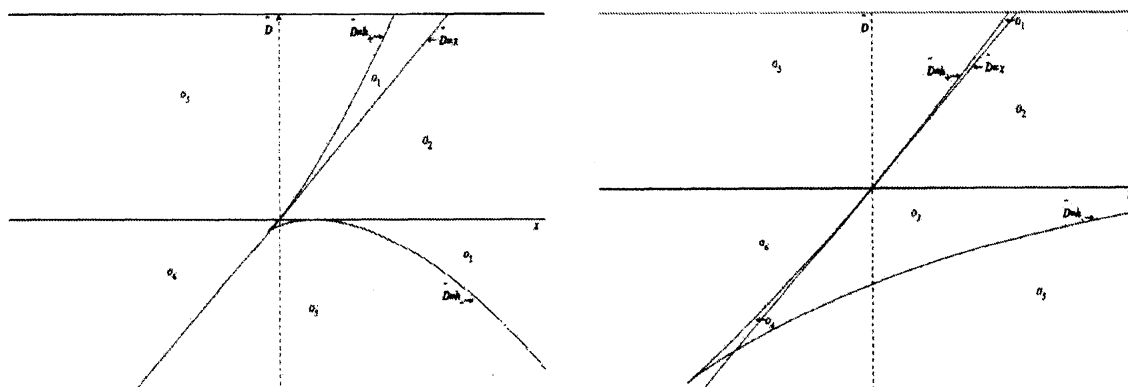
$$g'(R) = -16r^6 \tilde{D}(\tilde{D} - \chi)$$

より, $\tilde{D} > 0$ (すなわち $r > 0$) のとき

$$g'(R) \geq 0 \iff \tilde{D} \leq \chi,$$

$\tilde{D} < 0$ (すなわち $r < 0$) のとき

$$g'(R) \geq 0 \iff \tilde{D} \geq \chi,$$

Figure 1: $r = 0$ のときFigure 2: $r \neq 0$ のとき (右図は原点付近を拡大したもの)

境界は実線で表す (点線は境界ではない). 各領域での実数解の大きさの順序は次のようになる.

O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
$P < Q < S < R$	$P < Q < R < S$	$P < R < Q < S$	$R < P < Q < S$	$S < R$	$R < S$

となる.

例として, $\mathcal{O}_2$ の場合を考える. このとき, $g'(R) > 0, R > 0, i(g) = 4$ である. $g'(R) > 0$ より, R は 2 番目または 4 番目に大きい解である. ここで, R は 4 番目に大きい解 (すなわち一番小さい解) であるとする. $R > 0$ であるから, $P + Q + R + S = 0$ に矛盾する. 従って, R は 2 番目に大きい解である.

2.4 楕円積分の計算

この小節では, (2.3), すなわち $U(\xi)$ を, 楕円関数を用いて表現する計算方法を紹介する ([1],[3] 参照).

2.4.1 $i(g) = 4$ の場合

ここでは, $\mathcal{O}_2$ の場合 (すなわち $P < Q < R < S$ の場合) を考える.

$$U(\xi) = \frac{R + SV(\xi)^2}{1 + V(\xi)^2}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} I &:= \int_R^U \frac{dU}{\sqrt{g(U)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{(S-P)(S-Q)}} \int_0^V \frac{dV}{\sqrt{\left(\frac{R-P}{S-P} + V^2\right) \left(\frac{R-Q}{S-Q} + V^2\right)}} \end{aligned}$$

となる.

$$a = \sqrt{\frac{R-P}{S-P}}, \quad b = \sqrt{\frac{R-Q}{S-Q}}$$

とおく. さらに

$$V(\xi)^2 = \frac{b^2 W(\xi)^2}{1 - W(\xi)^2}$$

とおくと

$$I = \frac{2}{\sqrt{(R-P)(S-Q)}} \int_0^W \frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-\kappa^2 W^2)}},$$

ここで $\kappa = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ である. $2I = -\xi$ であったから,

$$\int_0^W \frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-\kappa^2 W^2)}} = -\frac{\sqrt{(R-P)(S-Q)}}{4} \xi.$$

よって

$$W(\xi) = -\operatorname{sn}(L\xi, \kappa) \quad \left(L := \frac{\sqrt{(R-P)(S-Q)}}{4} \right).$$

以上より

$$U(\xi) = \frac{(S-Q)R - (S-R)QW(\xi)^2}{S-Q - (S-R)W(\xi)^2}.$$

$i(g) = 4$ の他の領域も, 似たような方法で計算できる.

2.4.2 $i(g) = 2$ の場合

ここでは $\mathcal{O}_5$ の場合を考える ($\mathcal{O}_6$ の場合も同様の方法でできる). R 以外の実数解を S , 複素数解を $P, \bar{P}$ ($\text{Im} P > 0$) とおく. z の 2 次方程式

$$\begin{aligned} (b_1 - b_2)z^2 + 2(c_1 - c_2)z + b_2c_1 - b_1c_2 &= 0 \\ (b_1 = -(R+S), b_2 = -(P+\bar{P}), c_1 = RS, c_2 = P\bar{P}) \end{aligned}$$

は 2 つの実数解を持つ. その実数解を m, n とする.

$$U(\xi) := \frac{m + nV(\xi)}{1 + V(\xi)} \quad (2.5)$$

とおく. この変換により, R と S は実軸上に, 原点に対して対称に写り, P と $\bar{P}$ は虚軸上に, 原点に対して対称に写る. 写った点をそれぞれ $V_R, V_S, V_P, V_{\bar{P}}$ とおくと, $V_R = \tau, V_S = -\tau, V_P = \tilde{\tau}, V_{\bar{P}} = -\tilde{\tau}$ ($\tau, \tilde{\tau} > 0$) とすることができる.

$$\begin{cases} R = \frac{m + n\tau}{1 + \tau}, & S = \frac{m - n\tau}{1 - \tau} \\ P = \frac{m + in\tilde{\tau}}{1 + i\tilde{\tau}}, & \bar{P} = \frac{m - in\tilde{\tau}}{1 - i\tilde{\tau}} \end{cases}$$

まず τ を求める. 後の計算のために $\tau < 1$ の必要がある.

$$\begin{aligned} m &= \frac{(1+\tau)R + (1-\tau)S}{2} = \frac{(1+i\tilde{\tau})P + (1-i\tilde{\tau})\bar{P}}{2} \\ \Rightarrow \tilde{\tau} &= \frac{(R-S)\tau + R + S - P - \bar{P}}{i(P - \bar{P})} \end{aligned}$$

であり, また

$$\begin{aligned} n &= \frac{(1+\tau)R - (1-\tau)S}{2\tau} = \frac{(1+iP)\tilde{\tau} - (1-i\tilde{\tau})\bar{P}}{2\tilde{\tau}} \\ \Rightarrow \tilde{\tau} &= \frac{(P - \bar{P})\tau}{i\{R - S + (R + S - P - \bar{P})\tau\}} \end{aligned}$$

であるから

$$MN\tau^2 + (M^2 + N^2 + J^2)\tau + MN = 0.$$

ここで

$$\begin{aligned} M &:= R - S \\ N &:= R + S - P - \bar{P} (= 2(R + S)) \\ J &:= \frac{P - \bar{P}}{i} \end{aligned}$$

補題 3. $M > 0, N < 0$ および $J > 0$.

Proof. $R > 0$ のとき, $g(-R) < 0$ であるから, $N = 2(R + S) < 0$. また, $R < 0$ のとき, $S < R$ であるから, $N = 2(R + S) < 0$. 他は自明. $\square$

$M > 0, N < 0$ であり, また, $\tau < 1$ の必要があるから

$$\tau = \frac{-(M^2 + N^2 + J^2) + \sqrt{(M^2 + N^2 + J^2)^2 - 4M^2N^2}}{2MN}.$$

次に $\tilde{\tau}$ を求める.

$$\begin{aligned} m &= \frac{(1+\tau)R + (1-\tau)S}{2} = \frac{(1+i\tilde{\tau})P + (1-i\tilde{\tau})\bar{P}}{2} \\ \Rightarrow \tau &= \frac{P + \bar{P} - R - S + i(P - \bar{P})\tilde{\tau}}{R - S} \end{aligned}$$

であり, また

$$\begin{aligned} n &= \frac{(1+\tau)R - (1-\tau)S}{2\tau} = \frac{(1+iP)\tilde{\tau} - (1-i\tilde{\tau})\bar{P}}{2\tilde{\tau}} \\ \Rightarrow \tau &= \frac{-(R - S)\tilde{\tau}}{(R + S - P - \bar{P})\tilde{\tau} + i(P - \bar{P})} \end{aligned}$$

であるから

$$\tilde{\tau}^2 - \frac{M^2 - N^2 + J^2}{NJ} \tilde{\tau} - 1 = 0 \quad (*)$$

(*) の左辺に $\tilde{\tau} = 0$ を代入すると (左辺) = -1 となるので, (*) の解は正負 1 つずつ. $NJ < 0$ および $\tilde{\tau} > 0$ より

$$\tilde{\tau} = \frac{M^2 - N^2 + J^2 - \sqrt{(M^2 - N^2 + J^2)^2 + 4N^2J^2}}{2NJ}.$$

(2.5) より

$$\int_R^U \frac{dU}{\sqrt{g(U)}} = \frac{2\tilde{\tau}}{J} \sqrt{\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}} \int_\tau^V \frac{dV}{\sqrt{(\tau^2 - V^2)(\tilde{\tau}^2 + V^2)}}.$$

さらに

$$V(\xi) = \frac{\kappa \tilde{\tau} W(\xi)}{\sqrt{1 - \kappa^2 W(\xi)^2}}, \quad \kappa = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \tilde{\tau}^2}}$$

により変数変換すると

$$\int_\tau^V \frac{dV}{\sqrt{(\tau^2 - V^2)(\tilde{\tau}^2 + V^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \tilde{\tau}^2}} \int_1^W \frac{dW}{\sqrt{(1 - Z^2)(1 - \kappa^2 W^2)}}$$

となるから (この方程式より, $\tau < 1$ となることが必要),

$$\xi = -2 \int_R^U \frac{dU}{g(U)} = \frac{4\tilde{\tau}}{J} \sqrt{\frac{1-\tau^2}{(1+\tilde{\tau}^2)(\tau^2+\tilde{\tau}^2)}} \int_1^W \frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-\kappa^2 W^2)}}.$$

よって

$$\begin{aligned} & \int_0^W \frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-\kappa^2 W^2)}} \\ &= \int_0^1 \frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-\kappa^2 W^2)}} - \frac{J}{4\tilde{\tau}} \sqrt{\frac{(1+\tilde{\tau}^2)(\tau^2+\tilde{\tau}^2)}{1-\tau^2}} \xi. \end{aligned}$$

したがって

$$W(\xi) = \operatorname{sn}(K - L\xi, \kappa).$$

ここで

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-\kappa^2 W^2)}}, \\ L &= \frac{J}{4\tilde{\tau}} \sqrt{\frac{(1+\tilde{\tau}^2)(\tau^2+\tilde{\tau}^2)}{1-\tau^2}}. \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \frac{m+nV(\xi)}{1+V(\xi)} \\ &= \frac{m\sqrt{1-\kappa^2 W(\xi)^2} + n\kappa\tilde{\tau}W(\xi)}{\sqrt{1-\kappa^2 W(\xi)^2} + \kappa\tilde{\tau}W(\xi)} \end{aligned}$$

となる.

3 $U(\xi)$ の具体的な表現

この節では、各領域における $U(\xi)$ の表現を述べる.

3.1 $\mathcal{O}_1$ ($i(g) = 4, P < Q < S < R$) のとき

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \frac{(S-P)R - (S-R)PW(\xi)^2}{S-P - (S-R)W(\xi)^2}, \\ U'(\xi) &= \frac{2(S-P)(S-R)(R-P)W(\xi)W'(\xi)}{(S-P - (S-R)W(\xi)^2)^2}, \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \operatorname{sn}(L\xi, \kappa), \\ W'(\xi) &= -L\operatorname{cn}(L\xi, \kappa)\operatorname{dn}(L\xi, \kappa), \\ L &= \frac{\sqrt{(S-P)(R-Q)}}{4}, \\ \kappa &= \sqrt{\frac{(R-S)(Q-P)}{(R-Q)(S-P)}}. \end{aligned}$$

3.2 $\mathcal{O}_2$ ($i(g) = 4, P < Q < R < S$) のとき

$$U(\xi) = \frac{(S-Q)R - (S-R)QW(\xi)^2}{S-Q - (S-R)W(\xi)^2},$$

$$U'(\xi) = \frac{2(S-Q)(S-R)(R-Q)W(\xi)W'(\xi)}{(S-Q - (S-R)W(\xi)^2)^2},$$

ここで,

$$W(\xi) = \operatorname{sn}(L\xi, \kappa),$$

$$W'(\xi) = -L\operatorname{cn}(L\xi, \kappa)\operatorname{dn}(L\xi, \kappa),$$

$$L = \frac{\sqrt{(R-P)(S-Q)}}{4},$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{(S-R)(Q-P)}{(S-Q)(R-P)}}.$$

3.3 $\mathcal{O}_3$ ($i(g) = 4, P < R < Q < S$) のとき

$$U(\xi) = \frac{(Q-P)R - (R-P)QW(\xi)^2}{Q-P - (R-P)W(\xi)^2},$$

$$U'(\xi) = \frac{2(Q-P)(R-P)(R-Q)W(\xi)W'(\xi)}{(Q-P - (R-P)W(\xi)^2)^2},$$

ここで,

$$W(\xi) = \operatorname{sn}(L\xi, \kappa),$$

$$W'(\xi) = -L\operatorname{cn}(L\xi, \kappa)\operatorname{dn}(L\xi, \kappa),$$

$$L = \frac{\sqrt{(S-R)(Q-P)}}{4},$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{(S-Q)(R-P)}{(S-R)(Q-P)}}.$$

3.4 $\mathcal{O}_4$ ($i(g) = 4, R < P < Q < S$) のとき

$$U(\xi) = \frac{(S-P)R - (R-P)SW(\xi)^2}{S-P - (R-P)W(\xi)^2},$$

$$U'(\xi) = \frac{2(S-P)(R-P)(R-S)W(\xi)W'(\xi)}{(S-P - (R-P)W(\xi)^2)^2},$$

ここで,

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \operatorname{sn}(L\xi, \kappa), \\ W'(\xi) &= -L\operatorname{cn}(L\xi, \kappa)\operatorname{dn}(L\xi, \kappa), \\ L &= \frac{\sqrt{(S-P)(Q-R)}}{4}, \\ \kappa &= \sqrt{\frac{(S-Q)(P-R)}{(S-P)(Q-R)}}. \end{aligned}$$

3.5 $\mathcal{O}_5$ ($i(g) = 2, S < R$) のとき

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \frac{m\sqrt{1-\kappa^2 W(\xi)^2} + n\kappa\tilde{\tau}W(\xi)}{\sqrt{1-\kappa^2 W(\xi)^2} + \kappa\tilde{\tau}W(\xi)}, \\ U'(\xi) &= \frac{(n-m)\kappa\tilde{\tau}W'(\xi)}{(\sqrt{1-\kappa^2 W(\xi)^2} + \kappa\tilde{\tau}W(\xi))^2 \sqrt{1-\kappa^2 W(\xi)^2}}, \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \operatorname{sn}(K - L\xi, \kappa), \\ W'(\xi) &= -L\operatorname{cn}(K - L\xi, \kappa)\operatorname{dn}(K - L\xi, \kappa), \\ K &= \int_0^1 \frac{dZ}{(1-Z^2)(1-\kappa^2 Z^2)}, \\ L &= \frac{J}{4\tilde{\tau}} \sqrt{\frac{(1+\tilde{\tau}^2)(\tau^2+\tilde{\tau}^2)}{1-\tau^2}}, \\ \kappa &= \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+\tilde{\tau}^2}}, \\ \tau &= \frac{-(M^2+N^2+J^2) + \sqrt{(M^2+N^2+J^2)^2 - 4M^2N^2}}{2MN}, \\ \tilde{\tau} &= \frac{M^2-N^2+J^2 - \sqrt{(M^2-N^2+J^2)^2 + 4N^2J^2}}{2NJ}, \\ M &= R-S, \\ N &= R+S-P-\bar{P}, \\ J &= \frac{P-\bar{P}}{i}, \\ m &= \frac{(1+\tau)R + (1-\tau)S}{2}, \\ n &= \frac{(1+\tau)R - (1-\tau)S}{2\tau}. \end{aligned}$$

3.6 $\mathcal{O}_6$ ($i(g) = 2, R < S$) のとき

$$U(\xi) = \frac{m\sqrt{1 - \kappa^2 W(\xi)^2} + n\kappa\tilde{\tau}W(\xi)}{\sqrt{1 - \kappa^2 W(\xi)^2} + \kappa\tilde{\tau}W(\xi)},$$

$$U'(\xi) = \frac{(n - m)\kappa\tilde{\tau}W'(\xi)}{(\sqrt{1 - \kappa^2 W(\xi)^2} + \kappa\tilde{\tau}W(\xi))^2 \sqrt{1 - \kappa^2 W(\xi)^2}},$$

ここで,

$$W(\xi) = -\operatorname{sn}(K + L\xi, \kappa),$$

$$W'(\xi) = -L\operatorname{cn}(K + L\xi, \kappa)\operatorname{dn}(K + L\xi, \kappa),$$

$$K = \int_0^1 \frac{dZ}{(1 - Z^2)(1 - \kappa^2 Z^2)},$$

$$L = \frac{J}{4\tilde{\tau}} \sqrt{\frac{(1 + \tilde{\tau}^2)(\tau^2 + \tilde{\tau}^2)}{1 - \tau^2}},$$

$$\kappa = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \tilde{\tau}^2}},$$

$$\tau = \frac{(M^2 + N^2 + J^2) - \sqrt{(M^2 + N^2 + J^2)^2 - 4M^2 N^2}}{2MN},$$

$$\tilde{\tau} = \frac{M^2 - N^2 + J^2 - \sqrt{(M^2 - N^2 + J^2)^2 + 4N^2 J^2}}{2NJ},$$

$$M = R - S,$$

$$N = R + S - P - \bar{P},$$

$$J = \frac{P - \bar{P}}{i},$$

$$m = \frac{(1 + \tau)R + (1 - \tau)S}{2},$$

$$n = \frac{(1 + \tau)R - (1 - \tau)S}{2\tau}.$$

References

- [1] 安藤四郎, 楕円積分・楕円関数入門, 日新出版, 1970
- [2] K. Imamura and K. Sakamoto, Travelling pluse waves non-vanishing at infinity for the derivative nonlinear Schrödinger equation
- [3] 寺沢寛一, 自然科学者のための数学概論 (増訂版), 岩波書店, 1954
- [4] 戸田盛和, 楕円関数入門, 日本評論社, 2001
- [5] M. Wadati, H. Sanuki, K. Konno and Y. Ichikawa, Circular polarized nonlinear Alfvén waves — A new type of nonlinear evolution equation in plasma physics, Rocky Mountain J. Math. **8** Vol. 1 and 2, Winter and Spring (1978) 323-331.