

double cosets の対応と Hecke 環の 指標の対応について

阪大・理 川中宣明 (Noriaki Kawanaka)

1. Hecke 環についての一般論

G を有限群, H と K をその部分群とし

$$\varepsilon_H = |H|^{-1} \sum_{h \in H} h, \quad \varepsilon_K = |K|^{-1} \sum_{k \in K} k \quad (\in \mathbb{C}[G])$$

とおく. $\mathbb{C}[G]$ の部分代数

$$\mathcal{H}(H \backslash G / K) = \varepsilon_H \mathbb{C}[G] \varepsilon_K$$

を Hecke 環と呼ぶことにする. $H=K$ の場合の [1; §11D] の議論を真似て, $\mathcal{H}(H \backslash G / K)$ の表現についての一般論を作ることができる. ($\mathcal{H}(H \backslash G / K)$ は, 一般には, 半単純ではないし, 単位元も持たないことに注意.)

以下, H と K を固定し, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(H \backslash G / K)$ と置く. また $\hat{G} = \{G \text{ の既約指標} \} = \{ \mathbb{C}[G] \text{ の既約指標} \}$, $\hat{\mathcal{H}} = \{ \mathcal{H} \text{ の既約指標} \}$ であり, $\chi \in \hat{G}$ に対し, $m_H(\chi)$, $m_K(\chi)$ は, χ の誘導指標 1_H^G , 1_K^G での重複度である.

(1) $\mathcal{H} : \text{semisimple} \Leftrightarrow \mathcal{H}$ が単位元を持つ.

(2) $\chi \in \hat{G} \Rightarrow \chi|_{\mathcal{H}} \equiv 0$ または $\chi|_{\mathcal{H}} \in \hat{\mathcal{H}}$

(3) $\hat{N}$ の任意の元に対し (2) のような χ が唯一つある.

(4) $x \in G$ に対し

$$\text{ind } x = N\text{-ind } x = \frac{|HxK|}{|H \cap K|},$$

とおく. また, $[x] = [x]_N = N\text{-ind } x \cdot \varepsilon_H x \varepsilon_K$

とおく. $H \backslash G / K$ の完全代表系 $\{x_i\}_{i \in I}$ に対し

$$\{[x_i]\}_{i \in I}$$

は N の $\mathbb{C}$ -basis. (構造定数 $\in \mathbb{Z}$)

(5) $\chi, \chi' \in \hat{G}$ に対し

$$\begin{aligned} & \chi(1) |G|^{-1} |H \cap K| \sum_{i \in I} (\text{ind } x_i)^{-1} \overline{\chi([x_i])} \chi'([x_i]) \\ &= \begin{cases} \chi(\varepsilon_H \varepsilon_K) & (\chi = \chi' \text{ のとき}) \\ 0 & (\chi \neq \chi' \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

(6) N が半単純 $\Rightarrow m_H(\chi) m_K(\chi) = 0$ または

$m_H(\chi) = m_K(\chi)$ が任意の

$\chi \in \hat{G}$ に対し成立.

(7) 任意の $\chi \in \hat{G}$ に対し $m_H(\chi) m_K(\chi) = 0$ または

$m_H(\chi) = m_K(\chi) = 1$ が成り立つとする. このとき

(7a) N は可換

(7b) N は半単純 $\Leftrightarrow m_H(\chi) = m_K(\chi) = 1$ となる

任意の $\chi \in \hat{G}$ に対し,

$$\chi|_N \neq 0$$

$$(7c) \quad \chi(\varepsilon_H \times \varepsilon_K) = \frac{(x v_K^\chi, v_H^\chi)(v_H^\chi, v_K^\chi)}{(v_H^\chi, v_H^\chi)(v_K^\chi, v_K^\chi)}, \quad x \in G,$$

ただし, v_H^χ, v_K^χ は, χ の表現空間における零でない H -固定, K -固定ベクトルで, $(\cdot, \cdot)$ は

G -不変な内積. 特に (7b) と合わせると,

$$\chi: \text{半単純} \iff m_H(\chi)m_K(\chi) = 0 \text{ または } (v_H^\chi, v_K^\chi) \neq 0$$

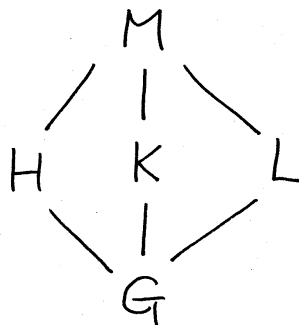
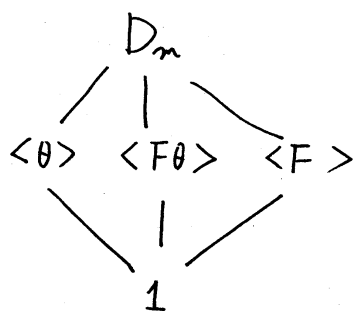
2. double cosets の対応

2.1. 一般的な枠組み

位数 $2m$ の二面体群

$$D_m = \langle F, \theta \mid \theta^2 = (F\theta)^2 = F^m = 1 \rangle$$

が, 群 G に作用しているとする. D_m の部分群, $\langle \theta \rangle$,



$\langle F\theta \rangle, \langle F \rangle$, D_m による G の固定部分群をそれぞれ, H, K, L, M とする. $\theta(L) \subset L$ であること, L における θ の固定部分群は M であること, $H \cap K = M$ であることに注意しておく. 以下で考えたいのは $H \backslash G / K \rightarrow M \backslash L / M$ のタイプの対応である.

2.2. Glauberman [3] および 新谷 [4] の結果の言い換え

G_1 を群とし, $G = G_1 \times G_1$ とおく. α を G_1 の位数 m の自己同型とする. $\theta, F \in \text{Aut}(G)$ を

$$\theta: (x, y) \longrightarrow (y, x)$$

$$F: (x, y) \longrightarrow (\alpha(x), \alpha^{-1}(y)), \quad x, y \in G_1$$

により定義すると, $D_m \cong \langle \theta, F \rangle$ となる. 2.1 のように, H, K, L, M を定義する.

例 2.2.1. $(|G_1|, m) = 1$ とする. $\{l_i | i \in I\} \subset L$ を

$$L = \coprod_{i \in I} M l_i M$$

となるようにすると

$$G = \coprod_{i \in I} H l_i K$$

であり, しかも

$$\frac{|H l_i K|}{|H| |K|} = \frac{|M l_i M|}{|M|^2}, \quad i \in I,$$

が成り立つ. これは, Glauberman の結果の言い換えである.

例 2.2.2. $\mathbb{F}_q$ を元数 q の有限体, $\langle \alpha \rangle = \text{Gal}(\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q)$ とする. α は $G_1 = \text{GL}_m(\mathbb{F}_{q^m})$ の自己同型を引き起こす.

任意の $g \in G$ に対し

$$H g F \theta(g)^{-1} F(g) F^2 \theta(g)^{-1} F^2(g) F^3 \theta(g)^{-1} \cdots H \supset M \wr M$$

となるような m 項 $M \wr L / M$ の元 $M \wr M$ が唯一
存在し, $H g K \longmapsto M \wr M$ は, $H \wr G / K$ から
 $M \wr L / M$ の上への 1 対 1 対応になる. しかも,

$$\frac{|H g K|}{|H| |K|} = \frac{|M \wr M|}{|M|^2} \quad (H g K \longleftrightarrow M \wr M)$$

これは, 新谷の結果の言い換えである.

2.3. 奇位数の群, Brauer-Wielandt の結果 [5] との関連

ここでは, 2.1 よりもう少し一般的な枠組みで考える.

$\langle \sigma \rangle$ を位数 n の巡回群とし, 半直積群

$$A = \langle \sigma \rangle \rtimes D_m = \langle \sigma, F, \theta \mid \sigma^n = F^m = \theta^2 = (F\theta)^2 = (\sigma\theta)^2 = (\sigma F\theta)^2 = 1 \rangle$$

を考える. A が有限群 G に作用しているとする. さらに

$$(|A|, |G|) = 1$$

を仮定する. 特に, $|G|$ は奇数. よって Feit-Thompson の
定理により可解である.

定理 $\sigma, \sigma F$ による G の不動点集合を $G^\sigma, G^{\sigma F}$ と書く.

$$\{x_i \mid i \in I\} \subset G^\sigma \cap G^{\sigma F} \text{ を}$$

$$G^\sigma = \coprod_{i \in I} (G^\sigma)^\theta x_i (G^\sigma)^{F\theta} \quad (\text{disjoint})$$

となるようにとることができる. さらに, このとき

$$G^{\sigma F} = \coprod_{i \in I} (G^{\sigma F})^\theta x_i (G^{\sigma F})^{F\theta}$$

および

$$\frac{|(G^\sigma)^\theta| |(G^\sigma)^{F\theta}|}{|(G^\sigma)^\theta| |(G^\sigma)^{F\theta}|} = \frac{|(G^{\sigma F})^\theta| |(G^{\sigma F})^{F\theta}|}{|(G^{\sigma F})^\theta| |(G^{\sigma F})^{F\theta}|}, \quad \sigma \in I$$

が成り立つ.

系として Brauer-Wielandt の位数公式

$$\frac{|G^\sigma|}{|(G^\sigma)^\theta| |(G^\sigma)^{F\theta}|} = \frac{|G^{\sigma F}|}{|(G^{\sigma F})^\theta| |(G^{\sigma F})^{F\theta}|}$$

が得られる. $m=n=2$, $\sigma = \text{id.}$ の場合 (: Brauer が示した場合) が, 特に有名で, よく用いられる (らしい).

2.4. Flansted-Jensen の結果 [2]

詳細は省くが, 2.3 の定理と形式的に酷似した結果を, Flansted-Jensen が, 複素半単純リー群 G と

$$A = \langle \sigma, F, \theta \mid \sigma^2 = F^2 = \theta^2 = (\sigma F)^2 = (F\theta)^2 = (\sigma\theta)^2 = 1 \rangle$$

に対して示している. 但し $\langle \sigma \rangle = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, $\theta|G^\sigma$ は, Cartan involution である.

2.5. $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_{q^2}) \setminus \text{GL}_{2n}(\mathbb{F}_{q^2}) / \text{U}_{2n}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$

2.1 の記号のもとで, $G = \text{GL}_{2n}(\mathbb{F}_{q^2})$, $\langle F \rangle = \text{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$,

$$\theta(x) = J {}^t x^{-1} J^{-1} \quad (x \in G, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix})$$

とする. よって, $H = \text{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_{q^2})$, $K = \text{U}_{2n}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ (ユニタリ群), $L = \text{GL}_{2n}(\mathbb{F}_q)$, $M = \text{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q)$ である.

定理 任意の $g \in G$ に対し

$$HgFa(g)^{-1}H \supset M \ell M$$

となるような $M \setminus L / M$ の元 $M \ell M$ が、唯一つ存在し、
 $HgK \mapsto M \ell M$ は $H \setminus G / K$ から $M \setminus L / M$ の上
 への 1対1対応になる。しかも

$$\frac{|HgK|}{|H||K|} = \frac{|M \ell M|}{|M|^2} \quad (HgK \longleftrightarrow M \ell M)$$

3. Hecke 環の指標の対応

2.2 の 2つの例の場合、 $\mathcal{N}(H \setminus G / K)$ の既約指標 χ
 の全体と $\mathcal{N}(M \setminus L / M)$ の既約指標 ψ の全体との間に

$$\begin{aligned} |G|^{-1} \chi(1) \chi([g]_{\mathcal{N}(H \setminus G / K)}) \\ = |L|^{-1} \psi(1) \psi([l]_{\mathcal{N}(M \setminus L / M)}), \end{aligned}$$

を満たすような 1対1対応 $\chi \longleftrightarrow \psi$ がある。ただし、
 $\chi(1), \psi(1)$ は、 χ, ψ の G, L の指標としての次数で
 あり、 HgK と $M \ell M$ は 2.2 の意味で対応している
 ものとする。この結果も、新谷と Glauserman の結果の言い
 換えである。全く同様の結果が、2.5 の場合にも成り
 立つことが、示される。2.3 の場合でも、 χ が monomial
 な指標なら同様の等式が成立するような ψ が存在するか、
 一般には修正が必要となる。2.4 の場合は、上記引用した

Flensted-Jensen の論文に, このタイプの結果が証明されている.

文 献

- [1] C.W. Curtis and I. Reiner, Methods of Representation Theory, vol.1, Wiley-Interscience, 1981.
- [2] M. Flensted-Jensen, Spherical functions on a real semisimple Lie group. A method of reduction to complex case. J. Funct. Anal. 30 (1978), 106-146.
- [3] G. Glauberman, Correspondences of characters for relatively prime operator groups, Canad. J. Math. 20 (1968), 1465-1488.
- [4] T. Shintani, Two remarks on irreducible characters of finite general linear groups, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 396-414.
- [5] H. Wielandt, Beziehungen zwischen den Fixpunktzahlen von Automorphismen gruppen einer endlichen Gruppe, Math. Z. 73 (1960), 146-158.