

岡本-Painlevé 対の変形と Painlevé 方程式

寺島 ひとみ (Hitomi Terajima) 神戸大自然 (Kobe Univ.)

概要

岡本和夫氏により構成された初期値空間と呼ばれる曲面は、Painlevé 方程式が定める解曲線をとらえているような空間で、有理曲面からある因子を除いたような形で得られる ([O]).

初期値空間は、Painlevé 方程式から構成されるのであるが、我々は、これとは逆に、「ある条件を満たすコンパクト曲面 S と因子 Y の組 (generalized 岡本-Painlevé 対) から出発して、 $S - Y$ 上定義される微分方程式が導出される」ことを示した. ここでは、複素構造の変形理論が重要な役割を果たす.

この話の内容は、齋藤政彦氏と竹部太郎氏との共同研究に基づいている. 詳細については [STT] を参照されたい.

1 generalized 岡本-Painlevé 対

まずこの節では、generalized 岡本-Painlevé 対の概念を導入し、その分類などについて述べる.

1.1 generalized 岡本-Painlevé 対

S を複素射影曲面とし、 K_S で S の標準束または標準因子類を表す. ここで、反標準因子類 $-K_S$ が有効、すなわち有効因子 $Y \in |-K_S|$ が存在することを仮定する. これは、「 S 上の有理 2 形式 ω であって、これが定める因子が $(\omega) = (\omega)_0 - (\omega)_\infty = -Y$ となるようなものが存在する」ということを意味している. この ω は $S - Y$ 上でゼロにならないので、幾何的には、 ω が $S - Y$ 上の正則シンプレクティック構造を定めている.

定義 1.1 S を複素射影曲面、 $Y \in |-K_S|$ を S 上の反標準因子とする. また、 $Y = \sum_{i=1}^r m_i Y_i$ を Y の既約分解とする. 対 (S, Y) が次の条件を満たす時、**generalized 岡本-Painlevé 対**という.

任意の i ($1 \leq i \leq r$) に対し、

$$Y \cdot Y_i = \deg Y|_{Y_i} = 0. \quad (1)$$

特に、 S が有理曲面のとき、 (S, Y) を **generalized rational 岡本-Painlevé 対**とよぶ.

任意の Painlevé 方程式の初期値空間は、ある generalized rational 岡本-Painlevé 対 (S, Y) の $S - Y$ に一致する。また、generalized rational 岡本-Painlevé 対 (S, Y) に対して、 Y の配置は、小平の特異ファイバーの分類のひとつと一致することが分かる ([Sa-Tak] Proof of Theorem 2.1 参照)。

また、これより先に導入された岡本-Painlevé 対とは、さらに下の条件を課したものである ([Sa-Tak] 参照)。

1. $D := Y_{red} = \sum_{i=1}^r Y_i$ とする。このとき、 $S - D$ は Zariski 開集合として $\mathbf{C}^2$ を含む。
2. $F = S - \mathbf{C}^2$ (ここで、 $\mathbf{C}^2$ は、上の Zariski 開集合) は、正規交叉因子である。(このとき、特に $D = Y_{red}$ は正規交叉因子である。)

generalized rational 岡本-Painlevé 対 (S, Y) はその定義から、「坂井氏により導入された generalized Halphen 曲面 ([Sakai] 参照) S に対し、 $|-K_S|$ の元 Y をひとつ決めたもの」と思うことができる。したがって、Proposition 2, §2, [Sakai] より、「generalized rational 岡本-Painlevé 対 (S, Y) の S は、 $\mathbf{P}^2$ の 9 点ブローアップにより得られる」ということが分かる。また、これらは、ブローアップする点によってパラメータ付けされている。

generalized Halphen 曲面は、 $|-K_S|$ の次元が 0 か 1 かによって区別される。次元が 0 のときは $|-K_S|$ の元 Y は一意なので、generalized Halphen 曲面 S に対し、generalized rational 岡本-Painlevé 対が一意に対応する。また、次元が 1 のときは、 S は「elliptic fibration の構造 $\varphi: S \rightarrow \mathbf{P}^1$ で $\varphi^*(\infty) = Y$ をみたすもの」を持っていることが分かる。各ファイバーは $|-K_S|$ の元なので、このときは、generalized Halphen 曲面 S に対し、generalized rational 岡本-Painlevé 対が一意には決まらない。このような意味でも、次のように generalized 岡本-Painlevé 対を二つに分けることができる。

定義 1.2 generalized 岡本-Painlevé 対 (S, Y) が **fibred type** であるとは、elliptic fibration $\varphi: S \rightarrow \mathbf{P}^1$ で、ある $n \geq 1$ に対し $\varphi^*(\infty) = nY$ となるようなものが存在するときいう。

fibred type でないとき、**non-fibred type** であるという。

命題 1.1 (Proposition 1.3, [STT]) generalized rational 岡本-Painlevé 対 (S, Y) に対し、次は同値。

1. (S, Y) は *non-fibred type*。
2. $H^0(S - Y, \mathcal{O}^{alg}) \simeq \mathbf{C}$ 、すなわち、 $S - Y$ 上の *regular* な関数は定数関数である。

1.2 分類

坂井氏により、 $\dim |-K_S| = 0$ の場合の generalized Halphen 曲面が分類されている ([Sakai] 参照)。これは、一意に定まる有効因子 $Y = \sum_{i=1}^r m_i Y_i \in |-K_S|$ の型による分類なので、non-fibred type の generalized rational 岡本-Painlevé 対 (S, Y) は Y の配置で分類されることになる。

$Y = \sum_{i=1}^r m_i Y_i$ を Y の既約分解とし、 $M(Y)$ を $\{Y_i\}_{i=1}^r$ で生成される $\text{Pic}(S) \simeq H^2(S, \mathbb{Z})$ の部分格子とする. $M(Y)$ のルート系のタイプを $R(Y)$ とすると、表 1 のように分類することができる. また、表 1 では Y の小平タイプも併記している. $R(Y)$ は大きく elliptic type、multiplicative type、additive type の 3 つに分けることができるが、これは表 2 にある対応からきている. この表で、 $(\text{Pic}^0(Y))^0$ は、 Y の genrealized Jacobian $\text{Pic}^0(Y)$ の単位元の成分を表す. 図 1 に Y の配置の例を挙げたが、この図では、線分は $Y_i \simeq \mathbb{P}^1$ を、そのそばに書いた数でその重複度を表している.

表 1 の中で、 $\tilde{D}_r$ 、 $\tilde{E}_r$ に対応する generalized rational 岡本–Painlevé 対 (S, Y) の $S - Y$ は、Painlevé 方程式の初期値空間に対応する (表 3 参照). Painlevé 方程式は 6 個だが、Painlevé III 型がパラメータの値によりさらに 3 つに分類されるので、8 個のタイプがでてくる.

岡本–Painlevé 対の分類 ([Sa-Tak] 参照) には、 $\tilde{D}_8$ がでてこないが、これは、初期値空間 $S - Y$ が $\mathbb{C}^2$ を含まないことによる.

	$R(Y)$ (小平タイプ)
elliptic type	$\tilde{A}_0 (= I_0)$
multiplicative type	$\tilde{A}_0^* (= I_1), \tilde{A}_1 (= I_2), \dots, \tilde{A}_7 (= I_8), \tilde{A}_8 (= I_9)$
additive type	$\tilde{A}_0^{**} (= II), \tilde{A}_1^* (= III), \tilde{A}_2^* (= IV)$ $\tilde{D}_4 (= I_0^*), \dots, \tilde{D}_8 (= I_4)$ $\tilde{E}_6 (= IV^*), \tilde{E}_7 (= III^*), \tilde{E}_8 (= II^*)$

表 1: generalized rational 岡本–Painlevé 対の分類

$R(Y)$	$\dim H_1(Y_{red}, \mathbb{Z})$	$(\text{Pic}^0(Y))^0$	Y の配置
elliptic type	2	smooth elliptic curve Y	smooth elliptic curve
multiplicative type	1	$\mathbf{G}_m \simeq \mathbb{C}^\times$	cycle
additive type	0	$\mathbf{G}_a \simeq \mathbb{C}$	tree

表 2:

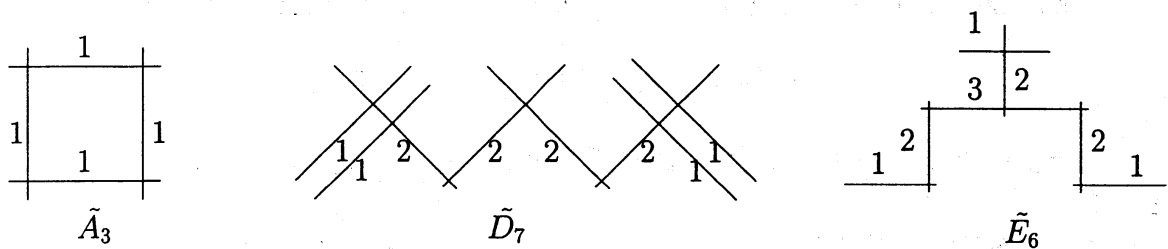


図 1: Y の配置の例

2 generalized rational 岡本–Painlevé 対の変形

この節では、微分方程式を導出する準備として generalized rational 岡本–Painlevé 対の変形と無限小変形について述べるのだが、まずはじめに、ここで使う一般論 ([Kaw] 参照) について少し復習する。

2.1 non-singular pair (S, D) の変形理論

(S, D) を、非特異コンパクト複素曲面 S と S 上の単純正規交叉因子 $D = \sum_{i=1}^r D_i$ (すなわち各 D_i は非特異複素多様体で交わりはすべて正規交叉) の対とし、non-singular pair と呼ぶ。

定義 2.1 (Definition 3, [Kaw]) non-singular pair (S, D) の変形とは、次をみたす 5 つ組 $\mathcal{F} = (S, \mathcal{D}, \pi, B, \iota)$ のことをいう。

1. S は複素多様体、 B は連結な複素多様体で、 $\pi : S \rightarrow B$ はなめらかな固有正則写像である。
2. $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^r \mathcal{D}_i$ は S の単純正規交叉因子である。
3. B のある点 0 において、 $\iota : (S, D) \xrightarrow{\sim} (\pi^{-1}(0), \pi^{-1}(0) \cap \mathcal{D}) = (S_0, \mathcal{D}_0)$ は複素解析同型。
4. π は局所的には直積空間からの射影である、すなわち、任意の点 $p \in S$ に対し p の開近傍 U と同型写像 $\varphi : U \rightarrow V \times W$ が存在し、次の図式を可換にし、 $\varphi(U \cap \mathcal{D}) = V \times (W \cap \mathcal{D})$ となる (ここで、 $V = \pi(U)$ 、 $W = \pi^{-1}(\pi(p))$) 。

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \times W \\ \pi \searrow & & \swarrow pr_1 \\ & V & \end{array}$$

ここでは、対 (S, D) の変形を次の図式で表し、 $t \in B$ のファイバー $\pi^{-1}(t)$ を S_t と書く。

$$\begin{array}{ccc} S & \longleftrightarrow & \mathcal{D} \\ \pi \downarrow & & \swarrow \\ B & & \end{array}$$

対の変形理論では、次で定義される logalithmic tangent sheaf が重要な役目を果たす。

$$\Theta_S(-\log D) = \{\theta \in \Theta_S \mid \theta \mathcal{I}_D \subset \mathcal{I}_D\}.$$

ここで Θ_S は S 上の正則ベクトル場の芽の層を、 $\mathcal{I}_D$ は $\mathcal{O}_S$ における D の ideal sheaf を表す。

例えば、ある座標近傍 $U \ni (z_1, z_2)$ で、 $D \cap U = \{z_1 = 0\}$ ならば、 U 上の切断全体は、

$$\Gamma(U, \Theta_S(-\log D)) = \mathcal{O}_{U z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} + \mathcal{O}_U \frac{\partial}{\partial z_2}$$

で与えられる.

また、対 (S, D) の変形が与えられると、コンパクト複素多様体の変形理論のときと同様に、次の小平–Spencer 写像 (式 (10) 参照) が定義される事が知られている.

$$\rho_0 : T_0(B) \longrightarrow H^1(S, \Theta_S(-\log D)).$$

ここで、 $T_0(B)$ は、 B の点 0 における、接ベクトル空間.

さらに、コンパクト複素多様体の変形理論のときと同様に、つぎの定理を示すことができる.

定理 2.1 ([Kaw]) *non-singular pair* (S, D) に対し、 $H^2(S, \Theta_S(-\log D)) = \{0\}$ ならば、倉西空間 $(B, 0)$ と (S, D) の半普遍族 (*semi-universal family*)

$$\begin{array}{ccc} S & \leftarrow & D = \sum_{i=1}^r D_i \\ \pi \downarrow & \swarrow \varphi & \\ B & & \end{array}$$

が存在し、次が成立する.

1. $(B, 0)$ は、非特異な複素多様体である.
2. 小平–Spencer 写像は、同型 $T_0(B) \xrightarrow{\sim} H^1(S, \Theta_S(-\log D))$ を導く.

2.2 generalized rational 岡本–Painlevé 対の変形

以下、変形理論を generalized rational 岡本–Painlevé 対 (S, Y) に適用するために、いくつかの重要なコホモロジーを挙げておく. ここで、 $D := Y_{\text{red}} = \sum_{i=1}^r Y_i$ とおく.

補題 2.1 (S, Y) を generalized rational 岡本–Painlevé 対とする. このとき、次が成り立つ.

1. $H^2(S, \Theta_S(-\log D)) = \{0\}$.
2. $H^2(S, \Theta_S) = \{0\}$.

この補題から、 (S, Y) の倉西空間 $(B, 0)$ は非特異複素多様体であることが分かり、したがって、 $\dim B = \dim T_0(B)$ が分かる. また、小平–Spencer 写像は、同型 $T_0(B) \xrightarrow{\sim} H^1(S, \Theta_S(-\log D))$ になるので、倉西空間の次元は、 $\dim H^1(S, \Theta_S(-\log D))$ となる. また、 S の倉西空間 $\tilde{B}$ も非特異で、 $\dim \tilde{B} = \dim H^1(S, \Theta_S)$ が言える.

補題 2.2 (S, Y) を generalized rational 岡本–Painlevé 対で、次の条件

- (S, Y) は *non-fibered type*、
- $D = Y_{\text{red}}$ は単純正規交叉因子、

を満たすものとする. このとき、次が成り立つ.

$$H^0(S - D, \Theta_{S-D}^{\text{alg}}) = \{0\}.$$

ここで、 $\Theta_{S-D}^{\text{alg}}$ は algebraic regular vector field の芽の層.

また、次の補題によって、倉西空間の次元が決定される。

補題 2.3 (S, Y) を *generalized rational* 岡本–Painlevé 対で、次の条件

- (S, Y) は *non-fibered type*、
- $D = Y_{red}$ は 単純正規交叉因子、
- $r \geq 2$ (r は Y の既約成分の個数)、

を満たすものとする。このとき、次が成り立つ。

1. $\dim H^1(S, \Theta_S) = 10$ 、
2. $\dim H^1(S, \Theta_S(-\log D)) = 10 - r$ 。

これらの補題によって、補題 2.3 の仮定を満たす *generalized rational* 岡本–Painlevé 対 (S, Y) の倉西空間 $(B, 0)$ は $10 - r$ 次元非特異複素多様体となることが分かった。この結果と、Painlevé 方程式との関係をまとめると表 3 のようになる。ここで、方程式のパラメータの個数は、以前から知られていたものである。

Y	$\tilde{E}_8$	$\tilde{D}_8$	$\tilde{E}_7$	$\tilde{D}_7$	$\tilde{D}_6$	$\tilde{E}_6$	$\tilde{D}_5$	$\tilde{D}_4$	$\tilde{A}_{r-1}, r \geq 2$
Y の既約成分の個数	9	9	8	8	7	7	6	5	r
$\dim B = \dim H^1(S, \Theta_S(-\log D))$	1	1	2	2	3	3	4	5	$10 - r$
Painlevé 方程式	P_I	$P_{III}^{\tilde{D}_8}$	P_{II}	$P_{III}^{\tilde{D}_7}$	$P_{III}^{\tilde{D}_6}$	P_{IV}	P_V	P_{VI}	none
方程式のパラメータの個数	0	0	1	1	2	2	3	4	

表 3:

この表を眺めると、 $\tilde{D}_r$ または $\tilde{E}_r$ タイプのとき、

$$(\text{倉西空間 } B \text{ の次元}) = 1 + (\text{Painlevé 方程式にはいつているパラメータの個数}) \quad (2)$$

という関係があることがわかる。

2.3 初期値空間の変形

ここで上記の設定を少し離れて、岡本氏が与えた初期値空間 ([O] 参照) がどのようなものであったかを少し思い出しておこう。Painlevé 方程式 $P_J (J = I, \dots, VI, III^{\tilde{D}_7}, III^{\tilde{D}_8})$ の初期値空間¹ は、方程式の s_J 個のパラメータ (ここでは、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s_J}) \in B$ と書く) と、いわゆる時間パラメータ $t \in B$ に依存して定まる曲面であった。(ここで、 B と B は、 $\mathbb{C}^{s_J}$ と $\mathbb{C}$ の適当な Zariski 開集合。) また、これらは、あるコンパクト曲面からある因子を除いて得られる。そこで、コンパクト曲面を $\overline{M}_J(\alpha, t)$ 、因子を $D_J(\alpha, t)$ とおき、初期値空間を $M_J(\alpha, t) = \overline{M}_J(\alpha, t) - D_J(\alpha, t)$ と書くことにする。

¹ [O] では $III^{\tilde{D}_7}, III^{\tilde{D}_8}$ はあらわれてはいないが同様に定義できる。

そこで、各 J について、これらを (α, t) について束ねた多様体

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}}_J &= \bigcup_{(\alpha, t) \in \mathcal{B} \times B} \overline{\mathcal{M}}_J(\alpha, t) \supset \mathcal{D}_J = \bigcup_{(\alpha, t) \in \mathcal{B} \times B} D_J(\alpha, t) \\ \mathcal{M}_J &= \bigcup_{(\alpha, t) \in \mathcal{B} \times B} \mathcal{M}_J(\alpha, t) = \overline{\mathcal{M}}_J - \mathcal{D}_J\end{aligned}$$

を考える。このとき、

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{M}_J & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_J & \longleftarrow & \mathcal{D}_J \\ & \searrow & \pi \downarrow & \swarrow & \\ & & \mathcal{B} \times B & & \end{array} \quad (3)$$

は、対 $(\overline{\mathcal{M}}_J, D_J)$ の変形になっている。これにより、式 (2) の意味が見えてくる。対の変形 (3) の半普遍性については厳密には議論が必要ではあるが、ナイーブには、この、対の変形のパラメータ空間の次元が

$$(\text{Painlevé 方程式にはいっているパラメータの個数}) + 1$$

であるという事実に対応していると言えそうである。特に '+1' は、時間パラメータ t の分である。また変形のパラメータたちの中で、時間パラメータが特別であると考えるのは自然であろう。

では、変形理論の言葉でこの特別なパラメータの意味付けをしてみよう。対の変形 (3) を $\mathcal{M}_J$ に制限して初期値空間の変形

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_J & & \\ \pi \downarrow & & \\ \mathcal{B} \times B & & \end{array} \quad (4)$$

を得ることができる。この初期値空間の変形 (4) に対して、方程式のパラメータ α を fix し、変形のパラメータ空間を $\alpha \times B$ に制限したもの

$$\begin{array}{ccc}\pi^*(\alpha \times B) & \subset & \mathcal{M}_J \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ \alpha \times B & \subset & \mathcal{B} \times B\end{array} \quad (5)$$

を考える。 $\pi^*(\alpha \times B)$ は、**定義多様体**と呼ばれているものである。この変形が局所自明な変形である、すなわち「 $\frac{\partial}{\partial t}$ の方向には初期値空間の複素構造は変わらない」、ということは、Painlevé 方程式 P_J と同値な Hamilton 系 H_J (を拡張したもの) によって定まる $\pi^*(\alpha \times B)$ の葉層構造の性質から明らかである。

したがって、「 $\overline{\mathcal{M}}_J \rightarrow \alpha \times B$ は変形しているにもかかわらず、初期値空間に制限した制限した $\mathcal{M}_J \rightarrow \alpha \times B$ は局所自明な変形である」というのが変形理論からみた時間パラメータ t の特徴であるといえる。また、これは小平-Spencer 写像

$$\rho(\alpha, t) : T_{(\alpha, t)}(\mathcal{B} \times B) \longrightarrow H^1(\mathcal{M}_J(\alpha, t), \Theta_{\mathcal{M}_J(\alpha, t)})$$

$$\rho(\alpha, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = 0 \in H^1(\mathcal{M}_J(\alpha, t), \Theta_{\mathcal{M}_J(\alpha, t)})$$

とも言い換えらる.

初期値空間およびその変形(族)は、微分方程式を出発点として構成されるであるが、我々の立場は、これとは逆に、「岡本-Painlevé 対の変形から出発し、微分方程式にたどり着く」という方針である. 与えられた変形に対して、上のような特別な方向への無限小変形を考えれば、4節で説明するように、小平-Spencer 理論をつかって、微分方程式が導出されるのである.

3 時間パラメータと局所コホモロジー

3.1 時間パラメータの特徴づけ

先ほどの話では、時間パラメータは具体的に与えられていたのだが、任意に対 (S, D) の半普遍族をとってきた時に、パラメータ空間で時間パラメータに相当する部分をどう特徴付ければよいだろうか?

以下この問題を、小平-Spencer 写像による同型によって、「対 (S, D) の無限小変形の空間 $H^1(S, \Theta_S(-\log D))$ の中で、時間パラメータの方向 $\frac{\partial}{\partial t}$ に相当する特別な部分空間を記述する」という問題に帰着し、コホモロジーを使って考えることにする.

この節では、 (S, Y) を generalized rational 岡本-Painlevé 対で、次の条件

1. (S, Y) は non-fibered type、
2. $D = Y_{red}$ は simple normal crossing divisor、
3. $r \geq 2$ (r は Y の既約成分の個数)、

を満たすものとする。(条件 2、3 をみたすのは、表 3 にあるタイプなので、Painlevé 方程式と対応する $\tilde{D}_r, \tilde{E}_r$ 以外に、 $\tilde{A}_r$ タイプも扱う.) また、 $\mathcal{O}_S$ と $\mathcal{O}_{S-D}$ は、それぞれ S と $S-D$ 上の algebraic regular function の芽の層とし、 $\mathcal{O}_S$ -加群の層は algebraic category で考える.

ここで、天下りのあるが、次の局所コホモロジーの完全列 ([Corollary 1.9, [Gr]] 参照) を考える.

$$\begin{aligned} H^0(S, \Theta_S(-\log D)) &\rightarrow H^0(S-D, \Theta_S(-\log D)) \rightarrow H_D^1(\Theta_S(-\log D)) \rightarrow \\ H^1(S, \Theta_S(-\log D)) &\xrightarrow{\text{res}} H^1(S-D, \Theta_S(-\log D)) \end{aligned} \quad (6)$$

また仮定から、 (S, Y) は non-fibered type なので、補題 2.2 より、

$$H^0(S-D, \Theta_S(-\log D)) = H^0(S-D, \Theta_{S-D}) = \{0\},$$

が成り立つ. したがって次の重要な完全列を得る.

$$0 \rightarrow H_D^1(\Theta_S(-\log D)) \rightarrow H^1(S, \Theta_S(-\log D)) \xrightarrow{\text{res}} H^1(S-D, \Theta_{S-D}). \quad (7)$$

したがって、自然に $H_D^1(\Theta_S(-\log D))$ は $H^1(S, \Theta_S(-\log D))$ の部分群とすることができる。正確には、

$$H_D^1(\Theta_S(-\log D)) \simeq \{\theta \in H^1(S, \Theta_S(-\log D)) \mid \underline{\theta|_{S-D} = 0} \in H^1(S-D, \Theta_{S-D})\}.$$

ここで、 (S, D) の半普遍族

$$\begin{array}{ccc} S & \leftarrow & D \\ \pi \downarrow & \swarrow \varphi & \\ B & & \end{array}$$

を考える。小平–Spencer 写像は、同型 $\rho_0 : T_0(B) \xrightarrow{\sim} H^1(S, \Theta_S(-\log D))$ を導くのであるが、先ほどの初期値空間の変形に対する考察から

$$\underline{H_D^1(\Theta_S(-\log D))} \simeq \rho_0^{-1}(H_D^1(\Theta_S(-\log D))) \simeq \underline{\text{時間パラメータの方向}} \subset T_0(B)$$

と特徴付けができそうである。そこで、 $\tilde{D}_r$, $\tilde{E}_r$ タイプについては、Painlevé 方程式と対応することから、

$$\dim_{\mathbb{C}} H_D^1(\Theta_S(-\log D)) = 1,$$

と予想できる。また、 $\tilde{A}_r$ タイプのときは、対応する Painlevé 方程式が知られていないことから、

$$\dim_{\mathbb{C}} H_D^1(\Theta_S(-\log D)) = 0,$$

と予想できる。

3.2 局所コホモロジー

では、先ほどの局所コホモロジー $H_D^1(\Theta_S(-\log D))$ に対する予想について考察する。

3.2.1 $\tilde{D}_r$, $\tilde{E}_r$ タイプ (Painlevé 方程式と対応するタイプ) の場合

定理 3.1 ([T1])

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(D, \Theta_S(-\log D) \otimes N_D) = 1$$

ここで、 $N_D = \mathcal{O}_S(D)/\mathcal{O}_S$ である。

また、このとき、つぎの inclusion がある。

$$H^0(D, \Theta_S(-\log D) \otimes N_D) \hookrightarrow H_D^1(\Theta_S(-\log D)).$$

したがって、

$$\underline{\dim_{\mathbb{C}} H_D^1(S, \Theta_S(-\log D))} \geq 1$$

証明の概略 この場合、 $H^0(D, \Theta_S(-\log D) \otimes N_D)$ は、線形写像

$$\delta : H^0(\Theta_D \otimes N_D) \longrightarrow \oplus_{i=1}^r H^1(N_{Y_i/S}).$$

の核と同型であることが示される.

そこで各タイプの岡本-Painlevé 対について、実際に座標系をとり、Čech コホモロジーの計算を行うと、 δ はそれぞれのタイプの Affine ルート系の Cartan 行列として行列表示できることが分かる. したがって、 $\dim_{\mathbb{C}} H^0(D, \Theta_S(-\log D) \otimes N_D) = 1$ を得る. $\square$

系 3.1 $\tilde{D}_8, \tilde{E}_8$ タイプのときは、 $\dim H^1(S, \Theta_S(-\log D)) = 1$ であるから、

$$\dim_{\mathbb{C}} H_D^1(\Theta_S(-\log D)) = 1.$$

[STT] では、局所コホモロジーの評価はここまでしか与えていないが、 $\tilde{D}_8, \tilde{E}_8$ 以外のタイプについても、 $S - D$ にはいる (-2) curve を使うともう少し様子がわかる.

補題 3.1 $S - D$ に (-2) curve が $s = 9 - r$ 本入っているとき次が成り立つ.

$$\dim_{\mathbb{C}} H_D^1(\Theta_S(-\log D)) \leq 1. \quad (8)$$

証明の概略 一般に、 $S - D$ に入る (-2) curve たちを $C = \sum_{i=1}^s C_i$ とし、次の局所コホモロジーの完全列を考える.

$$H^0(S - D, \Theta_S(-\log(D + C))) \rightarrow H_D^1(\Theta_S(-\log(D + C))) \rightarrow H^1(S, \Theta_S(-\log(D + C))).$$

(S, Y) は non-fibered type なので、 $H^0(S - D, \Theta_S(-\log(D + C))) = \{0\}$ であることが分かる. また別の議論から、

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \Theta_S(-\log(D + C))) = 10 - (r + s) \quad (9)$$

となる事も示せる. 仮定より、式 (9) の右辺は 1 であるから、式 (8) は示された. $\square$

また、コホモロジーの次元は上半連続であることから、次の系を得る.

系 3.2 補題 3.1 の仮定を満たす (S, Y) の任意の変形

$$\begin{array}{ccc} S & \leftarrow & D \\ \pi \downarrow & & \swarrow \\ B & & \end{array}$$

に対して、 B の Zariski 開集合 U を適当にとると、

$$\dim H_{D_t}^1(\Theta_{S_t}(-\log D_t)) \leq 1 \quad (\forall t \in U)$$

が成り立つ.

ここでは触れないが、 $S - Y$ にはいる (-2) curve の配置の分類 ([T2] 参照) により、「 $\tilde{D}_7$ タイプでは (-2) curve が入らない」、「 $\tilde{D}_7$ 以外のタイプでは、補題 3.1 の仮定を満たす (S, Y) が存在する」ということが分かる. また、4 節で例を挙げるように、各タイプについて、「任意の (S, Y) がファイバーに存在するような変形」が構成できる. したがって、定理 3.1 と系 3.2 から次を得る.

命題 3.1 $\tilde{D}_4, \tilde{D}_5, \tilde{D}_6, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7$ タイプの ‘一般’ の (S, Y) について、次が成り立つ.

$$\dim_{\mathbb{C}} H_D^1(\Theta_S(-\log D)) = 1.$$

ここで ‘一般’ とは、上で述べたような変形のパラメータ空間の、ある Zariski 開集合のファイバーという意味である.

3.2.2 $\tilde{A}_r$ タイプの場合

定理 3.2 ([T1]) $\tilde{A}_8$ タイプの (S, Y) について、次が成り立つ.

$$\dim_{\mathbb{C}} H_D^1(\Theta_S(-\log D)) = 0.$$

証明については、 $\tilde{A}_r$ タイプのとき「各 i について Y_i と $Y - Y_i$ は 2 点で交わる」ということに注意すると、あとは定理 3.1 とほぼ同様である. また、 $r = 8$ 以外の場合も同様に示されると思われる.

正確にはこの定理が成り立つのは、あるパラメータづけで、 t が 1 の n 乗根でないときであるが、 t が 1 の n 乗根のときは fibered type であると思われるので、上のように formulate した.

この結果は、 $\tilde{A}_r$ タイプの時は、対の半普遍族を $S - D$ に制限しても自明になる方向がないことを意味している. これは、次の節で説明するような方法で微分方程式が導出されない² という事である.

4 グローバルな変形から微分方程式ができるまで

ここでは、 $\tilde{D}_7$ タイプ ($P_{III}^{\tilde{D}_7}$) の場合を例に、小平–Spencer 理論を使って、「グローバルな変形から微分方程式 (Hamilton 系) ができるまで」をおっていきたい. 以下、コホモロジーは、Čech コホモロジーで考える.

先に述べたように、坂井氏の結果から、generalized rational 岡本–Painlevé 対は、 $\mathbf{P}^2$ のブローアップする点によりパラメータ付けされるので、ここでは「Appendix B, [Sakai] にしたがってブローアップして構成した、 $\tilde{D}_7$ タイプのグローバルな変形」を用いる. $S - D$ 上の微分方程式を導出することが目的なので、ここでは、下のように $S - D$ の座標系を与えるにとどめておく.

また、坂井氏は、周期写像の考え方によるパラメータ付け ([Sakai] 参照) も行っていて、これと上のパラメータ付けを比較することにより、方程式の時間パラメータを与えている. そこで、ここでは変形のパラメータ空間を、その他のパラメータと時間パラメータに分けて $\mathcal{M} \times \mathcal{B}$ とする. 今の場合、 $\mathcal{M} = \text{Spec} \mathbb{C}[\alpha] \simeq \mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \text{Spec} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \simeq \mathbb{C}^\times$ で与えられる. 変形のパラメータ空間が 2 次元であることは、 $\dim H^1(S, \Theta_S(-\log Y)) = 2$ に対応して.

$$\begin{array}{c} S - D = \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2 \cup \tilde{U}_3 \\ \pi \downarrow \\ \mathcal{M} \times \mathcal{B} \end{array}$$

ここで、 $S - D$ は、座標

$$\tilde{U}_1 = \text{Spec} \mathbb{C}[u_1, v_1, \alpha, t, t^{-1}] \cong \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^\times,$$

² $\tilde{A}_r$ タイプの時は、坂井氏の仕事 [Sakai] により、差分 Painlevé 方程式が対応することが知られてい

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_2 &= \text{Spec} \mathbb{C}[u_2, v_2, \alpha, t, t^{-1}] \cong \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^\times, \\
\tilde{U}_3 &= \text{Spec} \mathbb{C}[u_3, v_3, \frac{1}{F_3(u_3, v_3, \alpha, t)}, \alpha, t, t^{-1}] \\
&\cong \mathbb{C}^4 - \{F_3(u_3, v_3, \alpha, t) = 0, t = 0\}, \\
&\quad (\text{ここで、} F_3(u_3, v_3, \alpha, t) = -t - u_3 v_3^2 + t \alpha v_3)
\end{aligned}$$

を、各ファイバーごとに次の関係式で張り合わせたものである。

$$\begin{cases} u_1 = f_{12}(u_2, v_2, \alpha, t) = \frac{1 + (1 - \alpha) v_2 + u_2 v_2^2}{v_2^2}, \\ v_1 = g_{12}(u_2, v_2, \alpha, t) = v_2, \\ u_1 = f_{13}(u_3, v_3, \alpha, t) = -v_3 F_3(u_3, v_3, \alpha, t), \\ v_1 = g_{13}(u_3, v_3, \alpha, t) = -\frac{1}{v_3^2 F_3(u_3, v_3, \alpha, t)}. \end{cases}$$

また、座標 $\tilde{U}_j$ を、各ファイバー $(S - \mathcal{D})_{(\alpha, t)}$ に制限したものを $\tilde{U}_j \cap (S - \mathcal{D})_{(\alpha, t)}$ を $U_{j(\alpha, t)}$ (混同のおそれがなければ単に U_j) と書くことにする。(ファイバーの座標であることを強調したいので、チルダ ‘~’ をとって表すことにする。) $U_{1(\alpha, t)}, U_{2(\alpha, t)}$ は $\mathbb{C}^2$ となるが、 $U_{3(\alpha, t)} \simeq \mathbb{C}^2 - \{F_3(u_3, v_3, \alpha, t) = 0\}$ は $\mathbb{C}^2$ でないことを注意しておく。

これらの張り合わせの関数から、 $\partial/\partial t$ に対応する、小平–Spencer クラスを計算してみよう。

$$\begin{aligned}
\rho_{(\alpha, t)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &:= \left[\left\{ \begin{aligned} \theta_{jk}(\alpha, t) &= \frac{\partial f_{jk}(u_k, v_k, \alpha, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}(u_k, v_k, \alpha, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v_j} \\ &\in \Gamma(U_{jk}, \Theta_{(S - \mathcal{D})_{(\alpha, t)}}) \end{aligned} \right\} \right] \\
&= [\{\theta_{12}(\alpha, t) = 0, \theta_{13}(\alpha, t) = \frac{u_1 v_1 - \alpha}{u_1^2 v_1^2} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{-u_1 v_1 + \alpha}{u_1^3 v_1} \frac{\partial}{\partial v_1}\}] \\
&\in H^1((S - \mathcal{D})_{(\alpha, t)}, \Theta_{(S - \mathcal{D})_{(\alpha, t)}}). \tag{10}
\end{aligned}$$

(ここで、 $U_{jk} = U_j \cap U_k$ であり、 θ_{jk} は U_{jk} 上の正則ベクトル場。)

これは、時間パラメータに対応する方向の無限小変形なので、

$$\rho_{(\alpha, t)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0 \in H^1((S - \mathcal{D})_{(\alpha, t)}, \Theta_{(S - \mathcal{D})_{(\alpha, t)}})$$

となることが予想できる。

ここで、「 M を複素多様体としたとき、 $H^1(M, \Theta_M)$ の元として $\{\tau_{jk}\} = 0$ である」という事の意味を思い出しておこう。これは、コホモロジーの定義から、「 $M = \cup U_j$ を局所有限開被覆としたとき、0 コチェイン $c^0 = \{\theta_j \in \Gamma(U_j, \Theta_M)\}$ であって、これの双対境界 (coboundary) $\delta c^0 := \{\theta_{jk} = \theta_k - \theta_j\}$ が $\{\tau_{jk}\}$ と一致するものが存在する」という意味であった。(正確には、必要に応じて開被覆の細分をとらなければいけないが。)

では実際に各 (α, t) に対して、 $\delta c^0(\alpha, t) = \rho_{(\alpha, t)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ となる 0 コチェイン

$$c^0(\alpha, t) = \{\theta_j(\alpha, t) = \eta_j(\alpha, t) \frac{\partial}{\partial u_j} + \zeta_j(\alpha, t) \frac{\partial}{\partial v_j} \in \Gamma(U_{j(\alpha, t)}, \Theta_{(S - \mathcal{D})_{(\alpha, t)}})\}$$

を探してみよう. Mathematica を用いて計算すると、次のような 0 コチェインを見つけることができる.

$$\begin{aligned}\theta_1(\alpha, t) &= \frac{-2u_1^2v_1 + (1-\alpha)u_1 + t}{t} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{2u_1v_1^2 - (1-\alpha)v_1 - 1}{t} \frac{\partial}{\partial v_1} && \text{on } U_{1(\alpha, t)}, \\ \theta_2(\alpha, t) &= \frac{-2u_2^2v_2 - (1-\alpha)u_2 + t}{t} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{2u_2v_2^2 + (1-\alpha)v_2 + 1}{t} \frac{\partial}{\partial v_2} && \text{on } U_{2(\alpha, t)}, \\ \theta_3(\alpha, t) &= \frac{f(u_3, v_3, \alpha, t)}{t F_3(u_3, v_3, \alpha, t)} \frac{\partial}{\partial u_3} + \frac{g(u_3, v_3, \alpha, t)}{t F_3(u_3, v_3, \alpha, t)} \frac{\partial}{\partial v_3} && \text{on } U_{3(\alpha, t)}.\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}f(u_3, v_3, \alpha, t) &= -t^3 - t^2\alpha^3 - 3u_3^3v_3^6 + 8tu_3^2v_3^5\alpha + v_3^4(-7tu_3^2 - 7t^2\alpha^2u_3) \\ &\quad + v_3^3(12t^2\alpha u_3 + 2t^3\alpha^3) + u_3(2t\alpha + t) \\ &\quad + v_3^2(-5t^2u_3 - 5t^3\alpha^2 + u_3^2(1-\alpha)) \\ &\quad + v_3(-2u_3^2 + 4t^3\alpha + u_3(2t\alpha^2 - t\alpha)), \\ g(u_3, v_3, \alpha, t) &= t - t^2v_3^3 - u_3^2v_3^7 + 2t^2\alpha v_3^4 + 2t\alpha u_3v_3^6 + (-2tu_3 - t^2\alpha^2)v_3^5.\end{aligned}$$

$(\mathcal{S}_{(\alpha, t)}, \mathcal{D}_{(\alpha, t)})$ が non-fibered type のときは、 $H^0((\mathcal{S} - \mathcal{D})_{(\alpha, t)}, \Theta_{(\mathcal{S} - \mathcal{D})_{(\alpha, t)}}^{alg}) = \{0\}$ なので、上の 0 コチェインは、代数的なカテゴリーでは一意に決まる. また、ここまでの話は、ファイバー毎の議論であることを注意しておく.

以下、 α を fix し、パラメータ空間が 1 次元の変形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} - \mathcal{D} & \supset & \pi^{-1}(\alpha \times \mathcal{B}) = \bar{U}_1 \cup \bar{U}_2 \cup \bar{U}_3 \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ \mathcal{M} \times \mathcal{B} & \supset & \alpha \times \mathcal{B} \end{array}.$$

に制限して考える. ただし、

$$\begin{aligned}\bar{U}_i &= \text{Spec} \mathbb{C}[u_i, v_i, t, t^{-1}] \cong \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^\times, \quad (i = 1, 2) \\ \bar{U}_3 &= \text{Spec} \mathbb{C}[u_3, v_3, \frac{1}{F_3(u_3, v_3, \alpha, t)}, t, t^{-1}] \\ &\cong \mathbb{C}^3 - \{F_3(u_3, v_3, \alpha, t) = 0, t = 0\}.\end{aligned}$$

$\bar{U}_k$ 上のベクトル場 $\partial/\partial t$ を $(\partial/\partial t)_k$ で表すことにすると、座標変換

$$(u_k, v_k, t) \longrightarrow (u_j = f_{jk}(u_k, v_k, t), v_j = g_{jk}(u_k, v_k, t), t)$$

により、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_k = \theta_{jk}(\alpha, t) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j \quad \text{on } \bar{U}_{jk} \quad (11)$$

となる. ここで、 $\theta_{jk}(\alpha, t)$ は小平-Spencer クラスに出てきたベクトル場である.

そこで、先ほど計算した、0 コチェイン $c^0(\alpha, t) = \{\theta_j(\alpha, t) \in \Gamma(U_{j(\alpha, t)}, \Theta_{(\mathcal{S} - \mathcal{D})_{(\alpha, t)}})\}$ を思い出す. これは、各ファイバー上で計算して出てきたものだから、一般には、 t に対し

て正則に依存するかどうかは分からないが、今の場合は正則に依存していることは明らかなので、 $\theta_j(\alpha, t)$ を $\bar{U}_j$ 上の正則ベクトル場と思うことにする。また、0 コチェインは、

$$\theta_{jk}(\alpha, t) = \theta_k(\alpha, t) - \theta_j(\alpha, t) \quad \text{on } U_{jk(\alpha, t)},$$

となるようにとってきたのであったが、これは、 $\bar{U}_{jk}$ 上でも成り立っている。したがって、式 (11) は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_j - \theta_j(\alpha, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_k - \theta_k(\alpha, t) \quad \text{on } \bar{U}_{jk},$$

となる。したがって、各 $\bar{U}_j$ において

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_j - \theta_j(\alpha, t) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_j - \eta_j(\alpha, t) \frac{\partial}{\partial u_j} - \zeta_j(\alpha, t) \frac{\partial}{\partial v_j} \end{aligned}$$

となる、 $\pi^{-1}(\alpha \times \mathcal{B})$ 上の正則ベクトル場 v が定まる。

今考えている例について、このベクトル場 v に対応する連立常微分方程式系を書くと、以下ようになる。

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = -\frac{-2u_1^2v_1 + (1-\alpha)u_1 + t}{t} = \frac{\partial H_1}{\partial v_1} \\ \frac{dv_1}{dt} = -\frac{2u_1v_1^2 - (1-\alpha)v_1 - 1}{t} = -\frac{\partial H_1}{\partial u_1} \end{cases} \quad \text{on } U_{1(\alpha, t)} \simeq \mathbf{C}^2, \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{du_2}{dt} = -\frac{-2u_2^2v_2 - (1-\alpha)u_2 + t}{t} = \frac{\partial H_2}{\partial v_2} \\ \frac{dv_2}{dt} = -\frac{2u_2v_2^2 + (1-\alpha)v_2 + 1}{t} = -\frac{\partial H_2}{\partial u_2} \end{cases} \quad \text{on } U_{2(\alpha, t)} \simeq \mathbf{C}^2, \quad (13)$$

$$\begin{cases} \frac{du_3}{dt} = -\frac{f(u_3, v_3, \alpha, t)}{t F_3(u_3, v_3, \alpha, t)} \\ \frac{dv_3}{dt} = -\frac{g(u_3, v_3, \alpha, t)}{t F_3(u_3, v_3, \alpha, t)} \end{cases} \quad \text{on } U_{3(\alpha, t)} \simeq \mathbf{C}^2 - \{F_3(u_3, v_3, \alpha, t) = 0\}. \quad (14)$$

また、(12) から v_1 を消去し、2 階単独常微分方程式の形に直して $u_1 = x$ とおくと、

$$P_{III}^{\bar{D}_1} : \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{x} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{x} + \frac{2x^2}{t^2} + \frac{a-2}{t}$$

となり、これが P_{III} のパラメータが特別な場合になっていることも確かめられる。

式 (12)、(13) では Hamilton 系の形も書いたが、Hamiltonian H_i はすぐに計算できて、次で与えられる。

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{u_1^2v_1^2 - (1-\alpha)u_1v_1 - u_1 - tv_1}{t}, \\ H_2 &= \frac{u_2^2v_2^2 + (1-\alpha)u_2v_2 + u_2 - tv_2}{t}. \end{aligned}$$

式 (14) は Hamilton 系で書いていないが、これは誤植ではなくて、座標が

$$C^2 - \{F_3(u_3, v_3, \alpha, t) = 0\}$$

で与えられていること、特に「除く因子の定義式 F_3 が t によっている」という事情で、上で与えたアファイン座標系では Hamilton 系で書けないからである。Painlevé 方程式 $P_J (J = II, III, IV, V, VI)$ の初期値空間については、高野氏らによって、うまい座標系が与えられていて ([MMT],[ST]) このようなことはおこらないが、 $\tilde{D}_8$ タイプの場合は C^2 を含まないので (1.2 節) このような事態は避けられない。また、除く因子の定義式が t には依らないような場合もあって、このときはまた違った状況になることが分かる。このあたりの詳しいことについては、§6,[STT] を参照されたい。

参考文献

- [Kaw] Y. Kawamata, On deformations of compactifiable manifolds, Math. Ann., **235**, (1978), 247–265.
- [MMT] T. Matano, A. Matsumiya and K. Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems, II, J. Math. Soc. Japan, **51**, No.4, 1999, 843–866.
- [O] K. Okamoto, Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, Espaces des conditions initiales, Japan. J. Math., **5**, 1979, 1–79.
- [Sakai] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, preprint, Kyoto-Math 99-10.
- [Sa-Tak] M.-H. Saito & T. Takebe, Classification of Okamoto–Painlevé pairs, preprint, Kobe, May, 2000, math.AG/0006028
- [ST] T. Shioda and K. Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I, Funkcial. Ekvac., **40**, 1997, 271–291.
- [STT] M.-H. Saito, T. Takebe & H. Terajima, Deformation of Okamoto–Painlevé pair and Painlevé equations, preprint, Kobe, May, 2000, math.AG/0006026.
- [T1] Hitomi Terajima, Local cohomology of generalized Okamoto–Painlevé pairs and Painlevé equations. preprint, Kobe, May, 2000, math.AG/0006027.
- [T2] Hitomi Terajima, Master’s thesis, Kobe, 2001, in preparation.