

ある種の統計量の事後分布の漸近展開について

一橋大学・経済学研究科 早川 毅 (Takesi Hayakawa)
Graduate School of Economics, Hitotsubashi University

1. 序

観測値 X が与えられた時の母数 θ の事後分布の密度関数の漸近展開については多くの文献がある。Johnson (1967a, 1967b, 1970) は母数 θ が 1 次元の場合について考察している。Cox and Reid (1987) は母数 $\theta' = (\theta'_1, \theta'_2)$ が多次元の時、特に θ_1 が 1 次元で θ_2 が多次元の場合には parameter orthogonality を満たす母数を選択できることを示している。Ghosh and Mukerjee (1992) は θ_1 と θ_2 が 1 次元で parameter orthogonality を満たすもとで事後密度関数、尤度比規準、Cox-Reid の条件付尤度比規準の分布の漸近展開を与えている。DiCiccio and Stern (1993, 1994) は θ_1, θ_2 が多次元の場合について Ghosh and Mukerjee (1992) の結果を拡張している。また DiCiccio and Stern (1993) は単純仮説のもとでの Rao, Wald 統計量の漸近展開を考察している。本論文は θ_1, θ_2 が多次元である場合に各種検定統計量の分布について考察する。

2. 事後分布の密度関数

2.1 必要な記号

$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$: 連続な密度関数 $f(x; \theta)$ を持つ母集団からの n 個の random sample,

$\pi(\theta)$: 母数 θ の事前密度関数, $L(\theta) = \sum_{\alpha=1}^n \log f(x; \theta)$: 対数尤度関数,

$\hat{\theta}$: θ の最尤推定量, $\hat{Y} = -\frac{1}{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \theta'} \bigg|_{\hat{\theta}}$ (確率 1 で正值定符号とする),

$\hat{Y}_{\dots} = \left(\frac{1}{n} \frac{\partial^3 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} \bigg|_{\hat{\theta}} \right)$, $\hat{Y}_{\dots} = \left(\frac{1}{n} \frac{\partial^4 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k \partial \theta_l} \bigg|_{\hat{\theta}} \right)$,

$\hat{\pi} = \pi(\hat{\theta})$, $\frac{\partial^k \hat{\pi}}{\partial \theta^k} = \left(\frac{\partial^k \pi}{\partial \theta_{i_1} \dots \partial \theta_{i_k}} \bigg|_{\hat{\theta}} \right)$, $k = 1, 2, 3$,

$h = \sqrt{n}(\theta - \hat{\theta})$, i.e., $\theta = \hat{\theta} + h/\sqrt{n}$ とする。

和の記号:

vector : $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)'$, $b, c, \dots$, etc.,

行列: $A = (a_{ij})_{p \times p}$, $B, C, \dots$, etc.,

$$Y_{...} \circ a \circ b \circ c = \sum_{i,j,k} y_{ijk} a_i b_j c_k \cdots \cdots \text{scalar},$$

$$Y_{...} \circ a \circ b = \left(\sum_{j,k} y_{ijk} a_j b_k \right) \cdots \cdots \text{vector},$$

$$Y_{...} \circ a = \left(\sum_k y_{ijk} a_k \right) \cdots \cdots \text{行列},$$

$$Y_{...} \circ A \circ B (Y_{...} \circ C) = \sum y_{ijk} y_{pqr} a_{ij} b_{kp} c_{qr}, \quad Y_{...} * A * B * C * Y_{...} = \sum y_{ijk} y_{pqr} a_{ip} b_{jq} c_{kr},$$

$$Y_{...} (*A)^3 * Y_{...} = \sum y_{ijk} y_{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr}, \quad Y_{...} \circ A \circ B = \sum y_{ijkl} a_{ij} b_{kl}, \quad \text{etc.}$$

2.2 事後分布の密度関数

観測値 X を与えたときの母数 θ の事後密度関数は、

$$\pi(h|X) = \pi(\hat{\theta} + h/\sqrt{n}) \exp\{L(\hat{\theta} + h/\sqrt{n}) - L(\hat{\theta})\}/N(X),$$

$$N(X) = \int \pi(\hat{\theta} + h/\sqrt{n}) \exp\{L(\hat{\theta} + h/\sqrt{n}) - L(\hat{\theta})\} dh$$

となる。各関数を $\hat{\theta}$ の周りで展開することにより、 $\pi(h|X)$ の漸近展開式は次式で与えられる。

$$(1) \quad \pi(h|X) = N_p(0, \hat{Y}^{-1}) \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} G_1 + \frac{1}{n} G_2 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\},$$

$$G_1 = \frac{1}{6} \hat{Y}_{...} (\circ h)^3 + \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta'} h,$$

$$\begin{aligned} G_2 = & \frac{1}{24} \hat{Y}_{...} (\circ h)^4 + \frac{1}{72} \{\hat{Y}_{...} (\circ h)^3\}^2 \\ & + \frac{1}{6} \hat{Y}_{...} (\circ h)^3 \cdot \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta'} h + \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\pi}} h' \frac{\partial^2 \hat{\pi}}{\partial \theta \partial \theta'} h - \frac{1}{8} \hat{Y}_{...} (\circ \hat{Y})^2 \\ & - \frac{1}{24} \{3 \hat{Y}_{...} \circ \hat{Y}^{-1} \circ \hat{Y}^{-1} (\hat{Y}_{...} \circ \hat{Y}) + 2 \hat{Y}_{...} (*\hat{Y}^{-1})^3 * \hat{Y}_{...}\} \\ & - \frac{1}{2} \hat{Y}_{...} \circ \hat{Y}^{-1} \circ \hat{Y}^{-1} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\pi}} \text{tr} \frac{\partial^2 \hat{\pi}}{\partial \theta \partial \theta'} \hat{Y}^{-1}. \end{aligned}$$

また、 $\theta' = (\theta'_1, \theta'_2)$, $\theta'_1 = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p-q})$, $\theta'_2 = (\theta_{p-q+1}, \dots, \theta_p)$ とするとき、 θ_1 , すなわち $h'_1 = (h_1, \dots, h_{p-q})$ の周辺密度関数 $\pi(h_1|X)$ は次式で与えられる。

$$(2) \quad \pi(h_1|X) = N_{p-q}(0, \hat{Y}_{11.2}^{-1}) \left\{ 1 + \frac{P_1}{\sqrt{n}} + \frac{P_2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\}.$$

ここで、 $\hat{Y}_{11,2} = \hat{Y}_{11} - \hat{Y}_{12}\hat{Y}_{22}^{-1}\hat{Y}_{21}$ である。

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{6} \left\{ \hat{Y}_{\dots}(\circ\tilde{h})^3 + 3\hat{Y}_{\cdot 22} \circ \tilde{h} \circ \hat{Y}_{22}^{-1} \right\} + \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta'} \tilde{h}, \\
P_2 &= \frac{1}{24} \left\{ \hat{Y}_{\dots}(\circ\tilde{h})^4 + 6\hat{Y}_{\cdot 22}(\circ\tilde{h})^2 \circ \hat{Y}_{22}^{-1} + 3\hat{Y}_{2222}(\circ\hat{Y}_{22}^{-1})^2 \right\} \\
&\quad + \frac{1}{72} \left\{ (\hat{Y}_{\dots}(\circ\tilde{h})^3)^2 + 9\hat{Y}_{\cdot 2}(\circ\tilde{h})^2 \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2\cdot}(\circ\tilde{h})^2) \right. \\
&\quad \quad + 6\hat{Y}_{\dots}(\circ\tilde{h})^3 \cdot \hat{Y}_{\cdot 22} \circ \tilde{h} \circ \hat{Y}_{22}^{-1} + 18\hat{Y}_{\cdot 22} * \tilde{h} \tilde{h}' (*\hat{Y}_{22}^{-1})^2 * \hat{Y}_{\cdot 22} \\
&\quad \quad + 18\hat{Y}_{\cdot 2}(\circ\tilde{h})^2 \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{222} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}) + 9(\hat{Y}_{\cdot 22} \circ \tilde{h} \circ \hat{Y}_{22}^{-1})^2 \\
&\quad \quad \left. + 9\hat{Y}_{222} \circ \hat{Y}_{22}^{-1} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{222} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}) + 6\hat{Y}_{222}(*\hat{Y}_{22}^{-1})^3 * \hat{Y}_{222} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{6} \left\{ \hat{Y}_{\dots}(\circ\tilde{h})^3 \cdot \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta'} \tilde{h} + 3\hat{Y}_{\cdot 22} \circ \tilde{h} \circ \hat{Y}_{22}^{-1} \cdot \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta'} \tilde{h} \right. \\
&\quad \quad \left. + 3\hat{Y}_{\cdot 2}(\circ\tilde{h})^2 \circ \hat{Y}_{22}^{-1} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} + 3\hat{Y}_{222} \circ \hat{Y}_{22}^{-1} \circ \hat{Y}_{22}^{-1} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\hat{\pi}} \text{tr} \frac{\partial^2 \hat{\pi}}{\partial \theta \partial \theta'} \tilde{h} \tilde{h}' + \frac{1}{\hat{\pi}} \text{tr} \frac{\partial^2 \hat{\pi}}{\partial \theta \partial \theta'} \hat{Y}_{22}^{-1} \right\} - \frac{1}{8} \hat{Y}_{\dots}(\circ\hat{Y}^{-1})^2 \\
&\quad - \frac{1}{24} \left\{ 3\hat{Y}_{\dots} \circ \hat{Y}^{-1} \circ \hat{Y}^{-1}(\hat{Y}_{\dots} \circ \hat{Y}^{-1}) + 2\hat{Y}_{\dots}(*\hat{Y}^{-1})^3 * \hat{Y}_{\dots} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\pi}} \hat{Y}_{\dots} \circ \hat{Y}^{-1} \circ \hat{Y}^{-1} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\pi}} \text{tr} \frac{\partial^2 \hat{\pi}}{\partial \theta \partial \theta'} \hat{Y}^{-1}.
\end{aligned}$$

また、

$$\tilde{h} = \begin{bmatrix} I_{p-q} \\ -\hat{Y}_{22}^{-1}\hat{Y}_{21} \end{bmatrix} h_1, \quad \hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} p \\ q \end{matrix}$$

である。

3. 各種統計量の分布

3.1 尤度比規準

尤度比規準の事後分布の漸近展開については多くの文献がある (Bickel and Ghosh (1990), Ghosh and Mukerjee (1992), DiCiccio and Stern (1993, 1994), etc.)。

尤度比規準は、

$$\lambda = 2[L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) - L(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1))]$$

で与えられ、 $\tilde{\theta}_2(\theta_1)$ は θ_1 を固定した時の $L(\theta_1, \theta_2)$ を最大とするものであり次式を満たす。

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2}(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1)) = 0.$$

上式を $\hat{\theta}$ において展開して、

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_2(\theta_1) - \hat{\theta}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{Y}_{22}^{-1} \hat{Y}_{21} h_1 + \frac{1}{2n} \hat{Y}_{22}^{-1} [\hat{Y}_{2..} (\circ \tilde{h})^2] \\ &\quad + \frac{1}{6n\sqrt{n}} \hat{Y}_{22}^{-1} \left\{ \hat{Y}_{2...} (\circ \tilde{h})^3 + 3 \hat{Y}_{2..} \circ \tilde{h} \circ \hat{Y}_{22}^{-1} (\hat{Y}_{2..} (\circ \tilde{h})^2) \right\} \\ &\quad + o_p \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right).\end{aligned}$$

これより尤度比規準 λ は次式として展開される。

$$\begin{aligned}\lambda &= \tilde{h}' \hat{Y} \tilde{h} + \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda_1 + \frac{1}{n} \lambda_2 + o_p \left(\frac{1}{n} \right), \\ \lambda_1 &= -\frac{1}{3} \hat{Y}_{...} (\circ \tilde{h})^3, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{4} \hat{Y}_{2..} (\circ \tilde{h})^2 \circ \hat{Y}_{22}^{-1} (\hat{Y}_{2..} (\circ \tilde{h})^2) - \frac{1}{12} \hat{Y}_{...} (\circ \tilde{h})^4.\end{aligned}$$

よって λ の積率母関数は次式となる。

$$\begin{aligned}(3) \quad M_\lambda(t) &= E[\exp(t\lambda)] \\ &= (1-2t)^{-(p-q)/2} \left\{ 1 + \frac{A}{n} \left(\frac{1}{(1-2t)} - 1 \right) + o \left(\frac{1}{n} \right) \right\},\end{aligned}$$

$$A = A(\hat{Y}^{-1}) - A(\hat{Z}),$$

$$\begin{aligned}A(\hat{Y}^{-1}) &= \frac{1}{24} \left\{ 3 \hat{Y}_{...} \circ \hat{Y}^{-1} \circ \hat{Y}^{-1} (\hat{Y}_{...} \circ \hat{Y}^{-1}) + 2 \hat{Y}_{...} (*\hat{Y}^{-1})^3 * \hat{Y}_{...} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{8} \hat{Y}_{...} (\circ \hat{Y}^{-1})^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\pi}} \hat{Y}_{...} \circ \hat{Y}^{-1} \circ \hat{Y}^{-1} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\pi}} tr \frac{\partial^2 \hat{\pi}}{\partial \theta \partial \theta'} \hat{Y}^{-1},\end{aligned}$$

$$\hat{Z} = \begin{bmatrix} O & O \\ O & \hat{Y}_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

これより尤度比規準の事後分布は Bartlett 補正可能である。

3.2 Rao 統計量

Bayes 対応の Rao 統計量は次式として定義される。

$$R = y(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1))' Y(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1))^{-1} y(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1)).$$

Frequentist 対応の Rao 統計量は、

$$R^* = y(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1))' K(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1))^{-1} y(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1))$$

$$K(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1)) = E \left[\frac{\partial \log f}{\partial \theta} \frac{\partial \log f}{\partial \theta'} \right] \Big|_{(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1))}$$

である。

R の漸近展開は、

$$R = \tilde{h}' \hat{Y} \tilde{h} + R_1/n + o_p\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\begin{aligned} R_1 = & \frac{1}{4} \hat{Y}_{..2}(\circ \tilde{h})^2 \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2..}(\circ \tilde{h})^2) \\ & + \frac{1}{4} \hat{Y}_{...}(\circ \tilde{h})^2 \circ \hat{Y}^{-1}(\hat{Y}_{...}(\circ \tilde{h}))^2 + \frac{1}{6} \hat{Y}_{....}(\circ \tilde{h})^4 \end{aligned}$$

となる。故に R の積率母関数は、

$$\begin{aligned} (4) \quad M_R(t) &= E[\exp(tR)] \\ &= (1-2t)^{-(p-q)/2} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \sum_{\alpha=0}^3 \frac{a_\alpha}{(1-2t)^\alpha} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\}, \\ a_3 &= \frac{1}{24} \left\{ 3\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma}) + 2\hat{Y}_{...}(*\tilde{\Sigma})^3 * \hat{Y}_{...} \right\}, \\ a_2 &= \frac{1}{8} \left\{ \hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}^{-1}(\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma}) + 2\hat{Y}_{..2} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2..} \circ \tilde{\Sigma}) \right. \\ &\quad \left. + 2\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{22} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ \hat{Y}_{...}(*\tilde{\Sigma})^2 * \hat{Y}^{-1} * \hat{Y}_{...} + 2\hat{Y}_{..2}(*\tilde{\Sigma})^2 * \hat{Y}_{22}^{-1} * \hat{Y}_{..2} \right\} \\ &\quad + \frac{3}{8} \hat{Y}_{....}(\circ \tilde{\Sigma})^2 + \frac{1}{2} \hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta}, \\ a_1 &= \frac{1}{8} \left\{ -\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}^{-1}(\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma}) - \hat{Y}_{..2} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2..} \circ \tilde{\Sigma}) \right. \\ &\quad \left. + 2\hat{Y}_{..2} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{222} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}) + \hat{Y}_{22..} \circ \hat{Y}_{22}^{-1} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{22} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ -\hat{Y}_{...}(*\tilde{\Sigma})^2 * \hat{Y}^{-1} * \hat{Y}_{...} - \hat{Y}_{..2}(*\tilde{\Sigma})^2 * \hat{Y}_{22}^{-1} * \hat{Y}_{..2} \right. \\ &\quad \left. + \hat{Y}_{22..} * \tilde{\Sigma}(*\hat{Y}_{22}^{-1})^2 * \hat{Y}_{22} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \hat{Y}_{..2} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}_{22}^{-1} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\pi}} tr \frac{\partial^2 \hat{\pi}}{\partial \theta \partial \theta'} \tilde{\Sigma}, \\ a_0 &= -(a_1 + a_2 + a_3). \end{aligned}$$

ここで

$$\tilde{\Sigma} = \hat{Y}^{-1} - \hat{Z}^{-1}$$

DiCiccio and Stern (1993) は単純仮説問題に対する Rao 統計量として $R = y(\theta)'Y(\hat{\theta})^{-1}y(\theta)$ を用いて議論している。他にも $R = y(\theta)'Y(\theta)^{-1}y(\theta)$, $R = y(\hat{\theta})'Y(\theta)^{-1}y(\hat{\theta})$ 等も Rao 統計量として用いられる。

3.3 Wald 統計量

Bayes 対応の Wald 統計量は、

$$W = n(\hat{\theta}_1 - \theta_1)'Y_{11.2}(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1))(\hat{\theta}_1 - \theta_1)$$

として定義される。Frequentist 対応の Wald 統計量は、

$$W^* = n(\hat{\theta}_1 - \theta_1)'K_{11.2}(\hat{\theta})(\hat{\theta}_1 - \theta_1),$$

$$W^\circ = n(\hat{\theta}_1 - \theta_1)'K_{11.2}(\theta_1, \tilde{\theta}_2(\theta_1))(\hat{\theta}_1 - \theta_1)$$

等である。

W の漸近展開は、

$$\begin{aligned} W &= \tilde{h}'\hat{Y}\tilde{h} + \frac{1}{\sqrt{n}}W_1 + \frac{1}{n}W_2 + o_p\left(\frac{1}{n}\right), \\ W_1 &= -\hat{Y}_{...}(\circ\tilde{h})^3, \\ W_2 &= -\frac{3}{2}\hat{Y}_{..2}(\circ\tilde{h})^2 \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2..}(\circ\tilde{h})^2) - \frac{1}{2}\hat{Y}_{...}(\circ\tilde{h})^4 \end{aligned}$$

となる。 W の積率母関数は、

$$\begin{aligned} (5) \quad M_W(t) &= E[\exp(tW)] \\ &= (1 - 2t)^{-(p-q)/2} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \sum_{\alpha=0}^3 \frac{b_\alpha}{(1 - 2t)^\alpha} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{6} \{ 3\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma}) + 2\hat{Y}_{...}(*\tilde{\Sigma})^3 * \hat{Y}_{...} \}, \\ b_2 &= -\frac{1}{2} \{ 3\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma}) + 2\hat{Y}_{...}(*\tilde{\Sigma})^3 * \hat{Y}_{...} \} \\ &\quad - \frac{5}{8} \{ \hat{Y}_{..2} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2..} \circ \tilde{\Sigma}) + 2\hat{Y}_{..2}(*\tilde{\Sigma})^2 * \hat{Y}_{22}^{-1} * \hat{Y}_{..2} \} \\ &\quad - \frac{1}{2}\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{22} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}) - \frac{5}{8}\hat{Y}_{...}(\circ\tilde{\Sigma})^2 \\ &\quad - \hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta}, \\ b_1 &= \frac{1}{8} \{ 9\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma}) + 6\hat{Y}_{...}(*\tilde{\Sigma})^3 * \hat{Y}_{...} \} \\ &\quad + \frac{3}{4} \{ \hat{Y}_{..2} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{2..} \circ \tilde{\Sigma}) + 2\hat{Y}_{..2}(*\tilde{\Sigma})^2 * \hat{Y}_{22}^{-1} * \hat{Y}_{..2} \} \\ &\quad + \frac{3}{4}\hat{Y}_{...} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma}(\hat{Y}_{22} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}) + \frac{1}{4}\hat{Y}_{..2} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}(\hat{Y}_{222} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} \hat{Y}_{22} \circ \hat{Y}_{22}^{-1} \circ \tilde{\Sigma} (\hat{Y}_{22} \circ \hat{Y}_{22}^{-1}) + \frac{1}{4} \hat{Y}_{22} * \tilde{\Sigma} (*\hat{Y}_{22}^{-1})^2 * \hat{Y}_{22} \\
& + \frac{1}{4} \hat{Y}_{\dots} (\circ \tilde{\Sigma})^2 + \frac{3}{2} \hat{Y}_{\dots} \circ \tilde{\Sigma} \circ \tilde{\Sigma} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{2} \hat{Y}_{22} \circ \hat{Y}_{22}^{-1} \circ \tilde{\Sigma} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \hat{Y}_{\dots} \circ \tilde{\Sigma} \circ \hat{Y}_{22}^{-1} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\pi}} \text{tr} \frac{\partial^2 \hat{\pi}}{\partial \theta \partial \theta'} \tilde{\Sigma}, \\
b_0 &= -(b_1 + b_2 + b_3).
\end{aligned}$$

DiCiccio and Stern (1993) は単純仮説問題に対する Wald 統計量 $W = n(\hat{\theta} - \theta)' Y(\hat{\theta})(\hat{\theta} - \theta) = h' \hat{Y} h$ を取り扱っている。

複合仮説問題において、

$$W^* = n(\hat{\theta}_1 - \theta_1)' Y_{11.2}(\hat{\theta})(\hat{\theta}_1 - \theta_1)$$

とする（これが original な Bayes 対応の Wald 統計量である）とすれば、

$$W^* = \tilde{h} \hat{Y} \tilde{h}$$

である。

3.4 平方根尤度比規準

母数が 1 次元であるとき平方根尤度比規準は、

$$\sqrt{\lambda} = \text{sqn}(\hat{\theta} - \theta) [2\{L(\hat{\theta}) - L(\theta)\}]^{1/2}$$

として定義される。

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda} &= -\sqrt{\hat{y}_{(2)}} h + \frac{1}{6\sqrt{n}} \frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^{1/2}} h^2 \\
&+ \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{24} \frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^{1/2}} h^3 + \frac{1}{72} \frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^{3/2}} h^3 \right\} + o_p\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

ここで、

$$\hat{y}_{(2)} = -\frac{1}{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \Big|_{\hat{\theta}}, \quad \hat{y}_{(3)} = \frac{1}{n} \frac{\partial^3 L}{\partial \theta^3} \Big|_{\hat{\theta}}, \quad \hat{y}_{(4)} = \frac{1}{n} \frac{\partial^4 L}{\partial \theta^4} \Big|_{\hat{\theta}}$$

である。よって、 $\sqrt{\lambda}$ の密度関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
(6) \quad f_{\sqrt{\lambda}}(x) &= \phi(x) \left[1 + \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{n}} + \frac{\bar{a}_2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right], \\
\bar{a}_1 &= -H_1(x) \left\{ \frac{1}{3} \frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^{3/2}} + \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} \frac{1}{\hat{y}_{(2)}} \right\}, \\
\bar{a}_2 &= H_2(x) \left\{ \frac{5}{24} \frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^3} + \frac{1}{8} \frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^2} + \frac{1}{2} \frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^2} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{y}_{(2)}} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} \right\}.
\end{aligned}$$

ここで $\phi(x)$ は $N(0, 1)$ の密度関数であり、 $H_k(x)$ は k 次の Hermite 多項式である。特に $x = 0$ における近似誤差の order は $O(n^{-1})$ である。

3.5 平方根 Rao 統計量

平方根 Rao 統計量を

$$\sqrt{R} = y(\theta) / \sqrt{y_{(2)}(\theta)}$$

として定義すると、漸近展開式は、

$$\sqrt{R} = -\sqrt{\hat{y}_{(2)}} h - \frac{h^3}{n} \left\{ \frac{1}{8} \frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^{3/2}} + \frac{1}{12} \frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^{1/2}} \right\} + o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

となる。 $\sqrt{R}$ の密度関数は、

$$(7) \quad f_{\sqrt{R}}(x) = \phi(x) \left[1 + \frac{\bar{b}_1}{\sqrt{n}} + \frac{\bar{b}_2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

$$\bar{b}_1 = - \left\{ \frac{1}{6} \frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^{3/2}} H_3(x) + \left(\frac{1}{2} \frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^{3/2}} + \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} \frac{1}{\hat{y}_{(2)}} \right) H_1(x) \right\},$$

$$\bar{b}_2 = \frac{1}{72} \frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^3} H_6(x) + \left\{ \frac{1}{3} \frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^3} + \frac{1}{8} \frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^2} + \frac{1}{6} \frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^2} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} \right\} H_4(x)$$

$$+ \left\{ \frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^3} + \frac{1}{2} \frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^2} + \frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^2} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{y}_{(2)}} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} \right\} H_2(x)$$

となる。

3.6 平方根 Wald 統計量

平方根 Wald 統計量は、

$$\sqrt{W} = \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \sqrt{y_{(2)}(\theta)}$$

として定義され、次のような漸近展開、漸近分布を持つ。

$$\sqrt{W} = -\sqrt{\hat{y}_{(2)}} h + \frac{1}{2\sqrt{n}} \left\{ \frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^{1/2}} h^2 \right\}$$

$$+ \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{4} \frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^{1/2}} + \frac{1}{8} \frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^{3/2}} \right\} h^3 + o_p\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$(8) \quad f_{\sqrt{W}} = \phi(x) \left[1 + \frac{\bar{c}_1}{\sqrt{n}} + \frac{\bar{c}_2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

$$\bar{c}_1 = \frac{1}{3} \frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^{3/2}} H_3(x) - \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} \frac{1}{(\hat{y}_{(2)})^{1/2}} H_1(x),$$

$$\bar{c}_2 = \frac{1}{18} \frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^3} H_6(x) + \left\{ -\frac{5}{24} \frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^2} - \frac{1}{3} \frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^2} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} \right\} H_4(x)$$

$$+ \left\{ -\frac{5}{8} \frac{(\hat{y}_{(3)})^2}{(\hat{y}_{(2)})^3} - \frac{1}{2} \frac{\hat{y}_{(4)}}{(\hat{y}_{(2)})^2} - \frac{1}{2} \frac{\hat{y}_{(3)}}{(\hat{y}_{(2)})^2} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\pi}} \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{\hat{y}_{(2)}} \right\} H_2(x).$$

References

- [1] Bickel, P.J. and Ghosh, J.K. (1990). A decomposition for the likelihood ratio statistic and the Bartlett correction – A Bayesian argument, *Ann. Statist.*, **18**, 1070-1090.
- [2] Cox, D.R. and Reid, N. (1987). Parameter orthogonality and approximate conditional inference (with discussion), *J. R. Statist. Soc.*, **B49**, 1-39.
- [3] DiCiccio, T.J. and Stern, S.E. (1993). On Bayesian adjustments for approximate Bayesian inference, *Biometrika*, **80**, 731-740.
- [4] DiCiccio, T.J. and Stern, S.E. (1994). Frequentist and Bayesian Bartlett correction of test statistics based on adjusted profile likelihoods, *J. R. Statist. Soc.*, **B56**, 397-408.
- [5] Ghosh, J.K. and Mukerjee, R. (1992). Bayesian and frequentist Bartlett corrections for likelihood ratio and conditional likelihood ratio tests, *J. R. Statist. Soc.*, **B54**, 867-875.
- [6] Johnson, R.A. (1967a). An asymptotic expansion for posterior distribution, *Ann. Math. Statist.*, **38**, 1899-1906.
- [7] Johnson, R.A. (1967b). Asymptotic expansions associated with the n th power of a density, *Ann. Math. Statist.*, **38**, 1266-1272.
- [8] Johnson, R.A. (1970). Asymptotic expansions associated with posterior distribution, *Ann. Math. Statist.*, **41**, 851-864.