

Derivation & point derivation

について

東教大・理 神保敏弥

§ 1. 序

Topological algebra 上の微分と点微分についての主な問題は、次の事を調べることである：

- ① 0 でない (有界) 微分や (有界) 点微分が, それぞれ存在するための必要十分条件,
- ② 微分又は点微分が, それぞれ有界微分や有界点微分となるための必要十分条件.

①, ② について, Banach algebra や有理関数の algebra $R(X)$ に対して, 多くの興味ある結果が得られている.

さらに, Banach algebra から順次他の topological algebra への拡張が, 試みられている. ここでの目的は, これらを簡潔に紹介することである.

§ 2. 定義と記号

定義 1. A : topological algebra

$\Leftrightarrow A$: ① 複素線形位相空間, ② 単位元をもつ可換多元環
③ 双線形写像 $(x, y) \rightarrow xy$ が, 各個連続.

A, B を topological algebras とするとき,

$H(A, B) \equiv \{h \mid h \text{ は } A \text{ から } B \text{ の上への algebra 準同形}\},$

$H_c(A, B) \equiv \{h \in H(A, B) \mid h \text{ は連続}\}$ とする.

$S(A) \equiv H(A, \mathbb{C})$ は, A の spectrum と言う. $S_c(A) \equiv H_c(A, \mathbb{C})$

M_A : A の maximal ideals の space .

$\text{rad}(A)$: A のすべての maximal ideals の 共通部分.

A^{-1} : A の可逆元の集合. $x \in A, h \in S(A)$ に対して,

$\hat{x}(h) \equiv h(x)$ で $\hat{x}$ を定める. $\hat{A} \equiv \{\hat{x} \mid x \in A\}.$

$S(A)$ の位相は, Gelfand 位相とする.

X を位相空間とするとき,

$F(X)$: X 上のすべての複素数値関数の algebra,

$B(X)$: X 上のすべての複素数値有界関数の algebra,

$C(X)$: X 上のすべての複素数値連続関数の algebra.

X を複素平面 $\mathbb{C}$ の compact set とするとき,

$R(X)$: X 上に極を持たぬすべての有理関数の algebra $R_0(X)$ の

X 上の uniform closure,

$A(X)$: X 上で連続, X° 上で analytic なすべての関数の algebra.

定義2. $B' \subset B$, $h \in H(A, B')$ に対して, 写像

$D: A \rightarrow B$ が h -微分 $\iff D: \textcircled{1}$ 線形写像,

$$\textcircled{2} \quad D(xy) = h(x)Dy + h(y)Dx, \quad \forall x, y \in A.$$

写像 $D: A \rightarrow B$ が h -連続微分

$\iff D: \textcircled{1} \quad h$ -微分, $\textcircled{2}$ 連続.

線形写像 D が有界のときは, h -有界微分 ともいう.

$$\mathcal{D}(A, B, h) \equiv \{D \mid D \text{ は } h\text{-微分}\}$$

$$\mathcal{D}_c(A, B, h) \equiv \{D \mid D \text{ は } h\text{-連続微分}\}.$$

h が, 恒等写像 id や Gelfand map $\wedge$ のとき, $\mathcal{D}(A, A, \text{id})$, $\mathcal{D}(A, B, \wedge)^{\dagger)}$ の元を単に 微分 といい, $\mathcal{D}(A, A)$, $\mathcal{D}(A, B)$ とそれぞれかく. 同様に連続のとき, 単に 連続 (又は 有界微分) といい, $\mathcal{D}_c(A, A)$, $\mathcal{D}_c(A, B)$ とかく.

特に, $h \in S(A)$, $B = \mathbb{C}$ のとき, $\mathcal{D}(A, \mathbb{C}, h)$ の元を h での点微分, $\mathcal{D}_c(A, \mathbb{C}, h)$ の元を, h での連続(又は有界)点微分 いう. $\dagger)$ ここでは $B \supset \hat{A}$ とする.

§3. 微分

定理1. (Singer & Wermer [1]) A : 可換 Banach algebra.

$$D \in \mathcal{D}_c(A, A) \Rightarrow D(A) \subset \text{rad}(A).$$

特に, A : semi-simple $\Rightarrow D = 0$.

証明. $\phi \in S(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in A$ に対して, $\gamma_\lambda(x) \equiv \phi(e^{\lambda \phi}(x))$ とおくと, $\gamma_\lambda \in S(A) = S_c(A)$ から, 関数論の Liouville の定理を

用いて, $\phi(Dx)=0. \therefore Dx \in \text{rad}(A).$

系1. (Šilov) 区間 $[a, b]$ 上での無限階微分可能なすべての複素数値関数の algebra $C^\infty[a, b]$ を Banach algebra とする norm は, 存在しない.

系2. 定理1の結論は, ϕ が同形連続ならば, ϕ -有界微分でも成立する.

次の定理は, 微分が, 有界微分と有限個の非有界点微分の和であることを, 示している.

定理2. (Curtis [5]). A : 単位元をもち regular, 可換, semi-simple Banach algebra. $D \in \mathcal{D}(A, B(S(A)))$.

$\Rightarrow$ 次の条件を満たす有限集合 $E \subset S(A)$ と $D_1 \in \mathcal{D}_c(A, B(S(A)))$ が存在する: ① $D_2 \equiv D - D_1$ とすると, $D_2 x(\phi) = 0, \forall x \in A, \phi \in S(A) - E$, ② $\phi \in E$ に対しては, $f_\phi(x) \equiv D_2 x(\phi)$ は, 非有界点微分である.

証明. 次の Bade と Curtis [3] の結果が有効な手段である:

『 $\|\cdot\|_1$: A を normed algebra とする一つの norm

$\mathcal{G} \equiv \{G \subset S(A) \mid G \text{ は open, } \text{car}(\hat{x}) \subset G \text{ なるすべての } x \in A \text{ に対して, } \|x\|_1 \leq M_G \|x\| \text{ なる定数 } M_G \text{ が, 存在する} \}$

$\Rightarrow$ 次の 1), 2) を満たす有限集合 F が存在する: 1) G が open, $\overline{G} \cap F = \emptyset \rightarrow G \in \mathcal{G}$, 2) $G \in \mathcal{G} \rightarrow G \cap F = \emptyset$.

さて、今 $\|x\|_1 \equiv \|x\| + \|Dx\|_\infty$, ここで $\|\cdot\|_\infty$ は sup-norm, とする. $E \equiv F$. $\phi \in E$ に対し, $f_\phi(x) \equiv Dx(\phi)$ は, uniform boundedness の原理を用いて, 有界線形関数であることがわかる. $E \neq \emptyset$, D が非有界のとき $D_1 x(\phi) \equiv Dx(\phi)$, $\forall \phi \in E$, $\equiv 0$, $\forall \phi \in E$, で D_1 を定めると, 有界となり $D_2 \equiv D - D_1$. 系 [5]. A は定理 2 と同じ $\Rightarrow \mathcal{B}(A, C(S(A))) \equiv \mathcal{B}_c(A, C(S(A)))$.

次の定理は, 下記の topological algebra $\mathcal{A}$ においては, 定理 2 の regularity の条件が, 不要な事を示している.

$\mathcal{A}$: ① 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の可換 algebra, ② 距離づけ可能な完備局所凸位相空間, ③ 乗法が連続, ④ 単位元 (1 とかく) を含む, ⑤ $\mathcal{A}^{-1}$ は 1 の近傍, ⑥, ② と ⑤ については, $\mathcal{A}$ の位相は semi-norm の列 $\{\|\cdot\|_i\}$ によって与えられ, $\|x - 1\|_1 < 1$, $x \in \mathcal{A} \longrightarrow x \in \mathcal{A}^{-1}$ とする.

$\Phi \equiv \{ \phi \in S(\mathcal{A}) \mid |\phi(x)| \leq \|x\|_1, \forall x \in \mathcal{A} \}$.

定理 3. (Johnson [9]) $\mathcal{A}$ と Φ は上記のものとする.

Φ は $\mathcal{A}$ の点を分離 $\Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) = \mathcal{B}_c(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$.

証明. 次の Lemma [9] が有効である: 『 $D \in \mathcal{B}(\mathcal{A}, F(\Phi))$, 無限個の $\phi_1, \phi_2, \dots \in \Phi$ に対して $x \rightarrow Dx(\phi)$ が不連続 $\Rightarrow Dx \notin B(\Phi)$ となる $x \in \mathcal{A}$ が存在する』。さて $Dx \in B(\Phi)$ より $x \rightarrow Dx(\phi)$ は, $\phi \neq \phi_1, \dots, \phi_n$ で有界. 計算で, $\phi_1, \dots, \phi_n$ でも有界となり, closed graph theorem

を用いて, D は連続となる.

定理 4. (Johnson [9]). A : 単位元をもつ可換 Banach algebra. $C(S(A))$ は, 点別収束より強い局所凸距離づけ可能な位相をもつ. $D \in \mathcal{D}(A, C(S(A)))$.

$\Rightarrow$ 次の条件を満たす直交中等元 $e_0, e_1, \dots, e_n \in A$ が存在する: 1) $e_0 + \dots + e_n = 1$, 2) $D|_{e_0 A}$ は連続, 3) 各 algebra $e_i A$, $i=1, \dots, n$, は一意の maximal ideal をもつ.

証明. 前の Lemma より, $\alpha \rightarrow D\alpha(\phi)$ の不連続な点を, $\phi_1, \dots, \phi_n \in L$, この中での孤立点を, $\psi_1, \dots, \psi_R$ とすると, Šilov の定理から, $\exists e_i \in A$ で $\psi_i(e_i) = 1, \phi(e_i) = 0, \forall \phi \neq \psi_i$. $e_i e_j = 0$ ($i \neq j$) となるので, 1) は $e_0 \equiv 1 - (e_1 + \dots + e_R)$ とすればよい. 2) は, $e_0 A \ni x_i \rightarrow 0, Dx_i \rightarrow y \Rightarrow y = 0$ を $De_i = 0$ と y の連続性によって言い, 故に closed graph theorem よりわかる. 3) は, 明らか.

§ 4. 点微分

Banach algebra の場合, 次の定理は, 点微分存在の必要十分条件として, よく知られている. 証明は, Hahn-Banach の定理を用いる.

定理 5. A : 単位元をもつ可換 Banach algebra, $\phi \in S(A)$ とすると,

$$\mathcal{D}(A, \mathbb{C}, \phi) \neq \{0\} \iff \ker \phi \neq (\ker \phi)^2$$

$$\mathcal{D}_c(A, \mathbb{C}, \phi) \neq \{0\} \iff \ker \phi \neq \overline{(\ker \phi)^2}.$$

さて, function algebra について考える.

A : X 上の function algebra.

$x \in X$ に対して, $\phi_x(f) \equiv f(x), \forall f \in A$.

X に, metric topology を $\|x - y\| \equiv \|\phi_x - \phi_y\|$ で入れる.

次の定理は, 単位元をもつ Banach algebra のときも, 成立するが, 定理の逆は, 正しくない.

定理 6. (Browder [12]) A : X 上の function algebra
 $x \in X$ は, 上の metric topology で, 孤立点でない.

$$\implies \mathcal{D}(A, \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\}$$

証明. 対偶を示す. $\ker \phi_x = (\ker \phi_x)^2$ とする.

$K \equiv \{ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i g_i \mid f_i, g_i \in \ker \phi_x, n \text{ は任意正整数},$

$$\lambda_i \in \mathbb{C}, \|f_i\| = \|g_i\| = 1, \sum |\lambda_i| \leq 1 \}.$$

$\ker \phi_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} nK$ より, Baire category theorem を用い

て, K が, 0 の近傍となるので, $\psi \in M^*$ に対して, $C\|\psi\|$

$\leq \sup \{ |\psi(f)| : f \in K \}$ なる $C > 0$ が, 存在する. ψ が,

かつ乗法的, $\neq 0$ ならば $\|\psi\| \geq C$ となる. 特に, ある $y \in X$

に対して, $\psi = \phi_y$ かつ $x \neq y$ ならば $\|\psi\| \leq \|x - y\|$ より

$$\|x - y\| \geq C.$$

次の定理は, $x \in X$ が peak sets の共通部分でもよい.

定理7. (cf [12], [16]) $A: X$ 上の function algebra
 $x \in X: \text{peak point} \Rightarrow \mathcal{D}(A, \mathbb{C}, \phi_x) = \{0\}$.

証明. $\ker \phi_x$ は approximate identity をもつので,
 Cohen の分解定理 [10] から, $\ker \phi_x = (\ker \phi_x)^2$ となる.

又, 単位元をもつ可換 Banach algebra A の $\ker \phi$ が,
 approximate identity をもつならば, $\mathcal{D}(A, \mathbb{C}, \phi) = \{0\}$.

さて, Gleason part との関連をみる.

Wermer は Dirichlet algebra, Hoffman は log-modular algebra, さらに Lumer は function algebra で $\phi \in S(A)$ が unique representing measure^{†)} をもつとき, それぞれ ϕ を含む Gleason part は, ϕ のみが, ϕ での analytic disc からなることを示した.

Sidney は, これに有界点微分を結びつけた.

†) $P_\phi \equiv \{ \psi \in S(A) \mid \|\psi - \phi\| < 2 \}$.

定理8. (Sidney) $A: X$ 上の function algebra
 $\phi \in S(A)$ は unique representing measure をもつ.

$\Rightarrow$ 1) $P_\phi = \{ \phi \}$, あるいは, 2) 次の条件を満たす単位開円板から P_ϕ (metric topology は A^* で...) の上への位相同形な写像 π が存在する: $\varphi \circ \pi$ ($\forall f \in A$) が正則, $\pi(0) = \phi$.
 そして 1) のとき, $\ker \phi = \overline{(\ker \phi)^2}$,
 2) のとき, $\overline{(\ker \phi)^n} / \overline{(\ker \phi)^{n+1}}$ は一次元である, $n \geq 0$.

次に $R(X)$ についての点微分を考える.

定理9. (Browder [12]) $x \in X$.

$\mathcal{D}(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \iff x$ は $R(X)$ の Choque 境界点でない.

証明. 定理6と「norm topologyで孤立点は Choque 境界点である」と [11]の定理から得られる.

系. [12] $R(X) = C(X) \iff \mathcal{D}(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) = \{0\}, \forall x \in X$.

Swiss cheeseに関しては, $R(X) \neq C(X)$ で, 0でない有界点微をもたぬ $R(X)$ の例として, Wermer [13]は, ある Swiss cheeseを作った. 点微分存在の十分条件は 次のものである.

定理10. (Browder) X : 中心 a_i , 半径 r_i の開円板 $D_i, i=1, 2, \dots$ を取り除いた Swiss cheese. $z \in X, z \notin \partial D_i$,
 $i=1, 2, \dots, |z| \neq 1, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{|z - a_i|^2} < \infty$

$\implies \mathcal{D}_c(R(X), \mathbb{C}, \phi_z) \neq \{0\}$.

証明 「 $\mathcal{D}_c(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \iff \exists k$ (定数) で
 $|f'(x)| \leq k \cdot \|f\|, \forall f \in R_c(X)$ となる」 であるので, Cauchy
 の公式を用いて $f'(x)$ を評価すればよい.

さて analytic capacity を用いて $R(X)$ の有界点微分の存在の必要十分条件を表わせる. 次の定理は Melnikov
 の結果の analogue のことである.

S^2 : Riemann sphere

$$\Delta(x, r) \equiv \{ z \in \mathbb{C} : |z - x| \leq r \}$$

$$A_n(x) \equiv \{ z \in \mathbb{C} : 1/2^{n+1} \leq |z - x| \leq 1/2^n \}$$

$U \subset \mathbb{C}$: 有界平面集合

$\mathcal{H}(U)$: 次の条件を満たす関数全体 : U のある compact subset 以外で analytic, 絶対値 1 以下, ∞ で 0 をとる.

$$\mathcal{O}(U) \equiv \{ f \in \mathcal{H}(U) \cap C(S^2) \mid \|f\| \leq 1 \}$$

$$\gamma(U) \equiv \sup \{ |f'(\infty)| : f \in \mathcal{H}(U) \}$$

$$\alpha(U) \equiv \sup \{ |f'(\infty)| : f \in \mathcal{O}(U) \}, \text{ ここで } f'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z). \quad \gamma(U), \alpha(U) \text{ をそれぞれ analytic capacity, continuous analytic capacity とする.}$$

定理 11. (Hallstrom [15]) $x \in X$,

$$\mathcal{O}_c(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \gamma(A_n(x) \setminus X) < \infty,$$

$$\mathcal{O}_c(A(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \alpha(A_n(x) \setminus X^\circ) < \infty.$$

証明. 略.

次の定理は, $R(X)$ の order n の有界点微分の存在するための必要十分条件で analytic capacity を用いての結果は [15] にみられる.

正整数 n に対して, $x \in X$ での $R(X)$ 上の order n の有界点微分が存在するとは, 次のときを言う:

$\forall f \in R_0(X)$ に対して, $|f^{(n)}(x)| \leq \text{const} \|f\|$ なる定数 const が存在する.

定理 12. (Wilken [17]) $x \in X$ で order $n \geq 1$ の $R(X)$ 上の 0 でない有界点微分が存在する $\iff$ 次の条件を満たす (complex) representing measure μ_x が, 存在する:

$$\int d|\mu_x|(z) / |z - x|^n < \infty$$

参考文献

Derivation ;

- [1] Singer I. M. and J. Wermer, Derivations on commutative normed algebras, 129 (1955), 260 - 264.
- [2] Kaplansky I., Derivations of Banach algebras, in Seminars on analytic functions, Vol 2, Princeton Univ Press, 1958.
- [3] Bade W. G. and P. C. Curtis, Jr., Homomorphisms of commutative Banach algebras, Amer. J. Math. 82 (1960), 589 - 608.
- [4] Rickart C. E. General Theory of Banach algebras, Van Nostrand, New York, 1960.
- [5] Curtis P. C., Jr., Derivations of commutative Banach algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961),

271-273

- [6] Rosenfeld M. Commutative F -algebras, *Pacif. J. Math.* 16(1966), 159-166.
- [7] Johnson E. and A.M. Singer, Continuity of derivations and a problem of Kaplansky, *Amer. J. Math.* 90(1968), 1067-1073.
- [8] Sinclair A.M. Continuous derivations on Banach algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* 20(1969), 166-170.
- [9] Johnson B.E. Continuity of derivations on commutative algebras, *Amer. J. Math.* 91(1969), 1-10.
- Point derivation ;
- [10] Cohen P.J. Factorization in group algebras, *Duke Math. J.* 26(1959), 199-206.
- [11] Curtis P.C., Jr and Figá-Talamanca, A. Factorization theorems for Banach algebras, in "Function Algebras", pp 169-185. Scott Foreman, 1966.
- [12] Browder A. Point derivations on function algebras, *J. Functional analysis* 1(1967), 22-27.

- [3] Wermer J., Bounded point derivations on certain Banach algebras, J. Functional Analysis, 1 (1967) 28-36.
- [4] Sidney S. J., Point derivations in certain sup-norm algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 131 (1968) 119-127.
- [5] Hallstrom A.P., On bounded point derivations and analytic capacity, J. Functional Analysis 4 (1969), 153-165.
- [6] Browder A., Introduction to Function Algebras, WA. Benjamin, INC, 1969, 63-78.
- [7] Wilken D.R., Bounded point derivations and representing measures on $R(X)$, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 371-373.