

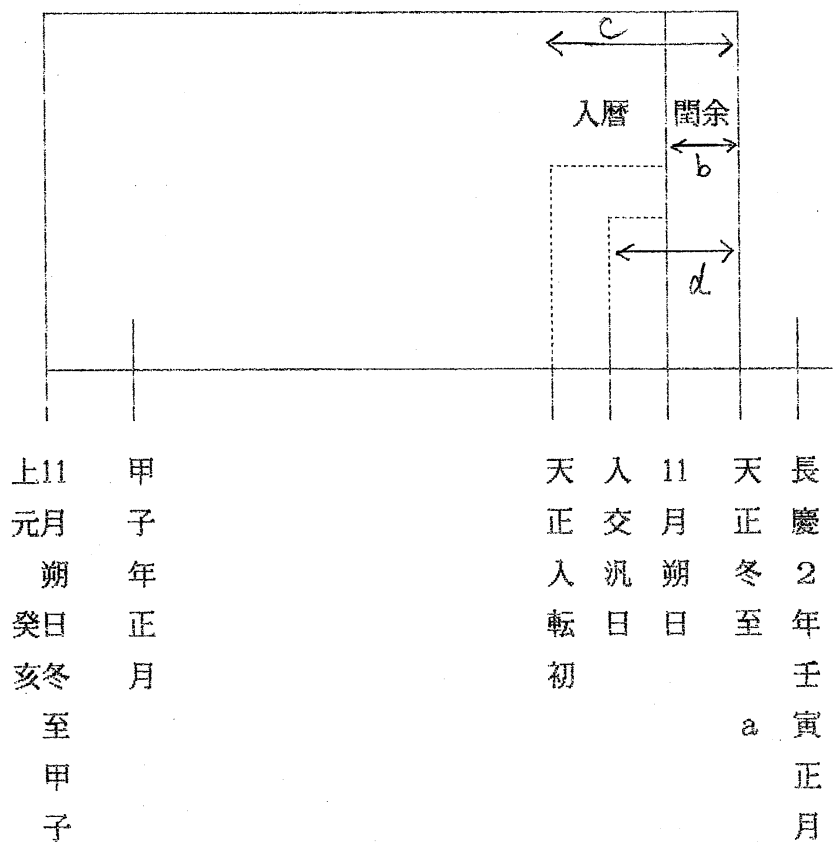
宣明暦の積年と暦元について

藤井康生 (Yasuo Fujii)

§ 1. 積年についての問題点

宣明暦では上元と長慶2年(壬寅822年)の天正冬至(前年の冬至)までの年数を積年といい7070138としている. ここで上元とは, 冬至と11月朔日が午前0時で重なり, その日の干支が甲子である日を暦の出発点としこれを上元とする. 新唐書卷三十上 志第二十上 曆六上 に「上元七曜起赤道虚九度」とある. 七曜は日, 月, 木, 火, 土, 金, 水の太陽, 月, と五惑星のことである. これによると, 冬至と11月朔日が重なるほか, 5惑星が同じところに見えた事になる.

積年 (7070138年)



統法 8400 (1日を8400分とする)

旬周 504000 (60干支, 甲子より一周60日 8400×60)

章歳 3068055 (一年の長さ)

章月 248057 (平均朔望月 $29日4457/8400$)

暦周 231458秒19 (近点月, 相次ぐ近地点通過周期,

ここで秒19は $19/100$ のこと)

終率 228582秒6512 (交点月, 月が黄道を通過する周期,

ここで秒6512は $6512/10000$ のこと)

長慶2年の前年の冬至(天正冬至)の日時を a , 閏余を b とする. a , b は観測によって求められる値であるが本文中には載せられていない. 積年を7070138として計算する.

$$a = 7070138 \times 3068055 \bmod 504000 = 409590$$

$$b = 7070138 \times 3068055 \bmod 248057 = 160264$$

この事より積年を n とすると

$$n \times 3068055 \bmod 504000 = 409590 \quad \text{.....①}$$

$$n \times 3068055 \bmod 248057 = 160264 \quad \text{.....②}$$

$$n \bmod 60 = 38$$

を満たす n を求めることになる. この問題は剪管術の問題である. 計算方法は次節で述べる建部賢弘著『研幾算法』の問題と同様にできる.

①より $3068055, 504000$ の最大公約数 45 で割り, $68179n_1 - 11200t = 9102$ とする.

$68179n_1 - 11200t = 1$ $n_1 = m_1 \times 248057$ となる m_1 を求める.

$m_1 = 2867$ より $n_1 = 711179419$ となる.

②より $3068055n_2 - 248057s = 1$ $n_2 = m_2 \times 11200$ となる m_2 を求める.

$m_2 = 102429$ より $n_2 = 114720488$ となる.

次に $9102n_1 + 160264n_2 = 6473155071738 + 183855630067200 = 190328785138938$

とし $11200 \times 248057 = 2778238400$ で割り余りを求める

$$190328785138938 \div 2778238400 = 68507 \quad \text{.....} \quad 7070138$$

$n = 7070138$ が積年である.

しかし, 当時の観測精度から a , b の値が正確に観測結果から求められたかについては不明である. a , b の値を少し変えると, 例えば小余の部分(宣明暦では1日を8400分とし日数を大余, 1日以下を小余とする, $a = 409590$ は大余48, 小余6390となる)を変

えると異なる n の値が求められる．そのように考えていくと，積年を， a ， b の値のみから求めていなかったように思える．建部賢弘は『綴術算經 探算脱術 第七』の中で，天正冬至，天正閏余，入曆進退，入交汎日より積年を求めると述べている．

算脱ノ法ハ兄賢明カ探會スル所ナリ賢明カ生知孝和ニ亞リ其稟受ノ氣情最怯弱ニシテ常ニ病日多カリシ曾五斜ノ括術ヲ為ント欲シテ甚繁雜セリタトヒ萬位ニ及フトモ日ニ百位ヲ造ハ徐百日ニシテ畢テント言テ果テ月餘ニシテ悉成シ得タリ賢明没シテ後吾彼成得タルヲ意テ始テ實ニ肯スルコトヲ得タリ旬日ナラスシテ黃赤道立成元數ヲ求得テ 中根上右衛門ニ授ク時ニ五十七歳ナリキ亦吾少カリシ時所問有テ宣明曆天正氣朔轉交四件ノ分數ヲ以テ積年ヲ求ル段數ヲ為畢テ以為多位ニシテ最難為者ト今既ニ齡傾キ精氣徐一半ヲ損スルニ逮卻テ許多ノ數ヲ求メカヲ用ルコト壯ナリシ時ニ倍セリ而ルニ 難シト不為ハ是算ノ實ニ我心ニ從ユヘナリ凡求數ニモアレ施術ニモアレ探法ニモアレ總テ一些モ難シト意コト有ハ心ニ不從處有テ眞實ノ不至ニ依レリ其心ニ從フト不從トノ意ノ實ヲ識者ハ賢明乎夫思慮ノ慧利ナルニ依ルコト無ク亦氣情ノ壯盛ナルヲ用ルコト無ク泰ニ居テ常ニ為テ不止者ハ即柔ヲ以テ剛堅ヲ碎キ寡ヲ以テ衆多ヲ量ルノ力ナリ

「吾少カリシ時所問有テ」と述べているのは建部賢弘著研幾算法第49問の事である．

入曆+閏余を c ，入交汎日+閏余を d とする． c ， d についても本文中には載せられていない，始めに積年を7070138として c ， d を求める．

$$c = 7070138 \times 3068055 \times 100 \mod 23145819 = 18873801$$

$$d = 7070138 \times 3068055 \times 10000 \mod 2285826512 = 593769872$$

$$n \times 3068055 \times 100 \mod 23145819 = 18873801 \quad \text{.....㊸}$$

$$n \times 3068055 \times 10000 \mod 2285826512 = 593769872 \quad \text{.....㊹}$$

a ， b ， c ， d より積年を求める問題を建部賢弘は『研幾算法』第49問で述べている．次節ではそれを解説する．

§2. 建部賢弘著『研幾算法』第49問について

四十九 今有宣明曆見行草不知積年只云天正冬至大餘小餘若干經朔大餘小餘若干入曆進退大餘小餘秒若干入交汎日小餘秒若干問積年幾何 本書云没日土用減日入定氣同朧朧進退朧朧合朔此七辭多故併削之

○答曰 得積年

術曰置冬至大小餘通分内子 乃置大餘以統法乘之加入小餘數也後倣之 如四十五分而一得數以一京一千六百一十二萬零三百四十八兆零三百三十九萬一千四百四十一億零四百一十九萬七千零一十九乘之得數○置冬至大小餘内減經朔大小餘 不足減者大餘加紀法小餘解統法而後減之 餘通分内子為閏餘分以二京八千四百六十九萬七千六百七十五兆八千三百五十四萬五千五百四十九億四千三百四十五萬四千四百乘之得數○置入曆進退大小餘秒大餘内減一算餘 若退者加曆中 通分内子加入閏餘分 若加之滿曆周者去之 如三秒 百秒為分 而一得數以一京六千二百八十三萬一千三百七十八兆九千零二十六萬三千二百四十八億六千零一十萬零七千二百乘之得數○置入交汎日小餘秒通分内子加入閏餘分 若加之滿終率者去之 如十六秒 千秒為分 而一得數以一京九千二百九十八萬五千一百一十二兆五千二百三十二萬零三百零二億四千二百六十四萬八千乘之得數○右四位相併共得數滿三京零六百二十二萬七千四百三十兆零六千五百二十一萬八千七百七十五億五千二百八十六萬二千四百去之餘得積年合閏

研幾算法第49問は宣明曆の積年を、天正冬至、經朔、入曆進退、入交汎日より求める問題で、いわゆる剪管術の問題である。積年を n 、天正冬至を a 、閏余〔天正冬至－經朔〕を b 、入曆進退〔宣明曆に記載されているものは+1されているので術文には内一減となっている〕+閏余を c 、入交汎日+閏余を d とする。

$$3068055n \equiv a \pmod{504000} \text{ (旬周)} \quad \text{.....①}$$

$$3068055n \equiv b \pmod{248057} \text{ (章月)} \quad \text{.....②}$$

$$3068055 \times 100n \equiv c \pmod{23145819} \text{ (曆周)} \quad \text{.....③}$$

$$3068055 \times 10000n \equiv d \pmod{2285826512} \text{ (終率)} \quad \text{.....④}$$

以上4式を満たす n を求める問題である。術文には

$$\begin{aligned} n = & [(a \div 45) \times 1161203480339144104197019 + b \times 2846976758354554943454400 \\ & + (c \div 3) \times 1628313789026324860107200 + (d \div 16) \times 1929851125232030242648000] \\ & \pmod{3062274306521877552862400} \end{aligned}$$

と載せられている。

①より 3068055, 504000 の最大公約数 45 で割る $68179=A$, $11200=B$ とする

②より 3068055, 248057 の最大公約数 1 $3068055=C$, $248057=D$ とする

③より 306805500, 23145819 の最大公約数 3 で割る

$$102268500=E, 7715273=F \text{ とする}$$

④より 30680550000, 2285826512 の最大公約数 16 で割る

$$1917534375=G, 142864157=H \text{ とする}$$

①より

 $A \times n_1 - B \times t_1 = 1$ $n_1 = s_1 \times D \times F \times H$ となる s_1 を求める $A \times D \times F \times H \times s_1 - B \times t_1 = 1$ を解く

$$18641321423603133006839783 \div 11200 = 1664403698535994018467 \dots\dots 9383$$

$$11200 \qquad \qquad \div 9383 = 1 \qquad \qquad \dots\dots 1817$$

$$9383 \qquad \qquad \div 1817 = 5 \qquad \qquad \dots\dots 298$$

$$1817 \qquad \qquad \div 298 = 6 \qquad \qquad \dots\dots 29$$

$$298 \qquad \qquad \div 29 = 10 \qquad \qquad \dots\dots 8$$

$$29 \qquad \qquad \div 8 = 3 \qquad \qquad \dots\dots 5$$

$$8 \qquad \qquad \div 5 = 1 \qquad \qquad \dots\dots 3$$

$$5 \qquad \qquad \div 3 = 1 \qquad \qquad \dots\dots 2$$

$$3 \qquad \qquad \div 2 = 1 \qquad \qquad \dots\dots 1$$

$$1664403698535994018467 \times 1 + 1 = 1664403698535994018468$$

$$5 \times 1664403698535994018468 + 1664403698535994018467 = 9986422191215964110807$$

$$6 \times 9986422191215964110807 + 1664403698535994018468 = 61582936845831778683310$$

$$10 \times 61582936845831778683310 + 9986422191215964110807 = 625815790649533750943907$$

$$3 \times 625815790649533750943907 + 61582936845831778683310 = 1939030308794433031515031$$

$$1 \times 1939030308794433031515031 + 625815790649533750943907$$

$$= 2564846099443966782458938$$

$$1 \times 2564846099443966782458938 + 1939030308794433031515031$$

$$= 4503876408238399813973969$$

$$1 \times 4503876408238399813973969 + 2564846099443966782458938$$

$$= 7068722507682366596432907$$

$$7068722507682366596432907 \times 11200 = 79169692086042505880048558400$$

$$(79169692086042505880048558400 + 1) \div 18641321423603133006839783 = 4247$$

これによって $s_1 = 4247$ を得る

②より

 $C \times n_2 - D \times t_2 = 1$ $n_2 = s_2 \times B \times F \times H$ となる s_2 を求める $C \times B \times F \times H \times s_2 - D \times t_2 = 1$ を解く

$$37875270593032968371976000 \div 248057 = 152687771734048901550 \dots\dots\dots 187650$$

248057	$\div 187650 = 1$	 60407
187650	$\div 60407 = 3$	 6429
60407	$\div 6429 = 9$	 2546
6429	$\div 2546 = 2$	 1337
2546	$\div 1337 = 1$	 1209
1337	$\div 1209 = 1$	 128
1209	$\div 128 = 9$	 57
128	$\div 57 = 2$	 14
57	$\div 14 = 4$	 1

$$\begin{aligned}
 &152687771734048901550 \times 1 + 1 = 152687771734048901551 \\
 &3 \times 152687771734048901551 + 152687771734048901550 = 610751086936195606203 \\
 &9 \times 610751086936195606203 + 152687771734048901551 = 5649447554159809357378 \\
 &2 \times 5649447554159809357378 + 610751086936195606203 = 11909646195255814320959 \\
 &1 \times 11909646195255814320959 + 5649447554159809357378 = 17559093749415623678337 \\
 &1 \times 17559093749415623678337 + 11909646195255814320959 = 29468739944671437999296 \\
 &9 \times 29468739944671437999296 + 17559093749415623678337 = 282777753251458565672001 \\
 &2 \times 282777753251458565672001 + 29468739944671437999296 = 595024246447588569343298 \\
 &4 \times 595024246447588569343298 + 282777753251458565672001 \\
 &= 2662874739041812843045193 \\
 &(2662874739041812843045193 \times 248057 - 1) \div 37875270593032968371976000 \\
 &= 17440
 \end{aligned}$$

$$248057 - 17440 = 230617$$

$s_2 = 230617$ を得る

③より

$$\begin{aligned}
 E \times n_s - F \times t_s &= 1 \quad n_s = s_s \times B \times D \times H \quad \text{となる} \quad s_s \text{ を求める} \\
 E \times B \times D \times H \times s_s - F \times t_s &= 1 \quad \text{を解く}
 \end{aligned}$$

40591460589473973832800000	$\div 7715273 = 5261182668386973971$	 2640917
7715273	$\div 2640917 = 2$	 2433439
2640917	$\div 2433439 = 1$	 207478
2433439	$\div 207478 = 11$	 151181
207478	$\div 151181 = 1$	 56297

151181	$\div 56297$	$=2$		38587
56297	$\div 38587$	$=1$		17710
38587	$\div 17710$	$=2$		3167
17710	$\div 3167$	$=5$		1875
3167	$\div 1875$	$=1$		1292
1875	$\div 1292$	$=1$		583
1292	$\div 583$	$=2$		126
583	$\div 126$	$=4$		79
126	$\div 79$	$=1$		47
79	$\div 47$	$=1$		32
47	$\div 32$	$=1$		15
32	$\div 15$	$=2$		2
15	$\div 2$	$=7$		1

$$\begin{aligned}
& 5261182668386973971 \times 2 + 1 = 10522365336773947943 \\
& 1 \times 10522365336773947943 + 5261182668386973971 = 15783548005160921914 \\
& 11 \times 15783548005160921914 + 10522365336773947943 = 184141393393544088997 \\
& 1 \times 184141393393544088997 + 15783548005160921914 = 199924941398705010911 \\
& 2 \times 199924941398705010911 + 184141393393544088997 = 583991276190954110819 \\
& 1 \times 583991276190954110819 + 199924941398705010911 = 783916217589659121730 \\
& 2 \times 783916217589659121730 + 583991276190954110819 = 2151823711370272354279 \\
& 5 \times 2151823711370272354279 + 83916217589659121730 = 11543034774441020893125 \\
& 1 \times 11543034774441020893125 + 2151823711370272354279 = 13694858485811293247404 \\
& 1 \times 13694858485811293247404 + 11543034774441020893125 = 25237893260252314140529 \\
& 2 \times 25237893260252314140529 + 13694858485811293247404 = 64170645006315921528462 \\
& 4 \times 64170645006315921528462 + 25237893260252314140529 = 281920473285516000254377 \\
& 1 \times 281920473285516000254377 + 64170645006315921528462 = 346091118291831921782839 \\
& 1 \times 346091118291831921782839 + 281920473285516000254377 = 628011591577347922037216 \\
& 1 \times 628011591577347922037216 + 346091118291831921782839 = 974102709869179843820055 \\
& 2 \times 974102709869179843820055 + 628011591577347922037216 = 2576217011315707609677326 \\
& 7 \times 2576217011315707609677326 + 974102709869179843820055 \\
& \quad = 19007621789079133111561337 \\
& (19007621789079133111561337 \times 7715273 - 1) \div 40591460589473973832800000 \\
& \quad = 3612804
\end{aligned}$$

$$7715273 - 3612804 = 4102469$$

$s_3 = 4102469$ を得る

④より

$G \times n_4 - H \times t_4 = 1$ $n_4 = s_4 \times B \times D \times F$ となる s_4 を求める

$G \times B \times D \times F \times s_4 - H \times t_4 = 1$ を解く

41102095667249741985000000	$\div 142864157$	$= 287700543861745126$		10151218
142864157	$\div 10151218$	$= 14$		747105
10151218	$\div 747105$	$= 13$		438853
747105	$\div 438853$	$= 1$		308252
438853	$\div 308252$	$= 1$		130601
308252	$\div 130601$	$= 2$		47050
130601	$\div 47050$	$= 2$		36501
47050	$\div 36501$	$= 1$		10549
36501	$\div 10549$	$= 3$		4854
10549	$\div 4854$	$= 2$		841
4854	$\div 841$	$= 5$		649
841	$\div 649$	$= 1$		192
649	$\div 192$	$= 3$		73
192	$\div 73$	$= 2$		46
73	$\div 46$	$= 1$		27
46	$\div 27$	$= 1$		19
27	$\div 19$	$= 1$		8
19	$\div 8$	$= 2$		3
8	$\div 3$	$= 2$		2
3	$\div 2$	$= 1$		1

$287700543861745126 \times 14 + 1$	$= 4027807614064431765$
$13 \times 4027807614064431765 + 287700543861745126$	$= 52649199526699358071$
$1 \times 52649199526699358071 + 4027807614064431765$	$= 56677007140763789836$
$1 \times 56677007140763789836 + 52649199526699358071$	$= 109326206667463147907$
$2 \times 109326206667463147907 + 56677007140763789836$	$= 275329420475690085650$
$2 \times 275329420475690085650 + 109326206667463147907$	$= 659985047618843319207$

$$\begin{aligned}
1 \times 659985047618843319207 + 275329420475690085650 &= 935314468094533404857 \\
3 \times 935314468094533404857 + 659985047618843319207 &= 3465928451902443533778 \\
2 \times 3465928451902443533778 + 935314468094533404857 &= 7867171371899420472413 \\
5 \times 7867171371899420472413 + 3465928451902443533778 &= 42801785311399545895843 \\
1 \times 42801785311399545895843 + 7867171371899420472413 &= 50668956683298966368256 \\
3 \times 50668956683298966368256 + 42801785311399545895843 &= 194808655361296445000611 \\
2 \times 194808655361296445000611 + 50668956683298966368256 &= 440286267405891856369478 \\
1 \times 440286267405891856369478 + 194808655361296445000611 &= 635094922767188301370089 \\
1 \times 635094922767188301370089 + 440286267405891856369478 &= 1075381190173080157739567 \\
1 \times 1075381190173080157739567 + 635094922767188301370089 &= 1710476112940268459109656 \\
2 \times 1710476112940268459109656 + 1075381190173080157739567 &= 4496333416053617075958879 \\
2 \times 4496333416053617075958879 + 1710476112940268459109656 &= 10703142945047502611027414 \\
1 \times 10703142945047502611027414 + 4496333416053617075958879 &= 15199476361101119686986293 \\
(15199476361101119686986293 \times 142864157 - 1) \div 41102095667249741985000000 &= 52830892
\end{aligned}$$

$$142864157 - 52830892 = 90033265$$

$s_4 = 90033265$ を得る

術文中の数値は

$$\begin{aligned}
1161203480339144104197019 &= 4247 \times 248057 \times 7715273 \times 142864157 \\
&= s_1 \times D \times F \times H \\
2846976758354554943454400 &= 230617 \times 11200 \times 7715273 \times 142864157 \\
&= s_2 \times B \times F \times H \\
1628313789026324860107200 &= 4102469 \times 11200 \times 248057 \times 142864157 \\
&= s_3 \times B \times D \times H \\
1929851125232030242648000 &= 90033265 \times 11200 \times 248057 \times 7715273 \\
&= s_4 \times B \times D \times F \\
3062274306521877552862400 &= 11200 \times 248057 \times 7715273 \times 142864157 \\
&= B \times D \times F \times H
\end{aligned}$$

より一致する

宣明暦の値 $a=409590$, $b=160264$, $c=18873801$, $d=593769872$, によって
 $n=7070138$ が求められる。

これは全く数学の問題である。本問は、長慶2年の a , b , c , d だけでなく、暦に記載されている a , b , c , d の値から積年を求める計算方法について述べた物であった。ここで a , b , c , d の小余を変えても、異なる n の値は求まらず、 $n=7070138$ が最小値である。

$$|(3068055/8400)n - 60s - 48| < 1 \quad \text{.....①}$$

$$|(3068055/8400)n - (248057/8400)t - 19| < 1 \quad \text{.....②}$$

$$|(3068055/8400)n - (231458.19/8400)u - 22| < 1 \quad \text{.....③}$$

$$|(3068055/8400)n - (228582.6512/8400)v - 7| < 1 \quad \text{.....④}$$

不等式①～④を満たす n の最小値 $n=7070138$ を求めたように思われる。

§3. 5惑星について

5惑星の周率（会合周期）について考えてみる。新唐書暦六上載せられている値は

木星 3350540.83

火星 6551395.26

土星 3175879.79

金星 4904845.85

水星 973390.25

であるから、積年を n とすると

$$3068055 \times 100n \equiv e_1 \pmod{335054083} \quad \text{.....⑤}$$

$$3068055 \times 100n \equiv e_2 \pmod{655139526} \quad \text{.....⑥}$$

$$3068055 \times 100n \equiv e_3 \pmod{317587979} \quad \text{.....⑦}$$

$$3068055 \times 100n \equiv e_4 \pmod{490484585} \quad \text{.....⑧}$$

$$3068055 \times 100n \equiv e_5 \pmod{97339025} \quad \text{.....⑨}$$

を満たすことになる。ここで積年を 7070138 として $e_1 \sim e_5$ を求める。

$$e_1 = 7070138 \times 3068055 \times 100 \pmod{335054083} = 3058767$$

$$e_2 = 7070138 \times 3068055 \times 100 \pmod{655139526} = 80665890$$

$$e_3 = 7070138 \times 3068055 \times 100 \pmod{317587979} = 203967058$$

$$e_4 = 7070138 \times 3068055 \times 100 \pmod{490484585} = 428141955$$

$$e_5 = 7070138 \times 3068055 \times 100 \bmod 97339025 = 75883050$$

逆に、これら $e_1 \sim e_5$ の値に対して ⑤ ~ ⑨ 式を満たす n の最小値は 7070138 となる。

⑤~⑨ を単独で考えると n の最小値は、⑤~⑧ は 7070138, ⑨ は 3176577 となる。横塚先生の御注意によると ⑨ の解は $3176577 + 3893561t$ より、ここで $t=1$ とすれば 7070138 となる。このように、水星では最小値ではないが ⑤~⑨ とともに解は 7070138 となる。

§ 2 で述べた建部の方法で⑤~⑨を解く事を試みる

⑤より 306805500, 335054083 の最大公約数 1 $306805500=A$, $335054083=B$ とする

⑥より 306805500, 655139526 の最大公約数 6 で割る

$$51134250=C, 109189921=D \text{ とする}$$

⑦より 306805500, 317587979 の最大公約数 1 $306805500=A$, $317587979=E$ とする

⑧より 306805500, 490484585 の最大公約数 5 で割る

$$61361100=F, 98096917=G \text{ とする}$$

⑨より 306805500, 97339025 の最大公約数 25 で割る

$$12272220=H, 3893561=I \text{ とする}$$

B, I には最大公約数 7 がある

⑤より

$$A \times m_1 - (B \div 7) \times r_1 = 1 \quad m_1 = k_1 \times D \times E \times G \times (I \div 7) \text{ となる}$$

k_1 を求める

$$A \times D \times E \times G \times (I \div 7) \times k_1 - (B \div 7) \times r_1 = 1 \text{ を解く}$$

$$k_1 = 33217068 \text{ を得る}$$

⑥より

$$C \times m_2 - D \times r_2 = 1 \quad m_2 = k_2 \times B \times E \times G \times I \text{ となる } k_2 \text{ を求める}$$

$$C \times B \times E \times G \times I \times k_2 - D \times r_2 = 1 \text{ を解く}$$

$$k_2 = 46214470 \text{ を得る}$$

⑦より

$$A \times m_3 - E \times r_3 = 1 \quad m_3 = k_3 \times B \times D \times G \times I \text{ となる } k_3 \text{ を求める}$$

$$A \times B \times D \times G \times I \times k_3 - E \times r_3 = 1 \text{ を解く}$$

$$k_3 = 255133634 \text{ を得る}$$

㊤より

$$F \times m_4 - G \times r_4 = 1 \quad m_4 = k_4 \times B \times D \times E \times I \quad \text{となる } k_4 \text{ を求める}$$

$$F \times B \times D \times E \times I \times k_4 - G \times r_4 = 1 \quad \text{を解く}$$

$$k_4 = 37569287 \quad \text{を得る}$$

㊦より

$$H \times m_5 - (I \div 7) \times r_5 = 1 \quad m_5 = k_5 \times (B \div 7) \times D \times E \times G \quad \text{となる}$$

k_5 を求める

$$H \times (B \div 7) \times D \times E \times G \times k_5 - (I \div 7) \times r_5 = 1 \quad \text{を解く}$$

$$k_5 = 393552 \quad \text{を得る}$$

次に水星については単独の時と同様に補正する必要があるが、[㊤~㊦の4式では§2の建部の問題と同様に求められる] 上で求めた k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 によって、

$$\begin{aligned} & [3058767 \times k_1 \times D \times E \times G \times (I \div 7) + 80665890 \times k_2 \times B \times E \times G \times I \\ & + 203967058 \times k_3 \times B \times D \times G \times I + 428141955 \times k_4 \times B \times D \times E \times I \\ & + \{75883050 \times k_5 + 15 \times (I \div 7)\} \times (B \div 7) \times D \times E \times G] \\ & \quad \text{mod } B \times D \times E \times G \times I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = 3058767 \times 62851001826837323616350672830891135692 \\ & + 80665890 \times 1878275478742288898721671308301251721230 \\ & + 203967058 \times 3565065579109434903312721251341107527694 \\ & + 428141955 \times 1699579398602158254088976082201015980879 \\ & + (29863926093600 + 8343345) \times 162824157834268581767509375354307 \\ & \quad \text{mod } 4437760535609468294466998997097236420589 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = 192246570304869719846014098482926386447211764 \\ & + 151512763157922814652503478371584858207049844700 \\ & + 727155937748017697271210207610124256885398704252 \\ & + 727661246395252302125040963781783685039777678445 \\ & + 4862569974313381509072988790366634877925672115 \\ & \quad \text{mod } 4437760535609468294466998997097236420589 \end{aligned}$$

$$= 7070138 \quad \text{となる.}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 3058767 \times k_1 \times D \times E \times G \times (I \div 7) & \pmod{B} = 7070138 \\
 80665890 \times k_2 \times B \times E \times G \times I & \pmod{D} = 7070138 \\
 203967058 \times k_3 \times B \times D \times G \times I & \pmod{E} = 7070138 \\
 428141955 \times k_4 \times B \times D \times E \times I & \pmod{G} = 7070138 \\
 [75883050 \times k_5 \times (B \div 7) \times D \times E \times G \pmod{I}] + 9 \times (I \div 7) & = 7070138
 \end{aligned}$$

となっている。

このことから、最初に述べた新唐書曆六上で述べられている「上元七曜起赤道虚九度」について、日、月、木、火、土、金、水の太陽、月と5惑星の7つは確かに同一の時に重なっていたことになる。ここでも e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 は観測による値であるが、本文中には載せられていない。これらの値の小余を変えても、先程の場合と同様 $n=7070138$ が最小値である。

$$\begin{aligned}
 | (3068055/8400) n - (335054083/8400) p_1 - 3 | & < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}^- \\
 | (3068055/8400) n - (655139526/8400) p_2 - 96 | & < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{6}^- \\
 | (3068055/8400) n - (317587979/8400) p_3 - 242 | & < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}^- \\
 | (3068055/8400) n - (490484585/8400) p_4 - 509 | & < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}^- \\
 | (3068055/8400) n - (97339025/8400) p_5 - 90 | & < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}^-
 \end{aligned}$$

§2の最後に述べたのと同様に不等式 $\textcircled{1}^- \sim \textcircled{4}^-$ および $\textcircled{5}^- \sim \textcircled{9}^-$ を満たす n の最小値 $n=7070138$ を求めたようにも思われる。

当時の観測精度を考えると、曆周8位、終率10位、周率9～10位まで求められているのは数字の桁が多すぎるように思われる。逆に各定数の秒の位等を変えても、 n の値は求まらず、 $n=7070138$ が成立つのは、本文に載せられている値のみである。それらのことを合わせて考えると、各定数は、積年7070138 に合わせて決定された様に思われる。

横塚啓之先生には多くの宣明曆関係の資料をお贈りいただきました。その上、建部賢弘の著述を教えていただいたほか、5惑星についてもご注意をいただきました。大橋由紀夫先生には曲安京氏の上元積年計算に関する論文をお贈りいただきました。この御助言がなければ本稿はできませんでした、横塚、大橋両先生に感謝いたします。

参考

建部賢弘著 『研幾算法』 天和三年

『新唐書』（校点本二十四史） 中華書局

曲安京著 「中国古代曆法中的上元積年計算」

数学史研究文集 第一輯（1990）

「《大明曆》的上元積年計算」

数学史研究文集 第二輯（1991）

「東漢到劉宋時期曆法上元積年計算」

天文学報 第32卷第4期（1991）

「東漢到劉宋時期曆法五星会合周期数源」

天文学報 第33卷第1期（1992）