

一階双曲型方程式の混合問題に対する解の局所減衰

京大 数研 岩崎 敦久

Ω を $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 3$) における外部領域 (すなわち, $\Omega = \{x \mid |x| \geq \rho\}$ なる ρ が存在する), 境界は適当に丸めらかとする。この Ω の上で 次の様な混合問題を考える。

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = A u(x, t) \equiv \sum_{i=1}^m A_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x, t) + C(x) u(x, t) \\ u(x, t) \Big|_{x \in \partial \Omega} \in B(x) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Condition I. A : formally dissipative な微分作用素.

(i.e) A_i : Hermitian symmetric

$$C + C^* - \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} A_j(x) \leq 0, \quad x \in \Omega.$$

Condition II. A : uniformly elliptic

$$(i.e) \quad \left| \sum_{j=1}^m A_j \xi_j \right| \geq \delta |\xi|, \quad \delta > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Condition III $B(x)$: maximal non-positive

s.t. $A_m = \sum_{j=1}^m A_j(x) m_j(x)$ が $B(x)$ 上で non-positive となる $\mathbb{C}^n$ の subspace で極大なもの。 ($m_j(x)$: $\partial\Omega$ の外法線)

Condition IV $(A(x), B(x))$: coercive.

s.t. $B \cap E(\xi) = \{0\} \quad \forall \xi; \sum_{j=1}^n \xi_j m_j = 0$

, $E(\xi) : M(\xi) = A_m^{-1} \sum_{j=1}^m A_j \xi_j$ の root vectors で張られる subspace.

Condition V ある ρ があって

$$A = \sum_{j=1}^m A_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{at } |x| \geq \rho$$

; A_j : constant matrices

$$D(A) \equiv \{u; u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} \in B\} \text{ とおく.}$$

I, II, III, IV, V の条件から Coercive estimate

$$\|\frac{\partial}{\partial x_j} u\| \leq \text{const} \{ \|Au\| + \|u\| \}$$

が $u \in D(A)$ に対して成り立つ。又 $(\lambda - A)$ は $D(A)$ から $L^2(\Omega)$ への 1対1 onto な作用素で

$$\|u\| \leq \frac{1}{\lambda} \|(\lambda - A)u\| \quad (\forall \lambda > 0)$$

を満たす。従って A は $D(A)$ の定義域を $D(A)$ とし

$Au = Au$ ($u \in D(A)$) なる $L^2(\Omega)$ 上の作用素とす

ば、 A は contraction semi-group の 生成作用素である。この contraction semi-group を $U(t)$ で表わすと、任意の $f \in D(A)$ に対して、

$$\frac{d}{dt} U(t)f = A U(t)f, \quad U(t)f \in D(A)$$

が成り立ち (Hille-Yosida の定理)、そしてこの方程式は (*) の混合問題をあらわしている。又 $\|U(t)\| = 1$ である。

このことから $\forall f \in L^2(\Omega)$ に対して

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\lambda t} U(t)f dt = a_\lambda$$

は存在するが、

$$\Lambda \text{ を } \lambda \in \Lambda \iff \exists f; a_\lambda \neq 0$$

P : projection on $L^2(\Omega)$ を $Pf \equiv \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ で定義すれば

定理 1 Λ は iA の実軸上にある固有値の全体であるが $\mathbb{R}$ の discrete な集合であり、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t)f - U(t)Pf\|_{L^2_{loc}(\bar{\Omega})} = 0$$

$$U(t)Pf = \sum_{j=1}^{\infty} e^{i\lambda_j t} f_j, \quad \lambda_j \in \Lambda \quad (\text{in } L^2(\Omega))$$

特に A が一意接統の定理の成り立つ様な微分作用素のとき

$$\Lambda = \{0\}$$

さらに Condition VI (strictly dissipative) を (A, B) に仮定するなら

$$\Lambda = \phi$$

が示される。

Condition VI. (A, B) : strictly dissipative

i.e. 次の i) 又は ii) のいずれかが成り立つ。

i) $u \in B$ かつ $\int_{\partial\Omega} u \cdot A_m \bar{u} dS = 0$ なら $\partial\Omega$ の open set ω が存在して ω 上で $u \equiv 0$ 。

ii) ある実数の近傍 $C \subset \mathbb{R}$ で $C + C^* - \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} A_j$ は negative matrix.

この定理 1 を証明するのに、混合問題 (*) を 全空間 ($\Omega = \mathbb{R}^n$) で主要部のみからなる定数係数の System (hyperbolic) で (*) の System と一致しているような

$$(**) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = A_0 u(x, t) \equiv \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} u(x, t)$$

に対する Cauchy 問題の領域の有界な部分での、振動と見る。そのために 定数係数の System に対する解の性質を調べると 次の定理が成り立つ。

定理 2 $|x| \geq \rho$ で $f \equiv 0$ であるとする。
領域 Ω の次元 n が奇数のとき.

$$U_0(x)f = 0 \quad \text{in } |x| < C_{\min}(x-\rho)$$

領域 Ω の次元 n が偶数のとき

$$|U_0(x)f|^2 \leq \rho_n \frac{\|f\|_{\frac{1}{2}}^2}{(C_{\min}(x-\rho) - |x|)^{n-1}}$$

$$\text{in } |x| < C_{\min}(x-\rho)$$

== 是. $U_0(x)$ は 初期値 f に対し $(**)$ の解 $u(\cdot, x)$ を対応させる 作用素 (以上の作用素とみるとき unitary である) の 1-パラメータ-group である. 又, $C_{\min}$ は A_0 によつて定まる正 ($\neq 0$) の定数である。

定理 3. u は $|x| \geq R$ で $\Delta^2 u = 0$

$$(A + i\mu)u = 0 \quad (\mu: \text{零でない実数})$$

をみたすとする. このとき u は $|x| \geq R$ で 恒等的に零である。

$$\text{今 } \chi(x) \in C^\infty \text{ を } |\chi(x)| \leq 1 \text{ で } \chi(x) = \begin{cases} 1 & : |x| \geq \rho+1 \\ 0 & : |x| \leq \rho \end{cases}$$

とする。

$$\begin{aligned}
& U(\tau+s)f - U(\tau+t)f \\
&= U(\tau) \{ (1-\chi(\alpha)) \{ U(s)f - U(t)f \} \\
&\quad + [U(\tau)\chi(\alpha) \{ U(s)f - U(t)f \} - \chi(\alpha)U_0(\tau)\chi(\alpha) \{ U(t)f \\
&\quad \quad - U(t)f \}] \\
&\quad + \chi(\alpha)U_0(\tau)\chi(\alpha) \{ U(s)f - U(t)f \} \}
\end{aligned}$$

なる分解に定理2及び(*)と(**)の解の有限伝播性を使う
と次のLemmaを証明することが出来る。

Lemma 1 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対し.

$\{ M(U(s)f) ; 0 \leq s < \infty \}$ は $B_{[0,\infty)}(L^2_{loc}(\bar{\Omega}))$ の
中で Precompact な集合である。

== 是 $M(g) \equiv U(\cdot)g$ ($[0,\infty)$ 上の $L^2(\Omega)$ -values
= により $L^2_{loc}(\bar{\Omega})$ -values function)

$B_{[0,\infty)}(L^2_{loc}(\bar{\Omega}))$ は $[0,\infty)$ 上の $L^2_{loc}(\bar{\Omega})$ に値をとる
有界な連続函数の作る空間で $[0,\infty)$ での一様位相を入れる。

又 定理3からは

Lemma 2: Λ が $\mathbb{R}$ の discrete な集合である。

又 Λ に対し一意接統の定理が成り立てば $\Lambda = \{0\}$ である。

Lemma 1 と Lemma 2 から定理1が従うか 二の所は

以下のように抽象的な命題に書きかえることが出来る。

H : Hilbert Space, F : Fréchet space

$H \subset F$: injective

さらに H と F とのあいだの関係は,

(1) $\{p_j(f) \equiv [p_j(f, f)]^{\frac{1}{2}}, j=1, 2, \dots\}$ が F の semi-norms

(2) 任意の $f \in H$ に対し,

$$p_j(f) \leq p_{j+1}(f) \leq \|f\|, \sup_j p_j(f) = \|f\|.$$

上の (1), (2) をみたす F 上の bilinear forms $\{p_j(\cdot, \cdot)\}$ が存在するとする。

$B_{[0, \infty)}[F]$ を $[0, \infty)$ 上の F -valued な有界連続な函数全体の作る空間で 各 semi-norm に関する一様位相をきつものとする。

又 $U(t)$ を H 上の Contraction semi-group ϕ の Motion と

$$M(\phi) \equiv U(\cdot)\phi \in B_{[0, \infty)}[F]$$

と定義する。このとき,

定理 4. 次の様な H 上の Projection ($U(t)$ によってきまる) P がある。

• $\{M(\cup(s)f) ; 0 \leq s < \infty\}$ が $B_{[0,\infty)}[F]$ で
precompact な集合であるとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_j(\cup(t)f - \cup(t)Pf) = 0, \quad j=1,2,\dots$$

• $\cup(t)Pf$ は H -valued almost periodic function
である。

参考文献

Iwasaki, N : Local Decay of Solutions for
Symmetric Hyperbolic Systems with dissipative and
Coercive Boundary Conditions in Exterior Domains.

Publ. RIMS Kyoto Univ. 5, 1969.

Lax, P.D. and Phillips, R.S. : Scattering Theory
Academic Press, New York. 1967.