

線形常微分方程式に関する 2 点接続問題

東京農工大 福原満洲雄

1. 係数が満足する差分方程式

$x=0$ を確定特異点, $x=\infty$ を 1 級の不確定特異点とする n 階
微分方程式

$$(1.1) \quad A[y] \equiv A_0[y] + xA_1[y] + \cdots + x^n A_n[y] = 0$$

について考える; ここで

$$\begin{aligned} A_h[y] = & a_{h,0} x^{n-h} y^{(n-h)} + a_{h,1} x^{n-h-1} y^{(n-h-1)} \\ & + \cdots + a_{h,n-h-1} x y' + a_{h,n-h} y, \\ & (h=0, 1, \cdots, n) \end{aligned}$$

$a_{h,k}$ はすべて定数である。

$$A_h[x^p] = f_h(p) x^p$$

とおけば,

$$\begin{aligned} f_h(p) = & a_{h,0} p(p-1)\cdots(p-n+h+1) \\ & + a_{h,1} p(p-1)\cdots(p-n+h+2) \\ & + \cdots + a_{h,n-h} \end{aligned}$$

$$A[x^p] = (f_0(p) + x f_1(p) + \cdots + x^n f_n(p)) x^p$$

となる。

$x=0$ は確定特異点であるから, (1.1)は

$$(1.2) \quad y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+\alpha}, \quad (C_0 \neq 0),$$

のように展開される解をもつ。 α は決定方程式

$$(1.3) \quad f_0(\alpha) = 0$$

の根である。この方程式の2根の差は整数にならないものとする。

C_0 の値をきめると, その他の係数 C_m は

$$(1.4) \quad f_0(m+\alpha)C_m + f_1(m+\alpha-1)C_{m-1} + \cdots + f_m(\alpha)C_0 = 0, \quad (m < n)$$

$$(1.5) \quad f_0(m+\alpha)C_m + f_1(m+\alpha-1)C_{m-1} + \cdots + f_n(m+\alpha-n)C_{m-n} = 0$$

($m \geq n$)

によってただ一通りにきまる。(1.3)に整数差の根がないという仮定により $f_0(m+\alpha) \neq 0$ 。

$$(1.6) \quad f_0(x+\alpha)\varphi(x+n) + f_1(x+\alpha-1)\varphi(x+n-1) \\ + \cdots + f_n(x+\alpha-n)\varphi(x) = 0$$

と初期条件 $\varphi(n) = C_0$ および

$$(1.7) \quad f_0(m+\alpha)\varphi(m+n) + f_1(m+\alpha-1)\varphi(m+n-1) \\ + \cdots + f_n(m+\alpha-n)\varphi(m) = 0, \\ (m = n+1, n+2, \cdots, 2n-1)$$

を満足すれば, $C_m = \varphi(m+n)$ となる。

$\psi(x+n) = \Gamma(x+1)\varphi(x+n)$ が満足する差分方程式を

$$(1.8) \quad P_0(x)\psi(x+n) + P_1(x)\psi(x+n-1) + \cdots + P_n(x)\psi(x) = 0$$

とすれば

$$P_0(x) = f_0(x+\alpha)/x, \quad P_1(x) = f_1(x+\alpha-1), \quad \dots,$$

$$P_h(x) = f_h(x+\alpha-h)(x-1)(x-2)\cdots(x-h+1), \quad \dots$$

$$P_n(x) = f_n(x+\alpha-n)(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

と書ける。これらは高々 $n' (= n-1)$ 次の多項式であるから

$$(1.10) \quad P_h(x) = \sum_{k=0}^{n-h} p_{h,k} (x-h+1)(x-h+2)\cdots(x-h+n'-k)$$

と書くことができる。特に $p_{h,0}, p_{h,1}$ は次の式で与えられる:

$$p_{h,0} = a_{h,0}, \quad p_{h,1} = a_{h,1} + (\alpha-n')(n-h)a_{h,0}.$$

2. 差分方程式の解の漸近表示

差分方程式の理論でよく知られているように, 方程式(1.8)は定積分

$$(2.1) \quad \psi(x) = \int_0^x t^{x-n} u(t) dt$$

により満足される。 u は Fuchs 型微分方程式

$$(2.2) \quad \sum_{k=0}^{n'} Q_k(t) u^{(n'-k)}(t) = 0, \quad (n' = n-1)$$

の解で、 ξ はこの微分方程式の特異点すなわち $Q_0(t)$ の零点である。 $Q_k(t)$ は次の式で与えられる：

$$(2.3) \quad Q_k(t) = (-1)^k \sum_{h=0}^{n-k} p_{h,k} t^{n-h-k}$$

したがって

$$(2.4) \quad g_0(t) = \sum_{h=0}^n a_{h,0} t^{n-h}, \quad g_1(t) = \sum_{h=0}^{n'} a_{h,1} t^{n-h-1}$$

とおけば

$$(2.5) \quad Q_0(t) = g_0(t), \quad -Q_1(t) = g_1(t) + (\alpha - n')g'_0(t).$$

定積分(2.1)の上端 ξ はすでに注意したように $Q_0(t)$ の零点であるが、(2.5)により $g_0(t)$ の零点でもあるから、それは(1.1)の ∞ における特性指数である。この n 個の指数も互いに異なるものとする。したがって $Q_0(t)$ の零点 ξ の位数は1である。

(2.2)の確定特異点 ξ における決定方程式は明らかに $0, 1, \dots, n-2$ を根とする。もう一つの根を κ とすれば

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \kappa &= n'-1 - Q_1(\xi)/Q'_0(\xi) \\ &= \alpha-1 + g_1(\xi)/g'_0(\xi). \end{aligned}$$

(2.2)の解で、 $t=\xi$ において $u \sim (\xi-t)^\kappa$ となるものを u_ξ とし、これに対応する

$$(2.7) \quad \psi_\xi(x+n) = \int_0^\xi t^x u_\xi(t) dt$$

を考える。

$u_{\xi}(t)$ の初項だけとして計算すると

$$\int_0^{\xi} t^x (\xi - t)^{\kappa} dt = \xi^{x+\sigma} \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(\sigma)}{\Gamma(x+\sigma+1)}$$

$$\sim \Gamma(\sigma) \xi^{x+\sigma} \chi^{-\sigma}, \quad (\sigma = \kappa + 1).$$

ここで漸近式は

$$|\arg x| < \pi - \delta, \quad x \rightarrow \infty$$

のとき有効である。 δ はいくらでも小さくとれる正の数である。

$u_{\xi}(t)$ の展開式から初項だけ取り去った剰余を $U_{\xi}(t)$ と書けば
0, ξ を結ぶ線分上で

$$(2.8) \quad |U_{\xi}(t)| \leq K |(\xi - t)^{\sigma}| = K |\xi|^{\sigma} (1-s)^{\sigma}, \quad (t = \xi s)$$

となるように定数 K がとれる。ここで $\sigma = \operatorname{Re} \sigma$ である。

$$\int_0^{\xi} t^x U_{\xi}(t) dt = \xi^{x+1} \int_0^1 s^x U_{\xi}(\xi s) ds.$$

$x' = \operatorname{Re} x > -1, \sigma > -1$ ならば

$$(2.9) \quad \left| \int_0^{\xi} t^x U_{\xi}(t) dt \right| \leq K |\xi|^{x+\sigma+1} \frac{\Gamma(x'+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(x'+\sigma+1)}$$

$$\sim K \Gamma(\sigma+1) |\xi|^{x+\sigma+1} \chi'^{-\sigma-1}, \quad (x' \rightarrow +\infty)$$

$|\arg x| < \frac{\pi}{2} - \delta$ では $x \rightarrow \infty$ のとき $x = O(x')$ であるから,

$$(2.10) \quad \psi_{\xi}(x+n) \sim \Gamma(\sigma) \xi^{x+\sigma} \chi^{-\sigma}.$$

この ψ_ξ に対応する

$$(2.11) \quad \varphi_\xi(x+n) = \psi_\xi(x+n) \Gamma(x+1)$$

は

$$(2.12) \quad \varphi_\xi(x+n) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{\sqrt{2\pi}} \xi^{x+\alpha} e^x / x^{x+\alpha+1/2}$$

となる。

$\alpha > -1$ を仮定したが, $\alpha \leq -1$ ならば $\alpha+n > -1$ であるように n をとり, $u_\xi(t)$ の展開式から最初の n 個の項を取り去った剰余を $\tilde{u}_\xi(t)$ とすれば, 上の計算はそのまま適用できるから, (2.10), (2.12) は $\alpha > -1$ を仮定しなくても導かれる。

3. 0 で与えられた解の ∞ における漸近式

$$(3.1) \quad \nu = \alpha - \alpha = g_1(\xi)/g_0'(\xi)$$

は ξ だけに依存し, α には関係しない。

∞ においては (1.1) は形式解

$$(3.2) \quad y \sim e^{\xi x} x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} d_m x^{-m}, \quad (d_0 \neq 0)$$

をもつ。 ∞ における特性指数 ν は $g_0(t)$ の零点で, それは (2.2) の特異点と一致している。 ν は (3.1) で与えられる値と同じ。

φ_ξ および

$$(3.3) \quad \Phi_\xi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_\xi(m+n) x^{\alpha+m}$$

は α にも依存するから, $\varphi_{\alpha\xi}, \Phi_{\alpha\xi}$ と書くことにする。

$$(3.4) \quad \sum_{\xi} \gamma_{\alpha\xi} \varphi_{\alpha\xi}(k+n) = C_k, \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

で $\gamma_{\alpha\xi}$ をきめると, (1.2) で定義される解 $Y_{\alpha}(x)$ に対して

$$(3.5) \quad Y_{\alpha}(x) = \sum_{\xi} \gamma_{\alpha\xi} \Phi_{\alpha\xi}(x)$$

となる。すなわちすべての整数 $m \geq n$ に対して

$$(3.6) \quad C_m = \sum_j \gamma_{\alpha\xi_j} \varphi_{\alpha\xi_j}(m+n)$$

となるから, $\xi_1, \dots, \xi_n$ のうち絶対値が最大となるものを ξ と書くならば, $m \rightarrow \infty$ に対して

$$(3.7) \quad \gamma_{\alpha\xi} = \frac{\sqrt{2\pi\xi}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{m \rightarrow \infty} C_m e^{-m} (m/\xi)^{m+\alpha+1/2}$$

である。

$\xi_1, \dots, \xi_n$ が凸多边形の頂点になっている場合には, 任意の番号 k に対して, $|\xi_1 - \beta|, \dots, |\xi_n - \beta|$ のうち最大のものが $|\xi_k - \beta|$ であるように β がとれる。 $z = e^{-\beta x} y$ に関する微分方程式を考えることにより $\xi = \xi_k$ に対する $\gamma_{\alpha\xi}$ を求めることができる。

(3.4) で $\gamma_{\alpha\xi}$ を定義すると, (1.2) で定義される解 $Y_{\alpha}(x)$ に対して補題7 (後述) により, $\arg(\xi x) = 0, x \rightarrow \infty$ のとき

$$(3.8) \quad Y_{\alpha}(x) \sim \gamma_{\alpha\xi} \Gamma(\alpha+\nu) x^{-\nu} e^{\xi x}.$$

ここで ν は与えただけで済み、 α には依存しない。

4. $\Phi_{\xi}(t)$ の評価

$$\begin{aligned}\Phi_{\xi}(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{\xi}(m+n) \chi^{\alpha+m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_{\xi}(m+n)}{\Gamma(m+1)} \chi^{\alpha+m} \\ &= \chi^{\alpha} \int_0^{\xi} u_{\xi}(t) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(xt)^m}{\Gamma(m+1)} dt = \chi^{\alpha} \int_0^{\xi} e^{xt} u_{\xi}(t) dt.\end{aligned}$$

そこで $u_{\xi}(t)$ の展開式の初項だけとれば

$$\begin{aligned}\chi^{\alpha} \int_0^{\xi} e^{xt} (\xi-t)^k dt &= \chi^{-\nu} \int_0^y e^{y-s} s^k ds \\ &= \chi^{-\nu} e^y \left\{ \int_0^{\infty} e^{-s} s^k ds - \int_y^{\infty} e^{-s} s^k ds \right\}, \quad (\xi-t=s/x, y=\xi x)\end{aligned}$$

となるから、 $|\arg(\xi x)| < \frac{\pi}{2} - \delta$, $x \rightarrow \infty$ のとき

$$\chi^{\alpha} \int_0^{\xi} e^{xt} (\xi-t)^k dt \sim \Gamma(\sigma) \chi^{-\nu} e^{\xi x}$$

また

$$\chi^{\alpha} \int_0^{\xi} e^{xt} U_{\xi}(t) dt = \chi^{\alpha} \int_0^1 e^{y-s} U_{\xi}(\xi - s/x) dt.$$

ここで不等式(2.8)を利用すれば

$$\left| \chi^{\alpha} \int_0^{\xi} e^{xt} U_{\xi}(t) dt \right| \leq K |x^{-\nu-1} e^y| \int_0^1 e^{-s} s^{\sigma} ds$$

$$< K \Gamma(\sigma+1) |x^{-\nu-1} e^{\xi x}|.$$

したがって $|\arg(\xi x)| < \frac{\pi}{2} - \delta$, $x \rightarrow \infty$ のとき

$$(4.1) \quad \Phi_{\xi}(t) \sim \Gamma(\rho) x^{-\rho} e^{\xi x}.$$

0, ξ を結ぶ線分の上では

$$|u_{\xi}(t)| \leq H |(\xi - t)^{\rho}|$$

が成り立つように定数 H がとれるから, 同様な計算で

$$|\Phi_{\xi}(t)| \leq H \Gamma(\rho+1) |x^{-\rho} e^{\xi x}|$$

を得る。これは $|\arg(\xi x)| \leq \pi$ において成り立つ。

$\rho > -1$ を仮定したが, そうでない場合には, $u_{\xi}(t)$ の展開式を最初の n 個の項の和と剰余に分けて同様な計算をすること

により, 一般に $|\arg(\xi x)| < \frac{\pi}{2} - \delta$, $x \rightarrow \infty$ のとき (4.1) が,

$|\arg(\xi x)| \leq \pi$, $x \rightarrow \infty$ のとき

$$(4.2) \quad \Phi_{\xi}(x) = O(x^{-\rho} e^{\xi x})$$

が成り立つことがいえる。

5. ∞ において漸近的に定義される解

$\omega_j = \arg \xi_j$ とおく。 x 軸となす角 θ が

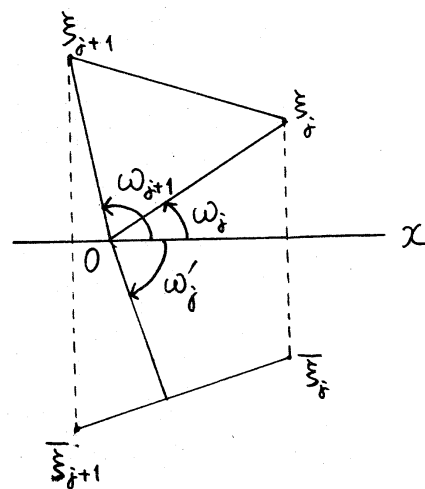
$$(5.1) \quad |\xi_j| \cos(\theta + \omega_j) = |\xi_k| \cos(\theta + \omega_k)$$

を満足するとき, x 軸と角 θ をなす方向を番号 j, k に関する 特異方向 という。特に番号を指定しないで単に特異方向とい

うこともある。特に $\xi_1, \dots, \xi_n$ は 0 を内部に含む凸多辺形の頂点で, 周上にこの順に並んでいる場合を考える。したがって

$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n < \omega_1 + 2\pi$ とすることが出来る。

$\bar{\xi}_j, \bar{\xi}_{j+1}$ を通る直線に垂直な方向が x 軸となす角を ω'_j とすれば (5.1) は $\theta = \omega'_j, k=j+1$ に対して成り立つから, ω'_j は $j, j+1$ に関する特異方向が x 軸となす角である。



任意の整数 m に対して

$$\omega'_{j+mn} = \omega'_j + 2m\pi \text{ と書くことにし,}$$

$$D_j = \{x; \omega'_{j+1} < \arg x < \omega'_j\},$$

$$D'_j = \{x; \omega'_{j+1} < \arg x < \omega'_{j-n}\},$$

$$D''_j = \{x; \omega'_{j+1} < \arg x - \pi < \omega'_j\}$$

と定義すれば

$$(5.2) \quad D_j, D_{j-1}, \dots, D_{j-n}, D''_j \subset D'_j$$

である。 D'_j に含まれる半直線に沿って $x \rightarrow \infty$ のとき漸近的に

$$(5.3) \quad y \sim x^{-\nu_j} e^{\xi_j x}$$

となる解はただ一つ存在し, この漸近的關係は D'_j の内部において成り立つ。この解を $Z_j(x)$ で表わす。

$Z_j(xe^{2\pi i})$ の漸近式

$$Z_j(xe^{2\pi i}) \sim x^{-\nu_j} e^{\xi_j x - 2\pi i \nu_j}$$

は

$$D'_{j+n} = \{x; \omega'_{j+1} < \arg x + 2\pi < \omega'_{j-n-1}\}$$

の内部で成り立つ。したがって

$$(5.4) \quad Z_{j+n}(x) = e^{2\pi i \nu_j} Z_j(x)$$

となる。

$$D'_0 \cap D'_1 \cap \cdots \cap D'_{n-1} = \{x; \omega'_1 < \arg x < \omega'_{-1}\}$$

$$\supset D_{-1} \cup D_0$$

であるから, $Z_0(x), Z_1(x), \dots, Z_{n-1}(x)$ に対して共通領域 D_0 において (5.3) のような漸近表示が有効であり, このことからそれらが互いに 1 次独立であることがいえる。

6. 接続係数

決定方程式 (1.3) の根を $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ とし, $\alpha = \alpha_j$ に対応する $Y_\alpha(x)$ を改めて $Y_j(x)$ と書く。

$$(6.1) \quad Y_j(x) = p_{j0} Z_0(x) + \cdots + p_{j,n-1} Z_{n-1}(x), \quad (j=0, 1, \dots, n-1)$$

の係数 p_{jk} あるいは

$$(6.2) \quad Z_k(x) = g_{k0} Y_0(x) + \cdots + g_{k,n-1} Y_{n-1}(x), \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

の係数 g_{jk} が 接続係数 である。

$x \in D_j'', x \rightarrow \infty$ のとき

$$(6.3) \quad Y_j(x) \sim S_{jk} x^{-\nu_k} e^{\xi_k x}$$

とすれば, この漸近的關係は D_j' において成り立ち, (3.8) より

$$(6.4) \quad S_{jk} = \gamma_{\alpha \xi} \Gamma(\sigma), \quad (\sigma = \alpha + \nu)$$

そこで

$$(6.6) \quad S_0 g_0 + S_1 g_1 + \cdots + S_{n-1} g_{n-1} \\ = \begin{cases} 0 & (k > 0) \\ 1 & (k = 0) \end{cases}$$

によって $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$ をきめる。

$$(6.7) \quad Z(x) = g_0 Y_0(x) + g_1 Y_1(x) + \cdots + g_{n-1} Y_{n-1}(x)$$

は $Z_0(x), Z_1(x), \dots, Z_{n-1}(x)$ の 1 次結合であるが, (6.6) で $k=n-1$ とした等式により $Z(x)$ は $Z_{n-1}(x)$ に関係しない。そこで $k=n-2$ とした等式 (6.6) から $Z(x)$ は $Z_{n-2}(x)$ に関係しない。以下同様に $Z(x)$ は $Z_1(x), \dots, Z_{n-1}(x)$ に関係しないことがいえる。さらに (6.6) で $k=0$ とした等式から $Z(x) = Z_0(x)$ となる。

ゆえに, ここに得られた $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$ が実は $g_{00}, g_{01}, \dots, g_{0,n-1}$ であることがわかる。

一般に $g_{k0}, g_{k1}, \dots, g_{k,n-1}$ を求めるには (6.1) を

$$Y_j(x) = p_{j,k} Z_k(x) + \cdots + p_{j,k+n-1} Z_{k+n-1}(x) \\ (j=0, 1, \dots, n-1)$$

で置き換えて同様に論ずればよい。

7. 補題

$$(7.1) \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{\lambda+n}$$

の係数 C_n が $n \rightarrow \infty$ のとき

$$(7.2) \quad C_n \sim e^n / \sqrt{2\pi} n^{n+\lambda+1/2}$$

を満足するならば, $\arg x = 0$, $x \rightarrow \infty$ のとき $\varphi(x) \sim e^x$ となる。

[証]

$$f(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{\lambda+n} / \Gamma(\lambda+n+1)$$

の収束半径は ∞ であり, $y = f(x, \lambda)$ を x の関数と考えると, それは微分方程式

$$y' = y + x^{\lambda-1} / \Gamma(\lambda)$$

の解で, $x \rightarrow 0$ のとき $y \sim x^{\lambda} / \Gamma(\lambda)$ であるから, $\operatorname{Re} \lambda > 0$ ならば

$$f(x, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x t^{\lambda-1} e^{x-t} dt.$$

しかし右辺において有限部分をとることにすれば, この等式は λ のすべての値に対して成り立つ。

$$\int_0^{\infty} t^{\lambda-1} e^{x-t} dt = \Gamma(\lambda) e^x,$$

$$\int_x^{\infty} t^{\lambda-1} e^{x-t} dt = x^{\lambda-1} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{s}{x}\right)^{\lambda-1} e^{-s} ds \sim x^{\lambda-1}$$

であるから, $|\arg x| < \frac{\pi}{2} - \delta$, $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x, \lambda) \sim e^x$.

次に $x > 0$ とし, $f(x, \lambda)$ と

$$g(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{\lambda+n} e^n / \sqrt{2\pi} n^{\lambda+n+1/2}$$

を比べる。 $\varepsilon > 0$ に対し N を大きくとって, $n \geq N$ ならば

$$|1 - \Gamma(\mu+n+1)e^n/\sqrt{2\pi}n^{\mu+n+1/2}| < \varepsilon,$$

$$|1 - \sqrt{2\pi}n^{\lambda+n+1/2}/e^n\Gamma(\lambda+n+1)| < \varepsilon$$

とする。ただし $\mu = \operatorname{Re} \lambda$ である。

$$g(x, \lambda) = f(x, \lambda) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^{\lambda+n}$$

$$\psi_N(x) = \sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n x^{\lambda+n}$$

とおけば,

$$\begin{aligned} |\psi_N(x)| &\leq \varepsilon \sum_{n=N}^{\infty} |x^{\lambda+n} e^n / n^{\lambda+n+1/2}| \\ &< \varepsilon \sum_{n=N}^{\infty} x^{\mu+n} e^n / n^{\mu+n+1/2} \\ &< \varepsilon(1+\varepsilon) \sum_{n=N}^{\infty} x^{\mu+n} / \Gamma(\mu+n+1) \\ &= \varepsilon(1+\varepsilon)(1+o(1))e^x. \end{aligned}$$

一般に $\varphi(x)$ の場合には, 同様な計算で, $\varphi(x)$ と $g(x, \lambda)$ を比べる。

文 献

N. E. Nörlund, Leçons sur les équations linéaires aux différences finies. Gauthier-Villars, Paris, 1929.

M. Hukuhara, Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires, III. Mem. Fac. Sci. Kyūshū Imp. Univ., 2 (1942), 125-137.