

AHP における一対比較行列の最大固有値の数値解法 *

Calculating maximum eigenvalues in pairwise comparison matrices for the analytic hierarchy process

広島工業大学・情報学部[†] 白石 俊輔

追手門学院大学[‡] 小畑 経史

Shunsuke Shiraishi

Faculty of Applied Information Science, Hiroshima Institute of Technology

Tsuneshi Obata

Otemon Gakuin University

§1. はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process, 階層化分析法) では, 一見数値化が難しいと思われる問題でも, 容易に数値化できる. AHP には, 複数の比較項目 (n 個の比較対象) に関して, 好ましいといった「選好」, 役に立つといった「経験」, かっこいいといった「フィーリング」などの質的データを量的データにする仕掛けがある. それが, Saaty の離散スケール (表 1) を使った一対比較である.

表 1 Saaty の離散スケール

言語表現	値
同程度に重要	1
やや重要	3 or 1/3
ふつうに重要	5 or 1/5
かなり重要	7 or 1/7
絶対的に重要	9 or 1/9
中間の値	2, 4, 6, 8 or その逆数

n 個の比較対象をペアにして Saaty の離散スケールに従い比較し, 数値化してできる $n \times n$ 行列が一対比較行列である. いったん, 一対比較行列 A が得られれば, 比較対象のウェイトは固有値法

$$Aw = \lambda_{\max} w$$

で求められる. ここで, $\lambda_{\max}$ は行列 A の最大固有値である. これまでに, $n = 3, 4$ のときに, 最大固有値 $\lambda_{\max}$ が Newton 法で求まることを示したが, 本論では一般の次数 n に対して, やはり, 最大固有値 $\lambda_{\max}$ が

* This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 24K07950.

[†] 〒731-5193 広島市佐伯区三宅 2-1-1 s.shiraishi.wx@it-hiroshima.ac.jp

[‡] 〒567-8502 大阪府茨木市西安威 2-1-15 t-obata@haruka.otemon.ac.jp

Newton 法で求まることを示す．あわせて，Newton 法と，セカント法，二分法の収束速度を比較したシミュレーションを提示する．

§2. 一対比較行列

n 個の比較対象（本論では n は一般次数）， $C_i, i = 1, \dots, n$ に対して，AHP においては一対比較を行う． C_i と C_j の比較は前述の Saaty の離散スケール（表 1）を用いる． C_i と C_j の比較において， C_i が C_j よりやや重要という判断をした場合， (i, j) 成分とその対象要素 (j, i) 成分には $a_{ij} = 3, a_{ji} = 1/3$ を割り当てる．この比較を $n(n-1)/2$ 回繰り返すことにより， n 次の一対比較行列 A が得られる：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

出来上がった一対比較行列は，正値性 $a_{ij} > 0$ ，と逆数性 $a_{ij} = 1/a_{ji}$ を持つ．

理想的に一対比較が行われた場合を考察することで，固有値法の考え方が得られる．もし，重さとか面積とかのように各比較対象の真の値 $w_1, \dots, w_n$ が分かっているなら，一対比較行列は，

$$W = \begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となるはずである．このような理想的な場合は，幾何平均法によってウェイト $w_1, \dots, w_n$ を求めることができる．そのようなケースは，後述の整合的なケースであることも知られている．

一方，AHP では Saaty の離散スケールを使うこともあり，かならずしも $A = W$ とはならないため^{*1}， $A \approx W$ であるとみなすことになる．そもそも， $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^\top$ に対し，

$$\begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

であることから，理想的な一対比較が行われた場合は， n が W の（最大）固有値になる． $A \approx W$ なのだから，固有値問題

$$Aw = \lambda_{\max} w$$

を解けば，一対比較によって比較対象のウェイトが（近似的に）得られるだろうと考えるのが，AHP における固有値法である [4, 7, 13, 18]．ここで $\lambda_{\max}$ は A の最大固有値である．本論では Newton 法によって $\lambda_{\max}$ が求まることを示す．固有値法の数理最適化による理論づけについては [14] で確立されている．

$\lambda_{\max}$ には次の性質がある．

Theorem 1 (Saaty [13])

1. $\lambda_{\max} \geq n$,
2. $\lambda_{\max} = n \Leftrightarrow A$ が整合的.

^{*1} $n = 4$ のときに $A = W$ となるのは，Saaty の離散スケールで表現できる一対比較行列の 0.001421% にすぎない [9]．

ここで A が整合的であるとは, $i, k, j = 1, \dots, n$ に対し

$$a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$$

が成り立つときをいう. 整合的であることと, $A = W$ となることは同値である. この事実をもとに提案された工夫が, AHP における整合度 (consistency index) C.I. である.

$$\text{C.I.} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}.$$

$\text{C.I.} \leq 0.1$ が Saaty による整合度の判定基準である [4, 7, 13, 18]. 整合度の導入が, AHP の地位を確立した最も大きな理由であると考えられる. なお, AHP における整合度指標については我々も一提案 [8] をしたところであるが, その他の多様な整合度指標については, [5] のサーベイを参照されたい.

§3. 低次のケース

一対比較行列が正値逆数行列であることを使って, われわれは次の結果を得た.

Theorem 2 (Shiraishi-Obata-Daigo [17]) $P_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ を A の固有多項式とする.

1. $P_A(\lambda) = \lambda^n - n\lambda^{n-1} + 0 \cdot \lambda^{n-2} + c_3\lambda^{n-3} + \dots + (-1)^n \det A,$
2. $c_3 = \sum_{i < k < j} \left(2 - \frac{a_{ik}a_{kj}}{a_{ij}} - \frac{a_{ij}}{a_{ik}a_{kj}} \right) \leq 0,$
3. $\text{C.I.} = 0 \Leftrightarrow c_3 = 0.$

$c_3 \leq 0$ であることと, $\text{C.I.} = 0 \Leftrightarrow c_3 = 0$ である事実を用いた, 不完全一対比較行列の補完については, [8] で示した.

この事実を元に, われわれは, 低次 (3 次と 4 次) の一対比較行列に対し, 最大固有値が Newton 法で求めることを示した [15, 11]. 固有多項式が解析的表現を持つことが, 低次の場合はポイントになった.

4 次の場合は以下の通りである.

Corollary 1 (Obata-Shiraishi [9]) $n = 4$ のとき,

1. $P_A(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + c_3\lambda + \det A,$
2. $\text{C.I.} = 0 \Leftrightarrow c_3 = 0.$

この解析的表現を使って 4 次の場合に取り組んだのだが, 初期点の取り方に工夫が必要であった.

そもそも初期点としては $\lambda_0 > \lambda_{\max}$ が取る必要があった. これを与えるのが次の Aupetit-Genest の上界である.

Theorem 3 (Aupetit-Genest [1]) $1/S \leq a_{ij} \leq S$ に対し, $\lambda_{\text{upper}} = 1 + \frac{1}{2}(n-1)(S+1/S)$ とすれば

$$n \leq \lambda_{\max} \leq \lambda_{\text{upper}}.$$

Remark 1 ここでは $n = 4, S = 9$ なので, $\lambda_{\text{upper}} = \frac{132}{9} = 14.66\dots$

$\lambda_0 = \lambda_{\text{upper}}$ とすると, 次のことが言えた. 一般次数で示すべきことを見据えて証明の概略も述べる.

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda_{\text{upper}}, \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k - \frac{P_A(\lambda_k)}{P'_A(\lambda_k)}, \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Lemma 1 λ_k は下に有界である.

proof 反復 k についての帰納法.

1° $k = 0$, $\lambda_0 = \lambda_{\text{upper}} > \lambda_{\text{max}}$

2° $\lambda_k > \lambda_{\text{max}}$ を帰納法の仮定とする

$P'_A(\lambda)$ は $\lambda \geq \lambda_{\text{max}}$ で単調増加 ($\because P''_A(\lambda) > 0$). 従って $\lambda_{\text{max}} \leq \lambda < \lambda_k$ に対し,

$$P'_A(\lambda) < P'_A(\lambda_k).$$

積分すると

$$\int_{\lambda_{\text{max}}}^{\lambda_k} P'_A(\lambda) d\lambda < \int_{\lambda_{\text{max}}}^{\lambda_k} P'_A(\lambda_k) d\lambda,$$

これから

$$P_A(\lambda_k) - P_A(\lambda_{\text{max}}) < P'_A(\lambda_k)(\lambda_k - \lambda_{\text{max}}). \quad (1)$$

$P'_A(\lambda_k) > 0$ なので, 不等式 (1) から

$$\lambda_{\text{max}} < \lambda_k - \frac{P_A(\lambda_k)}{P'_A(\lambda_k)} = \lambda_{k+1}.$$

□

Lemma 2 λ_k は減少列である.

proof $P'_A(\lambda_k) > 0$ and $P_A(\lambda_k) > P_A(\lambda_{\text{max}}) = 0$ なので,

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{P_A(\lambda_k)}{P'_A(\lambda_k)} < \lambda_k.$$

□

以上の証明で $P'_A(\lambda) > 0$ と $P''_A(\lambda) > 0$ for $\lambda \geq \lambda_{\text{max}}$ が要であった. これが一般次数でも成立することを保証するのが, 次節で述べる Gauss-Lucas の定理である. ここがクリアされれば, 次の定理が成立することは明らかである.

Theorem 4 (Shiraishi–Obata [16]) 初期値 $\lambda_0 = \lambda_{\text{upper}}$ に対し, Newton 法で生成した点列は最大固有値 λ_{max} に収束する.

なお, Newton 法によって, いったん λ_{max} が求まれば, 連立 1 次方程式 $Aw = \lambda_{\text{max}}w$ から, ウェイト w を求めるのには, 次の最小二乗問題を, たとえば Excel の Solver で, 解けばよい [3].

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij}w_j - \lambda_{\text{max}}w_j)^2 \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n w_j = 1, \quad w_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

§4. Gauss-Lucas の定理

一般次数の対比較行列 A に対して $P'_A(\lambda) > 0$ と $P''_A(\lambda) > 0$ for $\lambda \geq \lambda_{\text{max}}$ が成立することを保証するのが, 次の Gauss-Lucas の定理 [2] である.

Theorem 5 (Gauss-Lucas の定理) $f(z)$ を多項式とする. この時微分 $f'(z)$ のゼロ点は, 多項式 $f(z)$ のゼロ点の凸結合になる.

Gauss-Lucas の定理から $\lambda_{\max} < \lambda$ の範囲には, $P'_A(\lambda) = 0, P''_A(\lambda) = 0$ の解が存在しないことは直ちに分かる. 可能性としては, $P'_A(\lambda_{\max}) = 0, P''_A(\lambda_{\max}) = 0$ がありうるが, これもそうはならない.

Lemma 3 $P'_A(\lambda_{\max}) \neq 0$ である.

proof Perron-Frobenius の定理から, $\lambda_{\max}$ は $P_A(\lambda) = 0$ の単根であるので,

- $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_{\max})Q_A(\lambda)$
- $Q_A(\lambda_{\max}) \neq 0$

となる. 微分すると:

$$\begin{aligned} P'_A(\lambda) &= Q_A(\lambda) + (\lambda - \lambda_{\max})Q'_A(\lambda), \\ P'_A(\lambda_{\max}) &= Q_A(\lambda_{\max}) \neq 0. \end{aligned}$$

□

Lemma 4 $P''_A(\lambda_{\max}) \neq 0$ である.

proof $P''_A(\lambda_{\max}) = 0$ とすると, Gauss-Lucas の定理から $\exists \lambda'_j$ with $P'_A(\lambda'_j) = 0, j = 1, \dots, n-1, \exists \alpha'_j \geq 0, j = 1, \dots, n-1$ with $\sum_{j=1}^{n-1} \alpha'_j = 1, \lambda_{\max} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha'_j \lambda'_j$ となる.

ここで, $|\lambda'_j| < \lambda_{\max}$ for all $j = 1, \dots, n-1$ だと $\lambda_{\max} \leq \sum_{j=1}^{n-1} \alpha'_j |\lambda'_j| < \lambda_{\max}$ となり不合理. 従って $\exists \lambda'_j$ for some j with $|\lambda'_j| = \lambda_{\max}$ が言える.

$P'_A(\lambda'_j) = 0$ なので, 再び Gauss-Lucas の定理から λ_k with $P_A(\lambda_k) = 0, k = 1, \dots, n-1$, and $\alpha_k \geq 0, k = 1, \dots, n$ with $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ such that $\lambda'_j = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \lambda_k + \alpha_n \lambda_{\max}$ となる.

ここで $|\lambda_k| < \lambda_{\max}$ (Perron-Frobenius の定理 [6]) であることを踏まえると, $\alpha_k = 0, k = 1, \dots, n-1, \alpha_n = 1$ が言え, $\lambda'_j = \lambda_{\max}$ となるが, $P'_A(\lambda_{\max}) = 0$ となり不合理. □

$P'_A(\lambda_{\max}) \neq 0, P''_A(\lambda_{\max}) \neq 0$ が分かり, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P'_A(\lambda) = \infty, \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P''_A(\lambda) = \infty$ であることを踏まえると, $P'_A(\lambda) > 0, P''_A(\lambda) > 0$ for $\lambda \geq \lambda_{\max}$ が成立する.

§5. 収束と数値実験

Newton 法の収束速度を確認するために, セカント法^{*2}, 二分法^{*3}と比較する数値実験も行った. 表 2, 表 3, 表 4, および図 1, 図 2, 図 3 に, Saaty の離散スケールから生成した, 5,000 個のランダムな 4~6 次の一対比較行列に対する, 各手法の収束までの反復回数の分布を示す. なお, ここでは, 反復で得られた値と $\lambda_{\max}$ との差が 10^{-12} 以下になった時点で, 収束した, とみなすことにした.

- セカント法: 初期点 $\lambda_{-1} = \lambda_{\text{upper}} + 1$ and $\lambda_0 = \lambda_{\text{upper}}$.

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{P_A(\lambda_k)(\lambda_k - \lambda_{k-1})}{P_A(\lambda_k) - P_A(\lambda_{k-1})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

^{*2} https://encyclopediaofmath.org/wiki/Secant_method

^{*3} https://encyclopediaofmath.org/wiki/Dichotomy_method

- 二分法：初期点 $[\lambda_0^{\text{lower}}, \lambda_0^{\text{upper}}] = [4, \lambda_{\text{upper}}]$

$$\lambda_{k+1} = \frac{\lambda_k^{\text{lower}} + \lambda_k^{\text{upper}}}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

表 2 集計結果 (4 次)

	最小	中央値	最頻値	平均	最大
Newton	5	8	9	8.1758	10
secant	7	11	13	11.3644	15
bisection	5	42	42	41.3478	43

表 3 集計結果 (5 次)

	最小	中央値	最頻値	平均	最大
Newton	5	9	8	8.708	12
secant	7	12	11	12.14	17
bisection	31	42	43	41.7526	43

表 4 集計結果 (6 次)

	最小	中央値	最頻値	平均	最大
Newton	6	9	9	9.283	13
secant	9	13	12	12.96	19
bisection	32	43	43	42.03	44

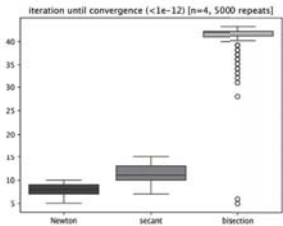


図 1 4 次の箱ひげ図

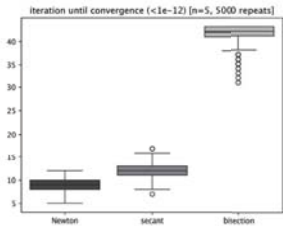


図 2 5 次の箱ひげ図

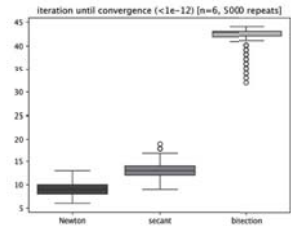


図 3 6 次の箱ひげ図

さらに、各手法での反復回数のいずれも中央値となる行列を使って、今回の数値実験での典型例といえる具体例の収束の様子を示す (図 4, 図 5, 図 6). Newton 法, セカント法ともに単調減少列が生成され, 収束している様子が窺える. セカント法に関しては, 次の事実も分かった [16].

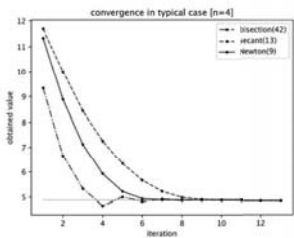


図 4 4 次の収束 (典型例)

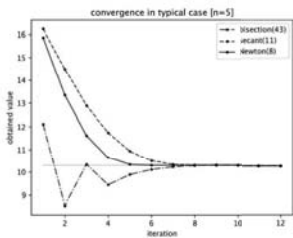


図 5 5 次の収束 (典型例)

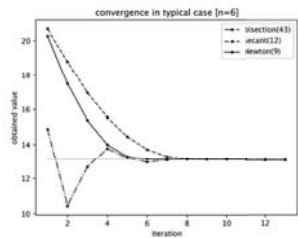


図 6 6 次の収束 (典型例)

Theorem 6 $\varepsilon > 0$ に対し, 初期点を $\lambda_{-1} = \lambda_{\text{upper}} + \varepsilon$, $\lambda_0 = \lambda_{\text{upper}}$ ととれば, セカント法は下に有界な単調減少列を生成し, λ_{max} に収束する.

単調減少列を生成するように, 初期点についても $\lambda_{-1} = \lambda_{\text{upper}} + \varepsilon > \lambda_0 = \lambda_{\text{upper}}$ とした工夫が奏功した.

表 5 と図 7 に, 4 次のシミュレーションに対する, 計算時間を示す. ここでも Newton 法の優位性が見て取れる. セカント法が意外と時間がかかった.

表 5 計算時間 (ms)

	最小	中央値	平均	最大
Newton	0.029875	0.053417	0.052416	0.247125
Secant	0.123333	0.216000	0.213943	0.358875
Bisection	0.011834	0.154250	0.155905	0.244500

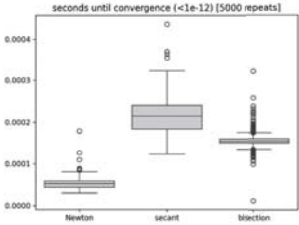


図 7 4 次の計算時間の箱ひげ図

§6. 終わりに

一対比較行列の最大固有値を求める手法として、Newton 法とセカント法の収束性が理論的に確立された。残るは二分法である。数値シミュレーションでは、二分法でも最大固有値に収束しているの、二分法に対してもなんらかの理論的な結論が得られることが期待される。

図 5 を生成した一対比較行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1/8 & 8 & 1/3 \\ 1/7 & 1 & 1/6 & 1/7 & 9 \\ 8 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 1/8 & 7 & 1/2 & 1 & 8 \\ 3 & 1/9 & 1/3 & 1/8 & 1 \end{pmatrix}$$

に対する固有値は、 $10.2951, -0.18465, -2.21302, -1.44869 \pm 6.71257i$ であるので、 $[5, \lambda_{\text{upper}}]$ に実数解はひとつしかない。ここで $n = 5$ の時には、 $\lambda_{\text{upper}} = 19.22 \dots$ この例に見られたように、一般に $[n, \lambda_{\text{upper}}]$ に実数解がひとつしかないことが言えればよいだろう。

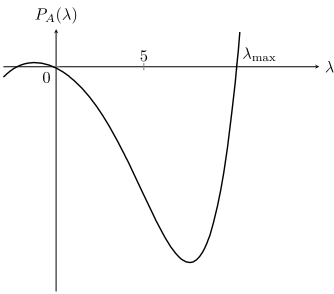


図 8 5 次の $P_A(\lambda)$ のグラフ (典型例)

参考文献

- [1] B. Aupetit, C. Genest: On some useful properties of the Perron eigenvalue of a positive reciprocal matrix in the context of the analytic hierarchy process, *European Journal of Operational Research*, Vol.70, Issue 2,1993, 263–268.
- [2] P. Borwein, T. Erdélyi: *Polynomials and Polynomial Inequalities*, Springer, 1995.
- [3] S. Boyd, L. Vandenberghe: *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*, Cambridge University Press, 2018.
- [4] M. Brunelli: *Introduction to the Analytic Hierarchy Process*, Springer, 2014.
- [5] M. Brunelli: A survey of inconsistency indices for pairwise comparisons, *International Journal of General Systems*, 47, 2018, 751–771.
- [6] R.A. Horn, C.R. Johnson: *Matrix Analysis, 2nd Ed.*, Cambridge University Press, 2012.
- [7] K Kulakowski: *Understanding the Analytic Hierarchy Process*, CRC Press, 2021.
- [8] T. Obata, S. Shiraishi: Consistency index less affected by the size of pairwise comparison matrix in AHP, *Proceedings of the 18th Asia Pacific Management Conference*, 2016, 369–377.
- [9] T. Obata, S. Shiraishi: Computational study of characteristic polynomial of 4th order PCM in AHP, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, 53(3), 2021, 1–12.
- [10] 小畑経史, 白石俊輔: AHP の 3 次の一対比較行列の最大固有値の計算法—二分法, セカント法, ニュートン法の比較—, 大分大学理工学部研究報告, 69, 2022.
- [11] T. Obata, S. Shiraishi: An initial value of Newton’s method for the characteristic polynomial of 4th order PCM in AHP, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, 56(3), 2024, 1–9.
- [12] T. Obata, S. Shiraishi, M. Daigo, N. Nakajima: Assessment for an incomplete comparison matrix and improvement of an inconsistent comparison: Computational experiments, *Proceedings of The Fifth International Symposium on The Analytic Hierarchy Process*, 1999, 200–205.
- [13] T. L. Saaty: *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, 1980.
- [14] K. Sekitani, N. Yamaki: A logical interpretation for the eigenvalue method in AHP, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 42(2), 1999, 219–232.
- [15] S. Shiraishi, T. Obata: On a maximum eigenvalue of third-order pairwise comparison matrix in analytic hierarchy process and convergence of Newton’s method, *Operations Research Forum*, 2(3), 2021, Article No. 30.
- [16] S. Shiraishi, T. Obata: Calculating Maximum Eigenvalues in Pairwise Comparison Matrices for the Analytic Hierarchy Process, *Operations Research Forum*, 6(1), 2025, Article No. 10.
- [17] S. Shiraishi, T. Obata, M. Daigo: Properties of positive reciprocal matrix and their application to AHP, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 41(3), 1998, 404–414.
- [18] 刀根 薫: ゲーム感覚意思決定法, 日科技連, 1986.