

最小自乗法における

Algorithm について

富山大文理 田中 孝一郎

§1. 序論.

パラメータ $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ を含む函数 $y = y(a, t)$ の $t = t_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $m \geq n$) における実験値を y_i とする。いま

$$S(a) = \sum_{i=1}^m \omega(t_i) (y(a, t_i) - y_i)^2$$

の値を最小にする a を求める問題としよう。こゝに $\omega(t)$ は $\omega(t_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) とする函数で weight function と呼ばれる。

さて、初めに $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$ を与えたとき、二函数 $y = b_1 e^{-b_2 t} \sin b_3 t$, $y = c_1 e^{-c_2 t} \sin c_3 t$ のグラフの交点を (t_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, m$) としよう。いま (t_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, m$; $m \geq 3$) と函数の型 $y(a, t) = a_1 e^{-a_2 t} \sin a_3 t$ を与えたとき、 $S(a)$ を最小にする a と

いて, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$ などをとることも出来る。このように $S(a)$ を最小にする a はただ一つに限らない。また D を n 次元 Euclid 空間 R^n の有界閉集合とし, D 全体での $S(a)$ の最小値を求めることは特別な場合を除き極めてむづかしい。この理由がわねわねは local な問題即ち 極小問題と扱う。そのとき

$$f_i'(a) = \sqrt{\omega(t_i)} (y(a, t_i) - y_i)$$

とおくことにする。つきのように一般化出来る。

$$x \in R^n, \quad h \in R^n, \quad f(x) \in R^m \quad (m \geq n)$$

$$\text{とし,} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_n),$$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)),$$

$$S'(x) = |f(x)|^2 \quad \left(\equiv \sum_{i=1}^m (f_i(x))^2 \right)$$

とする。そのとき (A1), (A2), (A3) を仮定する。

$$(A1) \quad R^n \text{ の領域 } D \text{ において } f \in C^2(D),$$

$$(A2) \quad \text{grad } S'(x) = 0 \text{ をみたす } x = \bar{x} \text{ が } D \text{ の中に存在する。}$$

$$(A3) \quad m \times n \text{ 行列 } A(x), \quad n \times n \text{ 行列 } C(x) \text{ は}$$

$$(1) \quad A(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right) \quad \left(\begin{matrix} i=1, 2, \dots, m \\ j=1, 2, \dots, n \end{matrix} \right),$$

$$(2) \quad C(x) = \left(\sum_{i=1}^m f_i(x) \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right) \quad (j, k = 1, 2, \dots, n),$$

$\|C(x)\|$ を $C(x)$ の norm とするとき

$$\min_{|h|=1} |A(x)h|^2 > \|C(x)\|.$$

この仮定のもとに $\bar{x} \in \cup C D$ を満たす近傍 U とし、
 $\min S'(x)$ とする x を決定する。この目的のため Jacobi の
 algorithm および Newton-Jacobi の algorithm を設定した
 とき Newton-Jacobi の algorithm の意味付けを行つたとき
 $f \in C^3(D)$ を仮定したが、今回は $f \in C^2(D)$ で同じ結果
 が成立することを示す。

§2. 最小乗法における Algorithm.

Jacobi の algorithm の基礎はつぎの補助定理1にある。

補助定理 1. “ x は固定されたベクトルとする。 $m \times n$
 行列 $A(x)$ の階数 n ($m \geq n$) ならば”

$$|A(x)h + f(x)|^2$$

の値を最小とする $h = \bar{h}$ は $A^*(x)$ を $A(x)$ の共役転置行列として
 連立一次方程式

$$A^*(x)A(x)\bar{h} = -A^*(x)f(x)$$

を満たす。”

と、絶対値の十分小さい h とおいて

$$f(x+h) \approx f(x) + A(x)h$$

が成立つ。この x は一変関数 f のベクトル、 $A(x)$ は $m \times n$ ($m \geq n$) の Jacobi 行列

$$A(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right) \quad \left(\begin{array}{l} i=1, 2, \dots, m \\ j=1, 2, \dots, n \end{array} \right)$$

である。 x のある近傍で $A(x)$ の階数は n であると仮定しよう。 $S(x) = |f(x)|^2$ の最小値を求めるため、適当な初期値 $x^{(0)}$ を選ぶ。 $|f(x^{(0)}+h)|$ の最小値をとる h を直接求めることは一般に簡単ではない。そこで $|f(x^{(0)}+h)| \approx |f(x^{(0)}) + A(x^{(0)})h|$ であること、 $|f(x^{(0)}) + A(x^{(0)})h|^2$ の最小値をとる $h = h^{(0)}$ は補助定理より

$$A^*(x^{(0)})A(x^{(0)})h^{(0)} = -A^*(x^{(0)})f(x^{(0)})$$

の根として求めるから、この $h^{(0)}$ を使って $|f(x^{(0)}+h)|^2$ の最小値と与える h の近似と考える。換言すれば $x = x^{(0)} + h^{(0)}$ を使って $|f(x)|^2$ の最小値をとる x の第1近似と考える。この意味から $x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(0)}$ とおく。

帰納法により数列 $\{x^{(s)}\}$, $\{h^{(s)}\}$ が得られる。この数列の求め方を Algorithm の形に書けば次のようになる。

Jacobi の Algorithm 適当な初期値 $x^{(0)}$ を選ぶ。

$x^{(0)}$ についての連立一次方程式

$$A^*(x^{(s)})A(x^{(s)})h^{(s)} = -A^*(x^{(s)})f(x^{(s)}) \quad (s=0, 1, 2, \dots)$$

により $h^{(s)}$ を定める。 $x^{(s+1)} = x^{(s)} + h^{(s)}$ とおく。

この algorithm を最小自乗法における Jacobi の algorithm という。

さて、最小自乗法において $S(x) = \sum (f_i(x))^2$ の値を最小にする x は $\text{grad } S(x) = 0$ を満たす。この方程式

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} f_i(x) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

の根を Newton 法で求めるとき、最小自乗法における Newton 法という。そのとき $g(x)$ の Jacobi 行列の (j, k) 要素は

$$\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_k} + f_i(x) \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right)$$

であるから $h^{(s)}$ に関する一次方程式は

$$(3) \quad (A^*(x^{(s)})A(x^{(s)}) + C(x^{(s)}))h^{(s)} = -A^*(x^{(s)})f(x^{(s)})$$

と書かれる。こゝに $A(x)$, $C(x)$ はそれぞれ (1), (2) により定義される行列である。よって最小自乗法における Newton の algorithm は次のようになる。

Newton の Algorithm 初期値 $x^{(0)}$ を π の近傍の中と適

と選ぶ。 $x^{(s)}$ を既知とし, (3) を用いて $h^{(s)}$ を計算して
 $x^{(s+1)} = x^{(s)} + h^{(s)}$ とおく。

こゝで Jacobi と Newton の algorithm を同時に用いる
algorithm と考える。

Newton-Jacobi の Algorithm

λ は $0 \leq \lambda \leq 1$ の定数とする。

$x^{(0)}$ を $\bar{x}$ の近傍の中へ適当に選ぶ。

$$(4) \quad B_{\lambda}(x^{(s)}) h^{(s)} = -A^*(x^{(s)}) f(x^{(s)}) \quad (s=0, 1, 2, \dots)$$

こゝで

$$B_{\lambda}(x) = A^*(x) A(x) + (1-\lambda) C(x)$$

この $h^{(s)}$ を計算して $x^{(s+1)} = x^{(s)} + h^{(s)}$ とおく。

この algorithm を最小自乗法における Newton-Jacobi の
algorithm といい、これによつて $S(x)$ の最小値をとる x を
求める方法を Newton-Jacobi の方法という。

§3. 補助定理.

こゝでは Main Theorem の証明に必要な補助定理を列举
する。 §1 での仮定 (A1), (A2), (A3) は これらの補助定
理の断片に過ぎない仮定する。

$$H = \{ h \mid |h| = 1, h \in R^n \} \quad \text{とおく。}$$

補助定理 2. " $\min_H |A(\bar{x})h|^2 > \|C(\bar{x})\|$ ならば $0 \leq \lambda \leq 1$
 の任意の λ に対して

$$\min_H (B_\lambda(\bar{x})h, h) > \lambda \|C(\bar{x})\| "$$

証明 C は任意の $n \times n$ 行列とす。 $\forall h \in H$ に対して

$$\|C\| \geq |(Ch, h)|.$$

より 明らか

$$((\|C\|I + C)h, h) \geq 0 \quad \text{for } \forall h \in H.$$

一方

$$\min_H (B_\lambda(\bar{x})h, h) = (B_\lambda(\bar{x})\hat{h}, \hat{h})$$

を満たす $\hat{h} \in H$ が存在する。

$$\begin{aligned} \min_H (B_\lambda(\bar{x})h, h) &= (B_\lambda(\bar{x})\hat{h}, \hat{h}) \\ &= ((A^*(\bar{x})A(\bar{x}) - (1-\lambda)\|C(\bar{x})\|I)\hat{h}, \hat{h}) \\ &\quad - (1-\lambda)((\|C(\bar{x})\|I + C(\bar{x}))\hat{h}, \hat{h}) \\ &\geq ((A^*(\bar{x})A(\bar{x}) - (1-\lambda)\|C(\bar{x})\|I)\hat{h}, \hat{h}) \\ &\geq \min_H (A^*(\bar{x})A(\bar{x})h, h) - \|C(\bar{x})\| + \lambda \|C(\bar{x})\| \\ &> \lambda \|C(\bar{x})\|. \end{aligned}$$

補助定理 3. " 任意の正数 ε に対して, 適当な $\bar{x}$ の周辺部
 V_λ を選べば

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min_H (B_\lambda(\bar{x})h, h) - \min_{V_\lambda \times H} (B_\lambda(\bar{x})h, h) \leq \varepsilon, \\ 0 &\leq \max_{V_\lambda} \|C(\bar{x})\| - \|C(\bar{x})\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

この補助定理の証明は $B_\lambda(x)$, $C(x)$ の要素 τ, D で連続であることから強いて明らかである。

補助定理 4. " $\bar{x}$ の δ_λ 近傍 V_λ と正数 μ_λ を適当に選べば"

$$\min_{V_\lambda \cap H} (B_\lambda(x) h, h) > \lambda \max_{V_\lambda} \|C(x)\| + \mu_\lambda.$$

証明. 補助定理 2 より

$$\min_H (B_\lambda(x) h, h) > \lambda \max_{V_\lambda} \|C(x)\| + \mu_\lambda$$

を満たす μ_λ が存在する。この両辺の差を ε とおき、補助定理 3 を用いる。

註. 補助定理 2 の証明をオミット

$$\min_H (B_\lambda(x) h, h) - \lambda \|C(x)\|$$

$$\geq \min_H |A(x)h|^2 - \|C(x)\|$$

であるから μ_λ は λ に無関係に選ぶことができる。

補助定理 5. "任意の正数 ε に対して、 $\bar{x}$ の δ_λ 近傍 V_λ とおけば、任意の $x^{(0)} \in V_\lambda$ に対して $|h^{(0)}| \leq \varepsilon$."

証明 $A^*(x) f(x) = 0$ かつ $|A^*(x) f(x)|$ は x にフニリ連続であるから $|x^{(0)} - \bar{x}| \leq \delta_\lambda$ の中の任意の $x^{(0)}$ に対して

$$|A^*(x^{(0)}) f(x^{(0)})| / \mu_\lambda \leq \varepsilon$$

が成立する。ところが $h^{(0)} \neq 0$ として $x^{(0)} \in \delta_\lambda$ の任意の $x^{(0)}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mu_\lambda |h^{(0)}|^2 &\leq (B_\lambda(x^{(0)})h^{(0)}, h^{(0)}) \\
&= -(A^*(x^{(0)})f(x^{(0)}), h^{(0)}) \\
&\leq |A^*(x^{(0)})f(x^{(0)})| |h^{(0)}|
\end{aligned}$$

$$\therefore |h^{(0)}| \leq |A^*(x^{(0)})f(x^{(0)})| / \mu_\lambda \leq \varepsilon.$$

注 μ_λ は λ に無関係に選べるから $\forall \lambda$ は λ に無関係に選べる。

§4. Main Theorem.

定理を述べる前に $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$ 用いられる K_λ をつぎで述べる

$$M(x) = \min_H |A(x)h|^2, \quad M = \min_{x \in H} |A(x)h|^2,$$

$$K_\lambda = (\max_{x \in H} \|C(x)\| + \mu_\lambda) / \mu_\lambda < 1.$$

Main Theorem. (A1) R^n の凸領域 D 上 $f(x) \in C^2(D)$.

(A2) $\text{grad } S(x) = 0$ を満たす $x = \bar{x}$ が D の中に存在する。

(A3) $\|C(\bar{x})\| < \min_H |A(\bar{x})h|^2$

仮定 (A1), (A2), (A3) のもとに適当な正数 δ_λ を選べば $|x^{(0)} - \bar{x}| \leq \delta_\lambda$ を満たす初期値 $x^{(0)}$ と Newton-Jacobi の algorithm (4) を用いた系列 $\{x^{(s)}\}, \{h^{(s)}\}$ を得て (I), (II), (III) が成り立つ。

(I) $\bar{x}$ の適当な近傍をとると, $x = \bar{x}$ はその近傍で

$S(x)$ の最小値をとる。

(II) $|x^{(s+1)} - \bar{x}| \leq K_\lambda |x^{(s)} - \bar{x}| \quad (s=0, 1, 2, \dots),$

$$(III) \quad |h^{(s+1)}| \leq K_\lambda |h^{(s)}| \quad (s=0, 1, 2, \dots)$$

$$(IV) \quad S(x^{(s+1)}) \leq S(x^{(s)}) \quad (s=0, 1, 2, \dots)''$$

(I) の証明. $\text{grad } S(x) = 0$ であるから 補助定理 2 の直接の結果である。即ち補助定理 2 の $\lambda = 0$ とすればよい。

(II) の証明. $p^{(s)} = x^{(s)} - \bar{x} \quad (s=0, 1, 2, \dots)$ とおく。

$h^{(s)} = x^{(s+1)} - x^{(s)} = p^{(s+1)} - p^{(s)}$ であるから (4) の中に x を λ

$$(5) \quad B_\lambda(x^{(s)}) (p^{(s+1)} - p^{(s)}) = -A^*(x^{(s)}) f(x^{(s)}).$$

故に

$$B_\lambda(x^{(s)}) p^{(s+1)} = B_\lambda(x^{(s)}) p^{(s)} - A^*(x^{(s)}) f(x^{(s)})$$

という。 $x^{(s)} = \bar{x} + p^{(s)}$ に注意して

$$(6) \quad g_\lambda(p^{(s)}) = (B_\lambda(x^{(s)}) + \lambda c(\bar{x})) p^{(s)} - A^*(x^{(s)}) f(x^{(s)})$$

とおく。 補助定理 4 の μ_λ を対して適当な正数 δ_λ をとれば $|x^{(s)} - \bar{x}| \leq \delta_\lambda$ のとき $x^{(s)}$ に対して

$$|g_\lambda(p^{(s)})| \leq \mu_\lambda |p^{(s)}|$$

が成立することを示す。 そのために (6) を成分ごとに書いて

$$g_{\lambda j}(p^{(s)})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_i(\bar{x} + p^{(s)})}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f_i(\bar{x} + p^{(s)})}{\partial x_k} \right. \\
&\quad \left. + (1-\lambda) f_i(\bar{x} + p^{(s)}) \frac{\partial^2 f_i(\bar{x} + p^{(s)})}{\partial x_j \partial x_k} + \lambda f_i(\bar{x}) \frac{\partial^2 f_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k} \right) p_k^{(s)} \\
&\quad - \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i(\bar{x} + p^{(s)})}{\partial x_j} f_i(\bar{x} + p^{(s)}) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n f_i(\bar{x}) \left\{ \left(\frac{\partial^2 f_i(\bar{x} + p^{(s)})}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 f_i(\bar{x} + \theta_j p^{(s)})}{\partial x_j \partial x_k} \right) \right. \\
&\quad \left. + \lambda \left(\frac{\partial^2 f_i(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 f_i(\bar{x} + p^{(s)})}{\partial x_j \partial x_k} \right) \right\} p_k^{(s)} + O(p^2) \\
&\quad (0 < \theta_j < 1)
\end{aligned}$$

$f \in C^2(D)$ ならば、 $\frac{1}{M_\lambda}$ と δ_λ は、

$|x^{(s)} - \bar{x}| = |p^{(s)}| \leq \delta_\lambda$ の範囲の $x^{(s)}$ に対して

$$|g_\lambda(p^{(s)})| \leq \mu_\lambda |p^{(s)}|.$$

より (4) と (6) は、

$$B_\lambda(x^{(s)}) p^{(s+1)} = -\lambda C(x) p^{(s)} + g_\lambda(p^{(s)})$$

と、また、 $|x^{(s)} - \bar{x}| \leq \delta_\lambda$ の範囲の $x^{(s)}$ に対して

$$|p^{(s+1)}| \leq \frac{\lambda \|C(x)\| + \mu_\lambda}{M_\lambda(x^{(s)})} |p^{(s)}|$$

が成り立つ。

$$\frac{\lambda \|C(x)\| + \mu_\lambda}{M_\lambda(x^{(s)})} \leq \frac{\lambda \|C(x)\| + \mu_\lambda}{M_\lambda} \leq K_\lambda < 1$$

より、即ち、 $x^{(s)}$ は $|x^{(s)} - \bar{x}| \leq \delta_\lambda$ の範囲に属する。

$$|p^{(1)}| \leq K_\lambda |p^{(0)}|,$$

帰納法を用ゐれば

$$|x^{(s+1)} - \bar{x}| \leq K_\lambda |x^{(s)} - \bar{x}| \quad (s=0, 1, 2, \dots).$$

(II) の証明 $\dot{h}^{(s+1)} = 0$ の場合 (II) は明らかに成立つから
 $\dot{h}^{(s+1)} \neq 0$ とする。 $|\dot{h}^{(s)}|$, $|\dot{h}^{(s+1)}|$ の間の不等式を導く。

(4) より

$$(*) \quad - (A^*(x^{(s+1)}) A(x^{(s+1)}) + (1-\lambda) C(x^{(s+1)})) h^{(s+1)} = A^*(x^{(s+1)}) f(x^{(s+1)})$$

が成立つ。この左辺を成分別について計算すれば

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i(x^{(s+1)})}{\partial x_j} p_i(x^{(s+1)}) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i(x^{(s)} + h^{(s)})}{\partial x_j} p_i(x^{(s)} + h^{(s)}) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f_i(x^{(s)})}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i(x^{(s)} + \theta_j h^{(s)})}{\partial x_j \partial x_k} p_k^{(s)} \right) \\ & \quad \cdot \left(f_i(x^{(s)}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i(x^{(s)})}{\partial x_k} p_k^{(s)} + o(h^2) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f_i(x^{(s)})}{\partial x_j} p_i(x^{(s)}) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_i(x^{(s)})}{\partial x_j} \frac{\partial f_i(x^{(s)})}{\partial x_k} + f_i(x^{(s)}) \frac{\partial^2 f_i(x^{(s)} + \theta_j h^{(s)})}{\partial x_j \partial x_k} \right) p_k^{(s)} \right) \\ & \quad + o(h^2) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m p_i(x^{(s)}) \frac{\partial f_i(x^{(s)})}{\partial x_j \partial x_k} \right) p_k^{(s)} + g_j(x^{(s)}, h^{(s)}) \end{aligned}$$

∴ $g_j(x^{(s)}, h^{(s)})$ は

$$g_j(x^{(s)}, h^{(s)}) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n f_i(x^{(s)}) \left\{ \frac{\partial^2 f_i(x^{(s)})}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 f_i(x^{(s)}, h^{(s)})}{\partial x_j \partial x_k} \right\} h_k^{(s)} + o(h^2)$$

$f \in C^2(D)$ とするから, $\forall \epsilon > 0$ ~~ある~~ $\exists \delta > 0$, $\epsilon < \delta$ ならば
 $x^{(s)} \in D$, $|h^{(s)}| \leq \delta$ ならば

$$|g(x^{(s)}, h^{(s)})| \leq \mu_\lambda |h^{(s)}|.$$

が成り立つ. $\therefore (*)$ は

$$(7) \quad B_\lambda(x^{(s+1)}) h^{(s+1)} = \lambda C(x^{(s)}) h^{(s)} + g(x^{(s)}, h^{(s)}).$$

$h^{(s+1)} \neq 0$ とするから (7) と $h^{(s+1)}$ との内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とすれば

$$\begin{aligned} (B_\lambda(x^{(s+1)}) h^{(s+1)}, h^{(s+1)}) &= -\lambda (C(x^{(s+1)}) h^{(s)}, h^{(s+1)}) \\ &\quad + (g(x^{(s)}, h^{(s)}), h^{(s+1)}) \end{aligned}$$

より

$$M_\lambda(x) = \min_{h, h} (B_\lambda(x) h, h)$$

とすれば $h^{(s+1)} \neq 0$ より $|h^{(s)}| \leq \delta$ ならば

$$(8) \quad |h^{(s+1)}| \leq \frac{\lambda \|C(x^{(s)})\| + \mu_\lambda}{M_\lambda(x^{(s+1)})} |h^{(s)}|$$

が成り立つ. $M_\lambda = \min_{x \in H} (B_\lambda(x) h, h)$ とすれば

$$M_\lambda \leq M_\lambda(x^{(s+1)}) \quad \text{とすれば}$$

$$(9) \quad |h^{(s+1)}| \leq (\|C(x^{(s)})\| + \mu_\lambda) / M_\lambda \cdot |h^{(s)}|.$$

(d) 亦、(c) は $|h^{(s)}|$ と $|h^{(s+1)}|$ の間の不等式関係にある。つまり $|h^{(s+1)}|$ は $|h^{(s)}|$ の意味で単調に減少して 0 に近づくことを示すための帰納法を用いる。補題定理 5.8.1 通じて δ_1 を選べば $|x^{(0)} - \bar{x}| \leq \delta_2$ の任意の $x^{(0)}$ に対して

$$|h^{(0)}| \leq \alpha$$

が成立する。よって $h^{(0)}$ は (c) の範囲にある。従って

$$|h^{(1)}| \leq K_\lambda |h^{(0)}| \quad (K < 1)$$

従って $|h^{(1)}| \leq \alpha$, 帰納法から

$$|h^{(s+1)}| \leq K_\lambda |h^{(s)}| \quad (s=0, 1, 2, \dots),$$

(IV) の証明

$$\begin{aligned} f(x^{(s+1)}) - f(x^{(s)}) &= \sum_{i=1}^m \left\{ (f_i(x^{(s)} + h^{(s)}))^2 - f_i(x^{(s)})^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m \left[(f_i(x^{(s)})) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x^{(s)})}{\partial x_j} h_j^{(s)} + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 f_i(x^{(s)} + \theta h^{(s)})}{\partial x_j \partial x_k} h_j^{(s)} h_k^{(s)} \right. \\ &\quad \left. - (f_i(x^{(s)}))^2 \right] \\ &= 2 \sum_{i,j} f_i(x^{(s)}) \frac{\partial f_i(x^{(s)})}{\partial x_j} h_j^{(s)} + \sum_{i,j,k} f_i(x^{(s)}) \frac{\partial^2 f_i(x^{(s)} + \theta h^{(s)})}{\partial x_j \partial x_k} h_j^{(s)} h_k^{(s)} \\ &\quad + \sum_{i,j,k} \frac{\partial f_i(x^{(s)})}{\partial x_j} \frac{\partial f_i(x^{(s)})}{\partial x_k} h_j^{(s)} h_k^{(s)} \\ &= \lambda (C(x^{(s)}) h^{(s)}, h^{(s)}) - (B_\lambda(x^{(s)}) h^{(s)}, h^{(s)}) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j,k} f_{ij}(x^{(s)}) \left(\frac{\partial^2 f_i(x^{(s)} + \theta h^{(s)})}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 f_i(x^{(s)})}{\partial x_j \partial x_k} \right) h_j^{(s)} h_k^{(s)}$$

$f \in C^2(D)$ であるから、適当な正数 $\delta_2, d_2 \in \mathbb{R}_+^2$ に対して

$$|x^{(s)} - \bar{x}| \leq \delta_2, \quad |h^{(s)}| \leq d_2$$

が存在する $x^{(s)}, h^{(s)}$ に対して

$$\left| \sum_{j,k} f_{ij}(x^{(s)}) \left(\frac{\partial^2 f_i(x^{(s)} + \theta h^{(s)})}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 f_i(x^{(s)})}{\partial x_j \partial x_k} \right) h_j^{(s)} h_k^{(s)} \right| \leq \mu_\lambda |h^{(s)}|^2$$

である $\delta_3 (\leq \delta_2)$ に対して $|x^{(s)} - \bar{x}| \leq \delta_3$ の $x^{(s)}$ に対して

$|h^{(s)}| \leq d_2$ かつ $|x^{(s)} - \bar{x}| \leq \delta_3$ の $x^{(s)}$ の任意の列に対して

とき $|p^{(s)}| = |x^{(s)} - \bar{x}|$, $|h^{(s)}|$ の単調減少性より

$$|x^{(s)} - \bar{x}| \leq \delta_3, \quad |h^{(s)}| \leq d_2$$

すなわち $x^{(s)}, h^{(s)}$ に対して

$$S(x^{(s+1)}) - S(x^{(s)}) = -(B_\lambda(x^{(s)}) h^{(s)}, h^{(s)}) + \lambda (C(x^{(s)}) h^{(s)}, h^{(s)}) + \mu_\lambda |h^{(s)}|^2$$

である。 δ_3 は補題 4 の ε_λ より小さく選べば、補題 4 を用いて

$$S(x^{(s+1)}) \leq S(x^{(s)}) \quad (s=0, 1, 2, \dots)$$

が証明される。

