

不規則電子系における Anderson 転移

大阪大学教養部物理 大槻東巳

1 Anderson 転移とは

4人組によるスケーリング理論 [1] 以降、不規則ポテンシャルが存在するときの輸送現象の理解が急速に深まった。特に不規則ポテンシャルが弱い場合、ダイアグラム法による摂動法が有効であることが見い出され [2,3,4]、これにより電気伝導度 σ の温度及び磁場依存性などが統一的に理解された。

不規則ポテンシャルを強くする、もしくは Fermi エネルギー E を小さくするにつれて電気伝導度は減少し、あるところでこの値が0になり系は絶縁体へと転移することが期待される。この転移が Anderson 転移である [5]。Anderson 転移より下では電子は指数関数的に局在しており、この電子局在の程度を表す局在長 ξ は転移点で発散していると考えられる。よって Anderson 転移は金属側から近づく場合には電気伝導度の消失、絶縁体領域から近づく場合には局在長の発散で特徴づけられ、それぞれの場合に臨界指数が以下のように定義される。

$$\sigma \sim (E - E_c)^s \quad \text{if } E > E_c, \quad (1)$$

$$\xi \sim (E_c - E)^{-\nu} \quad \text{if } E < E_c. \quad (2)$$

臨界点 E_c は易動度端 (mobility edge) と呼ばれている。二つの臨界指数 s と ν はスケーリング関係式 [6]

$$s = (d - 2)\nu, \quad (3)$$

を満たしているのでどちらかの指数のみを決めればよい。

この Anderson 転移と N-成分ベクトルスピンの相転移は以下の表のような対応づけが可能である。

	ベクトルスピン模型	不規則電子系
転移点	T_c (転移温度)	E_c (易動度端)
特徴的長さ	相関長 $\xi \sim T - T_c ^{-\nu}$	局在長 $\xi \sim E - E_c ^{-\nu}$
下部臨界次元	2	2
上部臨界次元	4	?
非線形 σ -模型による記述	ベクトル型	行列型
Simple Limit	イジング模型	パーコレーション

実験的には勝本らによって三次元系の場合磁場がかかっている場合でも $s (= (d - 2)\nu = \nu)$ が 1 に非常に近いことが示されている [7]。

本解説では Anderson 転移の様々な性質について述べる。第二章では零磁場及び強磁場中での三次元系での Anderson 転移について解説する。前表で下部臨界次元が 2 としたが例外的に

二次元系でも転移が起こる場合がある。第三章ではこの二次元での転移について解説する。この転移点直上でどのような電子状態が実現されているかを第四章で解説し、第五章でまとめを行う。

2 三次元系

2.1 解析的方法

Anderson 転移を扱う方法としてまず自己無撞着理論が挙げられる [8]。まず電気伝導度 σ は Fermi エネルギーを E 、Fermi 面での状態密度を N_F 、拡散定数を $D(E)$ として

$$\sigma = e^2 N_F D(E), \quad (4)$$

で表されることに注目する。状態密度は Anderson 転移点上でも有限なので、拡散定数の振舞いがわかれば臨界指数が求められる。

拡散定数の自己無撞着方程式は以下のようにしてえられる。電気伝導度は古典的な Boltzmann 方程式からえられる項 σ_B と電子局在による補正 $\Delta\sigma$ を使って

$$\sigma = \sigma_B - \Delta\sigma, \quad (5)$$

とかける。 $\Delta\sigma$ は電子局在の効果を取り入れたヴァーテックス補正で表され、このヴァーテックス補正を拡散プロセスを使って近似することで $\Delta\sigma$ は拡散定数で表される。一方式 (5) の左辺も (4) により拡散定数 $D(E)$ でかけるので結局 $D(E)$ に関する自己無撞着な表式がえられるという仕組みである。

この方法により磁場がかかっている [9,10]、いない [8] にかかわらず電気伝導度 σ は

$$\sigma \sim D(E) \sim (E - E_c), \quad (6)$$

のように振舞う、即ち $s = \nu = 1$ が示された。

自己無撞着理論と別の解析的方法として、非線形 σ -モデルによる臨界指数の ϵ 展開が挙げられる [11,12,13,14,15]。通常のダイアグラム法では局在による高次の補正を求めるのが大変困難である。これをシステマティックに行うため不規則電子系のハミルトニアンを有効ラグランジアン

$$L_{eff} = \frac{1}{16t} \text{Tr} \partial_\mu Q \partial_\mu Q, \quad (7)$$

にマップする。 Q はレプリカ数を N としたとき $2N \times 2N$ の行列で表され、

$$Q(r) \equiv W + \Lambda(1 - W^2)^{1/2}, \Lambda = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0 & Q^{12} \\ Q^{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

で与えられる。ここで I は $N \times N$ の単位行列である。時間反転対称性のある、なしで行列 Q の性質が変わる。前者を Orthogonal ユニヴァーサリティクラス、後者を Unitary ユニヴァーサリティクラスと呼ぶ。後者は磁場がかかった系、もしくはスピン散乱の強い系で実現される。

Orthogonal ユニヴァーサリティクラスの場合、5 ループまで計算が行われており、ベータ関数が

$$\beta(t) = \epsilon t - 2t^2 - 12\zeta(3)t^5 + \frac{27}{2}\zeta(4)t^6 + O(t^7), \quad (9)$$

とえられており、Borel-Pade 近似により ν の値は 0.73 と評価されている [14]。

一方 Unitary ユニヴァーサリティクラスの場合、偶数次のループのみベータ関数に有限の寄与を与え

$$\beta(t) = \epsilon t - 2t^3 - 6t^5 + O(t^7), \quad (10)$$

と求まっており [12]、これより $\nu = 0.34$ と評価されている。この値は Chayes らによってえられた臨界指数 ν に関する不等式、 $\nu > 2/d$ [16] を満たしていないのでベータ関数のより高次の項を求めると値が大きく変わると考えられる。

2.2 数値計算

不規則系を議論するにあたっては数値計算が大変有力である。数値計算は主に行列の対角化による方法と数値スケーリングの方法とに大別できる。

対角化により局在-非局在を議論するものとしてまず Thouless 数による方法が挙げられる [17]。これは有限系を対角化するとき波動関数 Ψ の満たす境界条件を

$$\Psi(r) = e^{i\theta} \Psi(r + L), \quad (11)$$

とおき、 $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ の場合のエネルギーの固有値の差を求め、状態が局在していればこの差は小さく反対に広がっていればこの差は大きくなることから局在-非局在を判定するものである。

Lanczos アルゴリズムによって直接固有関数を求める方法 [18] も盛んに行われている。この場合、固有関数を求めた後に逆参与数 (IPN)

$$P^{-1} \equiv \int dr |\Psi|^4, \quad (12)$$

を計算する。平面波の場合、この値は $1/L^d$ となり系が大きくなるにつれて 0 になる。一方局在状態の場合、この値は局在長を ξ として $1/\xi^d$ 程度になる。一般に状態が広がっていればこの値はサイズの関数として減少関数になり、局在していれば一定となっているのでこの性質から局在-非局在を判定できる。

対角化による計算の結果は波動関数など多彩な情報を含んでいるが、系のサイズが十分大きく出来ないという欠点を持っている (文献 [19] で行われた三次元系の計算で 47^3 サイト)。これに対して転送行列を使った方法 [20, 21, 22, 23, 24] では求められるのは局在長のみであるが、スケーリング法と組み合わせることにより転移点付近の様子がかなり詳しくわかる。

転送行列法で d 次元の Anderson 転移を議論するには、まず $d-1$ 次元方向には有限のサイズ M をもち、残り一方向 (簡単のため z 方向と呼ぶ) には無限に長いバーを考える。これは擬一次元系なので z 方向にそって必ず局在する。この局在長は Fermi エネルギー E の関数で $d-1$ 次元方向のサイズ M に依存するのでこれを $\xi_M(E)$ とかく。 M を大きくしていった場合、 $\xi_M(E)$ は E が局在領域にある場合は一定で E が非局在領域にある場合は増加関数となる。実際は $\Lambda_M \equiv \xi_M(E)/M$ という量を考え、これが M に関して減少関数か、増加関数かをみわけることによって E が局在領域にあるか非局在領域にあるかを判定する。

さて Λ_M は一般には Fermi エネルギー E 、不規則ポテンシャルの分布関数 $P(W)$ 及びサイズ M の関数であるが、こうした依存性はすべて無限系での局在長 ξ におしこめてしまえる、即ち

$$\Lambda_M = \frac{\xi_M}{M} = f\left(\frac{\xi(E, P(W))}{M}\right), \quad (13)$$

とかけることが示せる [20]。図1に実際、系の様々なパラメータ (E は Fermi エネルギー、 t は電子のホッピング) に対してこの一変数スケーリングがなりたっていることを示す [25]。

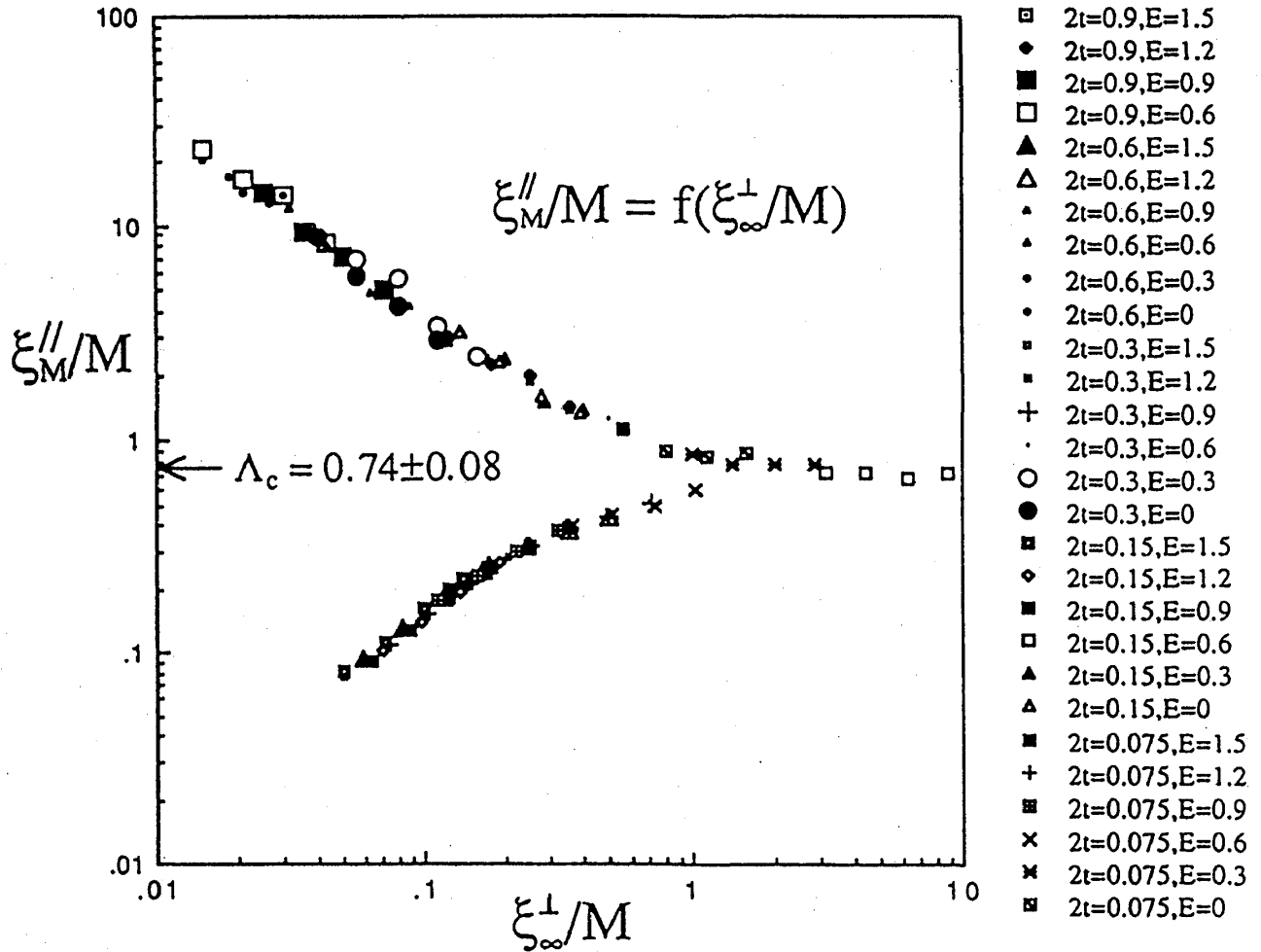


図1: Λ_M のスケーリングプロット

ξ は転移点で $(E_c - E)^{-\nu}$ で発散すると仮定し、また ξ_M は擬一次元系の局在長なのでエネルギーの解析的関数であること注目して、 Λ_M は

$$\Lambda_M = \Lambda_c + AM^{1/\nu}(E - E_c) + O((E - E_c)^2), \quad (14)$$

と展開できる。これより全てのサイズで Λ_M は一点 (E_c) で交わり、この点での Λ_M の傾きの M 依存性により ν が求められる [25]。

これにより磁場がかかっていない系では $\nu = 1.5$ [20, 24]、強磁場のかかった系では $\nu = 1.3$ [25]と評価された。いずれも20%程度のエラーバーを含んでいるので磁場がかかっている系とかかかっていない系で臨界指数が異なるという積極的な主張になっていない。これは非線形 σ -模型の結果と異なり、これらの一致を見るにはより詳しい解析が必要である。

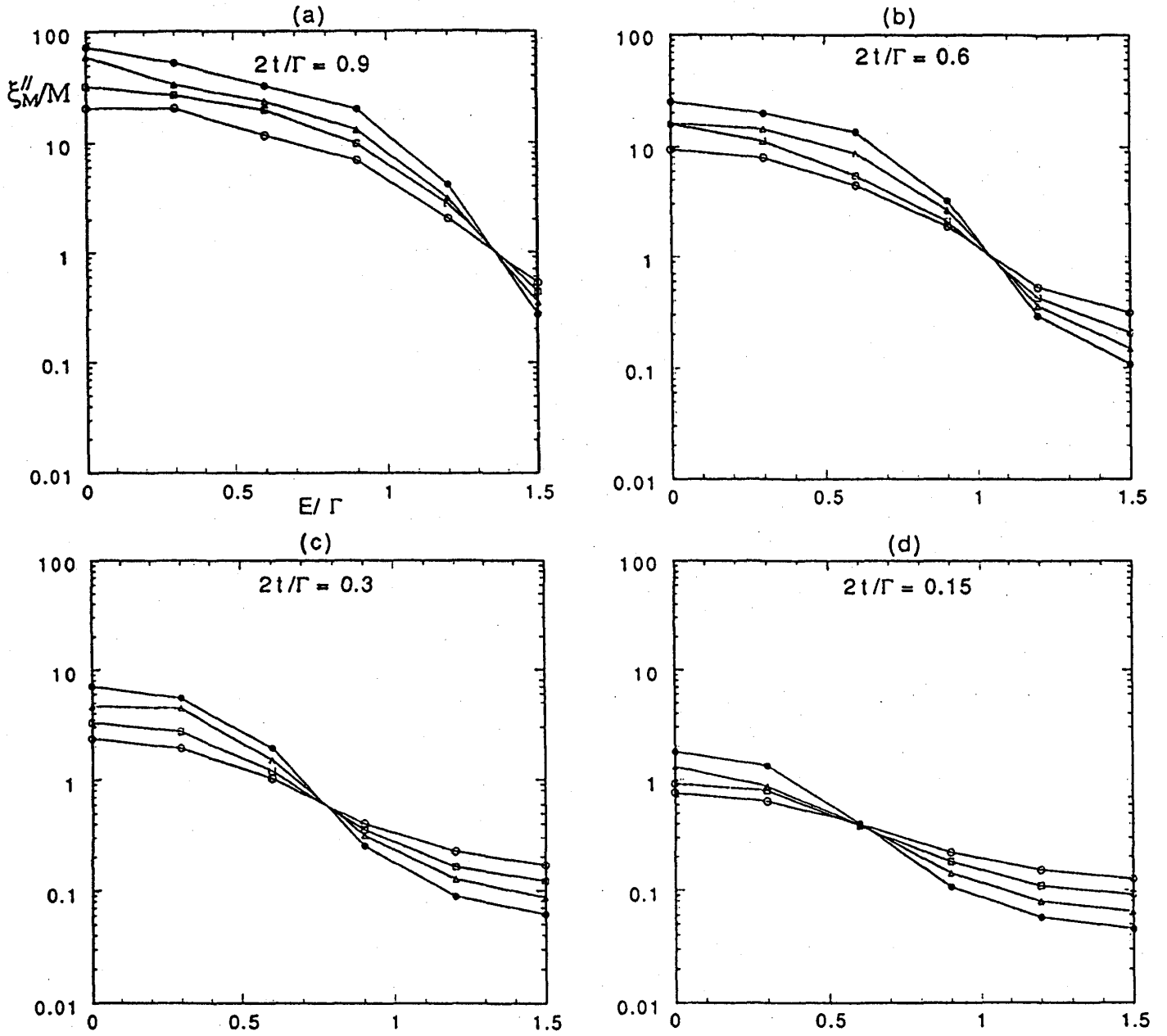


図 2: χ_M vs M ; すべての M の値に関してこれらは一点で交わる

3 二次元系

Anderson 転移の下部臨界次元は 2 なので一般には二次元での転移は存在しない。しかしこれには二つの例外がある。一つはスピナー軌道散乱が強い場合で、もう一つは量子 Hall 効果が見られる強磁場中の二次元系である。

前者は数値計算によって確かに転移が存在することが示されている [26,27]。転移点で局在長は 1.6 程度の指数で発散している。この系で特異なのはスケーリング関数 $f(\xi/M)$ の振舞いが局在領域と非局在領域で異なることである。解析的にはこの転移は拡散定数とともにスピナー軌道散乱時間も繰り込まれることで生ずることが示されている [28,29]。いずれにしてもこの系は未解決の問題を数多く含んでいる。

不規則二次元系に垂直に強磁場をかけ Landau 準位が十分分離しているときは、Hall 伝導度が e^2/h の整数倍に量子化されるという量子 Hall が観測されている [30,31,32]。全ての状態が局在しては Hall 伝導度は 0 なので観測事実と矛盾してしまうことから、この系では非局在状態が存在することが実験からも示されている。実際解析的な計算 [33,34]、数値計算 [35,36,37,38,39]、パーコレーションを応用した議論 [40,41,42] はすべて Landau 準位の中心のみが非局在状態であることを示している。臨界指数 ν の値は 2.3 程度と評価されている [38,42]。

4 転移点では

以上 Anderson 転移点近傍での局在長の振舞いを解説してきた。では局在長が発散している転移点上ではどのような状態が実現されているのであろうか？

パーコレーションによるとしきい値でクラスターはフラクタル的に広がっているようである [43]。この性質は量子的な Anderson 転移にもあてはまる。実際、数値計算によって転移点では波動関数は一様に広がっておらずフラクタルを示すことが確認されている [44,45,46,47]。またパーコレーションの問題で指摘された多重フラクタル性 [48,49] も、Anderson 転移点上の波動関数は受け継いでいることも明らかになった [50,51,52,19]。

転移点での波動関数は巾でおち、この巾 η も数値的に調べられている。二次元でコンフォーマル不変性を仮定すると、転移点での ξ_M/M の値 ($\equiv \Lambda_c$) と η は

$$\eta = \frac{1}{2\pi\Lambda_c} \quad (15)$$

を満たさなければいけない [53]。数値計算でこれらを独立に計算した結果はこのコンフォーマル不変性の仮定と矛盾しないことが指摘されている [41,54,26]。また η の値は空間次元を d 、広がった波動関数の correlation dimension を d^* として

$$\eta = d - d^* \quad (16)$$

の関係を満たしていることも数値的に確認されている。

絶対零度では状態の局在長が系のサイズよりも長くなるとコンダクタンス ($\equiv L^{d-2}\sigma$) がメソスコピックな揺らぎを示すことが知られている [55]。この揺らぎの大きさは系のパラメータにかかわらず e^2/h 程度である。このコンダクタンスの分布関数を調べたところ関数形がユニバーサルになることが指摘された [56]。このトピックスについても現在研究が盛んに行われている。

5 まとめ

以上 Anderson 転移付近の電子状態の振舞いについて解説してきた。局在長の発散を特徴づける臨界指数 ν は実験、解析的計算、数値計算間の一致を見ていない。今後の研究によりこれらの値が一致することが望まれる。また転移点上での波動関数、およびコンダクタンスの振舞いの研究も端緒に着いたばかりであり、今後より一層の研究が望まれる。

ここでは電子間相互作用を無視してきたが、相互作用を含んだ系は転移の様子が大きく変る可能性がある。現在のところ転移点付近を定量的に議論することは困難であるが、電子が局在するよりも前にスピンの局在することが予想されている [57,58,59]。このスピンの局在が Anderson 転移をどのように変えるかは大変興味深い。

謝辞

この解説を書くにあたって川村先生（阪大教養）より大変有意義なコメントをいただき、大学院生の川口君には原稿に目を通していただいた。また氷上先生にはお忙しいところを無理を言って preprint を送っていただいた。ここに深く感謝の意を表する。

追記

最近 conformal field theory を応用して、二次元系でスピナー軌道散乱が強い場合に $\nu = 3/2$ 、量子 Hall 領域では $\nu = 12/5$ がえられた [60]。また三次元の値も $\nu = 3/2$ がこれらより期待される。これらの結果は数値計算の結果と非常に近い値である。

参考文献

- [1] E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello and T.V. Ramakrishnan: Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 673.
- [2] S. Hikami, A.I. Larkin and Y. Nagaoka: Prog. Theor. Phys. **63** (1980) 707.
- [3] A. Kawabata: J. Phys. Soc. Jpn. **49** (1980) 628, **53** (1984) 3540.
- [4] H. Fukuyama: J. Phys. Soc. Jpn. **49** (1980) 2169.
- [5] 最近の総合的な報告として例えば Physica **A167** (1990) ed. by B. Kramer and G. Schön が挙げられる。
- [6] A. Kawabata: Prog. Theor. Phys. Suppl. **84** (1985) 16.
- [7] S. Katsumoto, F. Komori, N. Sano and S. Kobayashi: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 2259; **58** (1989) 791; S. Katsumoto: in *Localisation 1990*, Institute of Physics Series No. 108, p.17.
- [8] D. Vollhardt and P. Wölfle: Phys. Rev. **B22** (1980) 4666; Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 699.
- [9] Y. Ono, D. Yoshioka and H. Fukuyama: J. Phys. Soc. Jpn. **50** (1981) 3419.
- [10] T. Ohtsuki and Y. Ono: J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 2343.
- [11] F. Wegner: Z. Phys. **B35** (1979) 207; L. Schäfer and F. Wegner: Z. Phys. **B38** (1980) 113.
- [12] W. Bernreuther and F. Wegner: Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 1383; F. Wegner: Nucl. Phys. **316** (1989) 663.
- [13] S. Hikami: Phys. Rev. **B24** (1981) 2671.
- [14] S. Hikami: Physica **A167** (1990) 149; to be published in Prog. Theor. Phys. (1991).
- [15] K.B. Efetov, A.I. Larkin and Khmel'nitskii: Sov. Phys. JETP **52** (1980) 568; K.B. Efetov: Adv. Phys. **32** (1983) 53.
- [16] J.T. Chayes, L. Chayes, D.S. Fisher and T. Spencer: Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 2999.
- [17] J.T. Edwards and D.J. Thouless: J. Phys. **C5** (1972) 807; D.C. Licciardello and D.J. Thouless: Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 1475.
- [18] S. Yoshino and M. Okazaki: J. Phys. Soc. Jpn. **43** (1977) 415.
- [19] M. Schreiber and H. Grussbach: Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 607.
- [20] A. MacKinnon and B. Kramer: Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 1546, Z. Phys. **B53** (1983) 1.

- [21] J.L. Pichard and G. Sarma: J. Phys. **C14** (1981) L127, L617.
- [22] E.N. Economou, C.M. Soukoulis and A.D. Zdetis: Phys. Rev. **B30** (1984) 1686; **B31** (1985) 6483; E.N. Economou: Phys. Rev. **B31** (1985) 7710.
- [23] B. Bulka, M. Schreiber and B. Kramer: Z. Phys. **B66** (1987) 21.
- [24] B. Kramer, K. Broderix, A. MacKinnon and M. Schreiber: Physica **A167** (1990) 163.
- [25] T. Ohtsuki, B. Kramer and Y. Ono: submitted to Solid State Commun.; T. Ohtsuki, B. Kramer and Y. Ono: to be submitted.
- [26] S.N. Evangelou and T.A.L. Ziman: J. Phys. **C20** (1987) L235; S.N. Evangelou: Physica **A167** (1990) 199.
- [27] T. Ando: Phys. Rev. **B40** (1989) 5325.
- [28] D.R. Grempel: J. Phys. **C20** (1987) 3143.
- [29] A. Kawabata: J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 1717; Physica **A167** 279.
- [30] K. von Klitzing, G. Dorda and M. Pepper: Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 494.
- [31] S. Kawaji and J. Wakabayashi: in *Physics in High Magnetic Field*, ed. S. Chikazumi and N. Miura, p. 284.
- [32] D.C. Tsui, A.C. Gossard, B.F. Field, M.E. Cage and R.F. Dziuba: Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 3.
- [33] Y. Ono: J. Phys. Soc. Jpn. **51** (1982) 2055, 3544, **53** 2492.
- [34] S. Hikami: Prog. Theor. Phys. **76** (1986) 1210.
- [35] T. Ando: J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1983) 1740; **53** (1984) 3101; **53** (1984) 3126.
- [36] L. Schweitzer, B. Kramer and A. MacKinnon: J. Phys. **C17** (1984) 1984.
- [37] H. Aoki and T. Ando: Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 831; T. Ando and H. Aoki: J. Phys. Soc. Jpn. **54** (1985) 2238.
- [38] B. Huckestein and B. Kramer: Solid State Commun. **71** (1989) 445; Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1437.
- [39] B. Miek: Europhys. Lett. **13** (1990) 453.
- [40] S.A. Trugman: Phys. Rev. **B27** (1983) 7539.
- [41] J.T. Chalker and P.D. Coddington: J. Phys. **C21** (1988) 2655.
- [42] G.V. Mil'nikov and I.M. Sokolov: JETP Lett. **48** (1988) 536.
- [43] D. Stauffer: 浸透理論の基礎 (小田垣孝訳、吉岡書店) .

- [44] C.M. Soukoulis and E.N. Economou: Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 4111.
- [45] M. Schreiber: Phys. Rev. **B31** (1985) 6146.
- [46] H. Aoki: Phys. Rev. **B33** (1986) 7310.
- [47] Y. Ono, T. Ohtsuki and B. Kramer: J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 1705.
- [48] R. Blumenfeld and A. Aharony: J. Phys. **A18** (1985) 1985.
- [49] de Arcangelis, S. Redner and A. Coniglio: Phys. Rev. **B31** (1985) 4725; **B34** (1986) 4656.
- [50] Y. Ono, T. Ohtsuki and B. Kramer: J. Phys. Soc. Jpn. **60** (1991) 270 .
- [51] W. Pook and M. Janßen: Z. Phys. **B82** (1991) 295.
- [52] B. Huckestein and L. Schweitzer: in Proceeding on the *Application of High Magnetic Fields in Semiconductor Physics*, to be published in Springer Series in Solid State Science.
- [53] J. Cardy: J. Phys. **A17** (1984) L385.
- [54] J.T. Chalker: Physica **A167** (1990) 253.
- [55] P.A. Lee, A.D. Stone and H. Fukuyama: Phys. Rev. **B35** (1987) 1039.
- [56] B. Shapiro: Phil. Mag. **B56** (1987) 1031; Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 1510.
- [57] A.M. Finkelstein: Sov. Phys. JETP **57** (1983) 79; (1984) 212.
- [58] C. Castellani, C. DiCastro, P.A. Lee and M. Ma: Phys. Rev. **B30** (1984) 527.
- [59] D. Belitz and T.R. Kirkpatrick: Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 1296; Physica **A167** (1990) 259.
- [60] S. Hikami: unpublished.