

Stern-Gerlach 実験と増幅過程

原田 僚*

京都大学大学院 理学研究科

概要

量子観測においては、ミクロ量子系の振る舞いが如何にしてマクロ系の情報に増幅され引き出されるかという非自明な問題がある。本稿では、ミクロ・マクロ双対性 [7] の考えに基づいて、この増幅過程のダイナミクスを理解する方法を考察する。また、得られた一般的スキームに対して実際の実験状況 (Stern-Gerlach 実験) への適用を試み、その物理的意味の深化を目指す。本稿の内容は、小嶋泉氏によって提唱されたミクロ・マクロ双対性の枠組に基礎をなすものであり、ここでの成果は小嶋氏との共同研究によるものである。

1 導入：問題の背景

量子論と古典論の本質的違いのひとつは、系を記述する代数構造にあるといえる。量子系は一般に、物理量のなす非可換な代数 (C^* -代数, von Neumann 代数, ...) によって記述される。ところで量子系の観測のためには、これら非可換代数の元 (q -数) の持つ情報を、古典的な可換代数の元 (c -数) の情報として取り出される過程 (増幅過程) を考えることが不可欠である。このような、量子系の情報がマクロに識別可能な観測データへと増幅されるダイナミクスは、ミクロ・マクロ双対性 [7] における基本的な問題意識として捉えられる。

本稿では、増幅過程の一般的スキームを書き下し、また具体例として Stern-Gerlach 実験について一般的スキームを適用する方法を示すとともに、その物理的理解を深めることを目標とする。具体例との比較を通して、理想測定を有効的に実現するための諸条件 (断熱近似条件等) について幾つかの示唆が得られる。

1.1 セクター理論と量子古典境界

ミクロ・マクロ双対性の枠組を見る前に、sector 理論の基本をおさらいしよう。核心となるのは factor 表現の同値類としての sector 概念とそれ

*e-mail: rharada@kurims.kyoto-u.ac.jp

に基づいた「量子古典境界」の理解である。量子系が C^* -代数 $\mathfrak{A}$ によって記述される状況を考えよう。

まず $\mathfrak{A}$ の表現に対して「準同値性」の概念を定める； $\mathfrak{A}$ の任意の 2 つの表現 π_1, π_2 について、 $\exists m, n : \text{cardinals}, m\pi_1 \simeq n\pi_2$ (ここに $n\pi := \underbrace{\pi \oplus \cdots \oplus \pi}_n$) であるとき (つまり、多重度を除いて unitary 同値であるとき)、これらは準同値であるという。この条件は、von Neumann 代数としての同型性 $\pi_1(\mathfrak{A})'' \simeq \pi_2(\mathfrak{A})''$ と等価である。このようにして、 C^* -代数 $\mathfrak{A}$ の表現全体について準同値性による分類を与えることができるが、それらの同値類の中で factor 表現 (中心が自明な表現) を代表元とするクラスを sector と呼ぶ。すると、任意の表現 π (factor 表現と限らない) は、sector に属する表現の直和 (直積分) に分解可能 ($\pi(\mathfrak{A})'' \simeq \bigoplus_m \pi_m$) であり、その centre $\mathfrak{Z}(\pi(\mathfrak{A})'') = \pi(\mathfrak{A})'' \cap \pi(\mathfrak{A})' =: \mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A})$ の spectrum $Sp(\mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A}))$ が個々の sector を指定している。この意味で、sector は C^* -代数 $\mathfrak{A}$ の表現全体の中で基本要素と見られるものである。

この見方に基づいて、「量子古典境界」を数学的に具体化する一方法を述べることができる。つまり、系を記述する C^* -代数 $\mathfrak{A}$ のある表現 π から生成される von Neumann 代数を考えると、その centre の spectrum $Sp(\mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A}))$ が、マクロに現れる (秩序) 変数であり、各 (秩序) 変数に対応する個々の sector (の代表元としての非可換代数) がミクロの量子系を記述すると考えることができる。端的に言えば、[マクロ世界 = inter-sectorial な階層 $\leftrightarrow$ ミクロ世界 = intra-sectorial な階層] という明確な対応関係 (下図) の下に両者の境界が定まるのである¹。

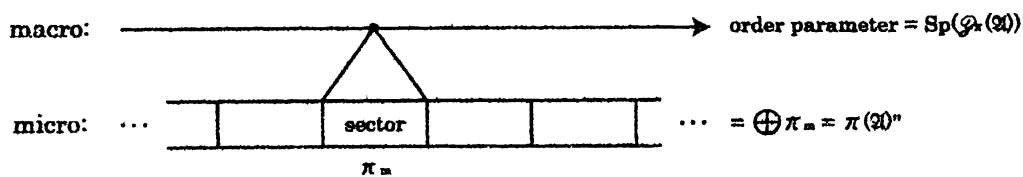


図 1: 量子古典境界の概念図

¹ このロジックは、単に空間的スケールの違いとして古典的世界と量子的世界とを区別することとは本質的に異なっている。そのような意味での量子古典境界は、様々な物理的条件を反映した系の記述の仕方 (代数やその表現の設定) により変動しうるものである。

2 基本的設定

2.1 ミクロ・マクロ双対性の基礎

ミクロ・マクロ双対性の基本的枠組 [7, 9] を展開するために, 量子系を記述する C^* -代数 $\mathfrak{A}$ の表現 π が生成する von Neumann 代数 $\mathcal{M} = \pi(\mathfrak{A})''$ を考える.

まず, von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ の極大可換部分代数 (MASA; 互いに可換な元の極大集合) $\mathcal{A}$ および, MASA $\mathcal{A}$ に属する unitary な元のなす群 $\mathcal{U}$ を考える. $\mathcal{M}$ に付随するこれらのオブジェクト $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, \mathcal{U})$ を, ミクロ系を記述する基本 3 つ組と呼ぶことにする. ここで, $\mathcal{U}$ は元の代数 $\mathcal{M}$ にある仕方で作用し $(\mathcal{U} \curvearrowright_{\alpha} \mathcal{M})$ W^* -力学系 $(\mathcal{M}, \mathcal{U}, \alpha)$ をなすが, $\mathcal{A}$ はこの作用に関して不変部分代数になっている. 次に, MASA $\mathcal{A}$ に対してその環指標 $Sp(\mathcal{A})$, unitary 群 $\mathcal{U}$ に対してその群指標 $\hat{\mathcal{U}}$ をそれぞれ考える. MASA $\mathcal{A}$ と unitary 群 $\mathcal{U}$ については定義から $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ であるが, これらの「双対」オブジェクトである $Sp(\mathcal{A})$ と $\hat{\mathcal{U}}$ については, 環指標 $\chi \in Sp(\mathcal{A})$ の $\mathcal{U}$ 上への制限 $(\chi \mapsto \chi|_{\mathcal{U}})$ から自然な埋め込み $Sp(\mathcal{A}) \subset \hat{\mathcal{U}}$ が誘導される. これら $(Sp(\mathcal{A}), \hat{\mathcal{U}})$ を, マクロ系の基本量 2 つ組と呼ぶことにする. なお, $\hat{\mathcal{U}}$ は $\mathcal{U}$ の作用 α の双対作用により, 元の代数 $\mathcal{M}$ に作用し $(\hat{\mathcal{U}} \curvearrowright_{\hat{\alpha}} \mathcal{M} \rtimes_{\alpha} \mathcal{U})$ W^* -力学系 $(\mathcal{M}, \hat{\mathcal{U}}, \hat{\alpha})$ をなす.

ミクロ・マクロ双対性の本質は, ここで見たミクロ系の基本 3 つ組とマクロ系の基本量 2 つ組との圏論的随伴 (adjoint) 関係であると要言できる. この枠組は, 量子系の代数 $\mathcal{M}$ からマクロに識別される観測値 $Sp(\mathcal{A})$ を取り出す観測過程 (つまり増幅過程) と, 観測データから元の量子系の代数を再構成する逆問題の両方を展開するための基礎を与えるものになっている. この随伴関係には, 竹崎の双対定理に上記のような再解釈を与えるという物理的意義がある (具体的な表式は [9]).

2.2 Kac-Takesaki 作用素と測定相互作用

前節での議論をよりオペレーショナルな観点から理解するため, 調和解析で重要な役割を演じる Kac-Takesaki 作用素 (K-T 作用素) を導入する. K-T 作用素 W は $L^2(\mathcal{U} \times \mathcal{U}, d\mu \otimes d\mu)$ ($\mathcal{U}$ は不変測度 $d\mu$ を持つとした) 上に $(W\eta)(u, v) := \eta(v^{-1}u, v)$ という等長作用を引き起こすものとして同定される. この作用素は, 一意性, intertwining 関係, 5 項関係などの重要な性質を満たすことが知られている [5]. さらに, $\mathcal{U}$ の action α が $\mathcal{U}$ のある unitary 表現 U を用いて $\alpha = Ad(U)$ i.e., $\alpha_u(M) = U_u M U_u^{-1}$ ($M \in \mathcal{M}, u \in \mathcal{U}$) と書ける場合, W の unitary 表示 $U(W)$ が $(U(W)\xi)(u) := U_u(\xi(u))$ for $\xi \in L^2(\mathcal{M}) \otimes L^2(\mathcal{U}, d\mu)$ と誘導される. この表示は K-T 作用素の役割をより

明確にする：やや簡便な表式で具体的に書き下すと

$$U(W) = \int_{g \in \mathcal{U}(\mathcal{A})} U_g \otimes |g\rangle dg \langle g|$$

となるが、これを見ると $L^2(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ の第2の引数に対しては恒等的に作用し、同時に第1の引数に対しては各第2の引数の群作用を与えていることがわかる。

次に、K-T作用素 W の Fourier 変換を、 $L^2(\mathcal{U})$ 上の Fourier 変換 $\mathcal{F}$ を用いて $V = (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F})W^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F})^{-1}$ と書き下すことができる。これは W に類似の作用 $(V\eta)(\gamma, \chi) = \eta(\gamma, \gamma^{-1}\chi)$ ($\eta \in L^2(\hat{\mathcal{U}} \times \hat{\mathcal{U}}, d\hat{\mu} \otimes d\hat{\mu})$) を引き起こし ($d\hat{\mu}$ は $d\mu$ に対する Plancherel 測度)、やはり W 同様に5項関係、intertwining 関係などの性質を満たす [5]。 V の intertwining 関係は増幅過程の記述において特に重要なので具体的に書き示しておこう：

$$V(\lambda_\gamma \otimes 1) = (\lambda_\gamma \otimes \lambda_\gamma)V$$

ここに λ_γ は $\hat{\mathcal{U}}$ の正則表現である。さらに $U(W)$ の Fourier 変換 $\widetilde{U(W)} := (id \otimes \mathcal{F})U(W)(id \otimes \mathcal{F})^{-1} [=:\tilde{U}(V)^*]$ を考えることで、 V に対しての unitary 表示 $\tilde{U}(V)$ を求めることができる：

$$\tilde{U}(V) = \int_{\chi \in Sp(\mathcal{A})} dE(\chi) \otimes \lambda_\chi \quad (1)$$

ここに $dE(\chi)$ は spectral 測度。より簡便に、Dirac の記法を用いて $L^2(\mathcal{M}) \otimes L^2(\hat{\mathcal{U}})$ 上への作用を明示すると

$$\tilde{U}(V)(\xi \otimes |\gamma\rangle) = \int_{\chi \in Sp(\mathcal{A})} dE(\chi) \xi \otimes |\chi\gamma\rangle \quad (2)$$

ここに $\gamma \in \hat{\mathcal{U}}, \xi \in L^2(\mathcal{M})$ である。こうして、 V の unitary 作用が W のそれと類似して、第1の引数を固定しながら第2の引数へ spectrum の成分ごとに (重み付けして) 作用させるものであることがわかった。 $L^2(\mathcal{M}) \otimes L^2(\hat{\mathcal{U}})$ 上の作用として示したことにより、これは元の量子系 $\mathcal{M}$ の状態 ξ の情報を $\gamma \in \hat{\mathcal{U}}$ に写すものであると解釈できる。 $|\gamma\rangle$ として測定器 (より正確には probe 系) の状態を用意してやれば、これは後述の観測スキームの本質に他ならないことがわかる。

なお、引数の役割が W の場合と逆順になっていることから示唆されるように、K-T作用素 W とその Fourier 変換 V はミクロ・マクロ双対性における随伴構造を如実に反映した関係性を持っている (ミクロ系の代数 $\mathcal{M}$ とマクロな観測量 $Sp(\mathcal{A})$ との随伴関係が、 W と V によって指定される：下図)。こうして、《ミクロ量子系の情報をマクロに識別可能な観測

データとして取り出す増幅過程の問題》と《観測データからマイクロ量子系の代数を再構成する逆問題》という2つの基本的な問題を、その相互関係を明らかにしながら展開する枠組を与えることができるのである。

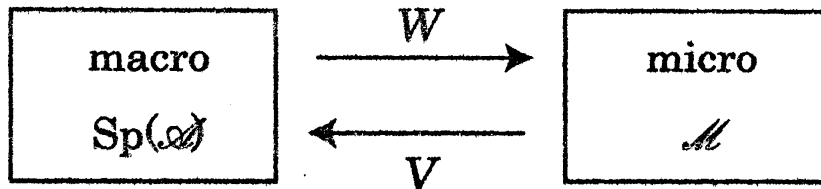


図 2: K-T 作用素とマイクロ・マクロ双対性

本稿の目標は増幅過程を記述することなので、上で示した随伴関係のうち特に、K-T 作用素の Fourier 変換である V の役割を詳しく調べることになる。次章では、 V を用いた具体的な定式化の方法 [7, 9, 10] を見る。

3 増幅過程の記述

3.1 観測過程の基本語彙

K-T 作用素を用いた増幅過程を記述する具体的方法を述べるために、観測スキームにおける基本的な語彙を準備する。

Probe 系 測定装置の先端部分に対応するマイクロ量子系。被観測系と直接相互作用し、観測スキームの第1段階をなすものとする。

中間位置 Probe 系の「然るべき」初期状態。理想測定のためには、probe 系の状態を、被観測系の情報を全く持っていない状態にする必要がある。

測定相互作用 被観測系 $\mathcal{O}$ と（中間位置にある）probe 系 $\mathcal{Q}$ との相互作用。 $\mathcal{O}$ の状態を ξ と表し、中間位置として $\hat{U}$ の単位元 $|e\rangle$ （取れない場合は invariant mean を用いる）を設定すると、測定前後での状態変化は $\xi \otimes |e\rangle \rightarrow \xi_x \otimes |x\rangle = \xi_x \otimes |x\rangle$ と表される。直ぐにわかるとおり、この形の相互作用は K-T 作用素（と射影仮説）により実現できる。

なお、unitary 群 $\mathcal{U}$ が compact のときは中間位置として必ず $|e\rangle$ を取れる。この場合に、上記の測定相互作用を K-T 作用素を用いて書き下すと、 $\hat{U}$ は離散なので

$$\tilde{U}(V)(\xi \otimes |\iota\rangle) = \sum_{x \in \hat{U}} c_x \xi_x \otimes |x\rangle \quad (3)$$

となる（ただし $\xi = \sum_{x \in \hat{U}} c_x \xi_x$ は被観測系の任意の初期状態）．ところで、先に述べたとおり probe 系は測定装置の「先端」に当るマイクロ系であるから、上式で与えられる状態変化はマイクロ系の状態変化である．これが、マクロに識別されうる測定器の「指針」の変化へと写されるためには、次節で展開する《増幅過程》を経る必要がある．

3.2 増幅のダイナミカルな理解

増幅過程を具体的に記述する方法には様々な可能性があるが、その本質は〔無限自由度の環境系＝測定系〕と理解する点にある、と言ってよい．それを最も簡明に書き下すには、測定系として N 個の probe 系の合成系 ($N \gg 1$) を用意して測定相互作用を書き下せばよい．つまり、

被観測系の初期状態： $\xi = \sum_{x \in \hat{U}} c_x \xi_x$
 観測装置（＝大自由度の環境系）の初期状態： $|\iota\rangle^{\otimes N} := \underbrace{|\iota\rangle \otimes \cdots \otimes |\iota\rangle}_N$

と考える．これらの測定相互作用を実現する作用素としては、K-T 作用素を用いて

$$U_N(\xi \otimes |\iota\rangle^{\otimes N}) := V_{N,N+1} \cdots V_{23} \tilde{U}(V)_{12}(\xi \otimes |\iota\rangle^{\otimes N})$$

と定めればよいことがわかる [10]．これは (3) 式等を利用して具体的に計算することができて、

$$\begin{aligned} U_N(\xi \otimes |\iota\rangle^{\otimes N}) &= V_{N,N+1} \cdots V_{23} \tilde{U}(V)_{12}(\xi \otimes |\iota\rangle^{\otimes N}) \\ &= \sum_{\gamma \in Sp(\mathcal{A})} c_\gamma V_{N,N+1} \cdots V_{34} V_{23}(\xi_\gamma \otimes |\gamma\rangle \otimes |\iota\rangle \otimes \cdots \otimes |\iota\rangle) \\ &= \sum_{\gamma \in Sp(\mathcal{A})} c_\gamma V_{N,N+1} \cdots V_{34}(\xi_\gamma \otimes |\gamma\rangle \otimes |\gamma\rangle \otimes |\iota\rangle \otimes \cdots \otimes |\iota\rangle) \\ &= \cdots \cdots \cdots \\ &= \sum_{\gamma \in Sp(\mathcal{A})} c_\gamma \xi_\gamma \otimes |\gamma\rangle \otimes |\gamma\rangle \cdots \otimes |\gamma\rangle \\ &= \sum_{\gamma \in Sp(\mathcal{A})} c_\gamma \xi_\gamma \otimes |\gamma\rangle^{\otimes N} \end{aligned} \quad (4)$$

となる．この計算から、大自由度の環境系として用意した観測系における個々の probe 状態の役割が明確になる；つまり、被観測系と結合した最初

の probe 系での変化がそれと結合した次の probe 系へ伝わり、それがさらに次の probe 系へ…という仕方で、ミクロな被観測系の状態の情報を N 自由度の観測装置の状態へ写すことができる。

ここで、観測系の自由度 N を勝手に定めてよいのかという疑問があるかもしれない。結論から述べると、自由度 N は十分大きければ任意に定めてよく、値そのものは本質ではないことが理解される。このことは、上述のような見方で増幅過程を理解した場合に、それが確率過程として Lévy 過程になっていることに依っている。詳細な議論は [10] にあるが、本質をなすのは K-T 作用素の intertwining 関係から帰結する、 $\hat{U}$ の正則表現 λ に関する性質 $\lambda^{\otimes m} \approx \lambda^{\otimes n}$ ($\forall m, n$: cardinals), つまり tensor 積表現に対する準同値性である。したがって、上述の増幅過程についての無限分解可能性から、 N の定め方の任意性が保証されるのである。

上の議論は Schrödinger 表示に基づいたが、Heisenberg 表示を用いても同様にして、 $\mathcal{U}$ が compact でない場合 ($Sp(\mathcal{A})$ が連続 spectrum を持ちうる場合) も含めて議論を進めることができる。こうして、系の初期状態 ξ とマクロに識別しうる指針状態 $|\gamma\rangle^{\otimes N}$ ($N \gg 1$) の観測確率の関係として、Born の確率解釈

$$p(|\gamma \in \Delta\rangle^{\otimes N} | \omega_\xi) = \|\hat{P}(\Delta)\xi\|^2 \quad (5)$$

を再現する。ここに、 $\Delta \subset Sp(\mathcal{A})$ は任意の Borel 集合、 $\hat{P}(\Delta)$ はそれに属する固有空間への射影作用素である。離散 spectrum の場合には、(5) 式の特別な場合である

$$p(|\gamma\rangle^{\otimes N} | \omega_\xi) = \|c_\gamma\|^2$$

が帰着することが見てとれるだろう。なお、ここでの議論を instrument [11] を用いて書き直すことで Born の確率解釈および射影仮説についてより明快的な表式が得られる [12]。その場合も、K-T 作用素によってミクロ量子系の情報がマクロな指針の動きへと変換される過程をダイナミカルに記述できるという本質は変わらない。

4 具体例の検討：Stern-Gerlach 実験

前章で展開したスキームによって、観測したい量子系の初期状態からマクロな指針状態 $|\gamma\rangle^{\otimes N}$ (或いは、 N の任意性より $|\gamma\rangle^{\otimes \infty}$ と考えてもよい) が増幅される過程を記述することができた。このスキームは、被観測系の状態と得られる指針状態とが完全相関を持つ理想測定であることに注意したい。現実の実験はもちろん完全な理想測定ではないので、このスキームからのズレを吟味する必要がある。そのためには、「指針状態」 $|\gamma\rangle^{\otimes \infty}$ が具体的にどのような状態であるか理解する必要がある。本章では、よく知ら

れた Stern-Gerlach 実験について前章のスキームがどのように適用され、どのような指針状態として spin の値が“見える”のか検討しよう。

Stern-Gerlach 実験とは、図に示すとおりスピンを持った粒子に（不均一な）磁場をかけて、スピンの値に応じて軌道が変化することを利用してそれを測定するものであった。

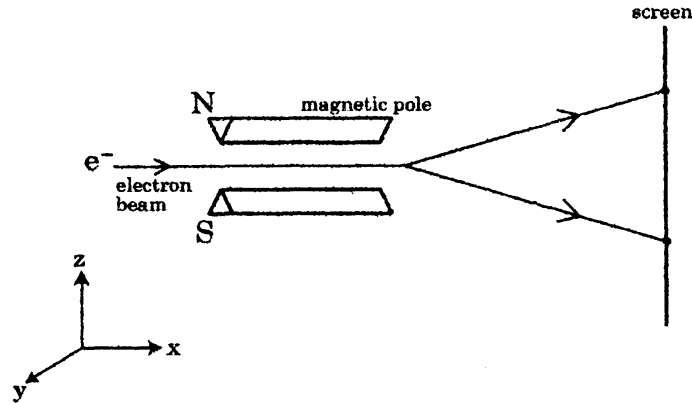


図 3: 1 組の磁極を用いた, Stern-Gerlach 実験のセットアップ. ここでは z 方向のスピンの値を測っている.

簡単のためスピン $1/2$ の粒子を考え、図の z 方向のスピンの値を測定する場合を考える. 上向き ($+1/2$), 下向き ($-1/2$) の状態をそれぞれ $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ と表そう. この 2 つの状態が増幅過程によってどのように識別されるだろうか.

4.1 Stern-Gerlach 実験への適用

一般的スキームを適用する手順は以下の通りである:

- 0) 系を記述する代数を定める.
- 1) ミクロ・マクロ双対性の基本オブジェクトの組を同定する.
- 2) K-T 作用素の具体的な表式を求める.

- 0) 系を記述する代数を定める.

物理変数としてはスピンと空間自由度を扱えば十分であると考えられる. スピン変数は Lie 代数 $\mathfrak{su}(2)$, 空間自由度は CCR により供給されるので, 系を記述する von Neumann 代数としてはそれらで生成される

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= M_2(\mathbb{C}) \otimes B(L^2(\mathbb{R}^3)) = \mathfrak{su}(2)'' \otimes B(L^2(\mathbb{R}^3)) \\ &= \text{Lin}(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)'' \otimes \text{Lin}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)''\end{aligned}$$

としてやればよい.

1) ミクロ・マクロ双対性の基本オブジェクトの組を同定する.

上で求めた $\mathcal{M}$ に付随する各オブジェクトは

$$\text{MASA: } \mathcal{A} = \mathcal{A}' = \text{Diag}(2, \mathbb{C}) \otimes L^\infty(\mathbb{R}^3)$$

($\text{Diag}(N, \mathbb{C})$ は $N \times N$ 対角行列の全体)

$$\text{Unitary 群: } \mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) = \mathbb{T}^2 \otimes \mathcal{U}(L^\infty(\mathbb{R}^3)) = \mathbb{T}^2 \otimes L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{T})$$

$$\text{環指標: } Sp(\mathcal{A}) = \{\pm 1\} \times \mathbb{R}^3;$$

$$\text{群指標: } \widehat{\mathcal{U}} = \mathbb{Z}^2 \otimes \widehat{\mathcal{U}(L^\infty(\mathbb{R}^3))} = \mathbb{Z}^2 \otimes L^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{Z}),$$

と求まる. ただし, $L^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{Z})$ は以下で定まる support 有限の $\mathbb{R}^3$ 上 $\mathbb{Z}$ -値写像 $\mu = \mu_{\{(x_1, n_1), \dots, (x_r, n_r)\}}$ である:

$$\begin{aligned} L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{T}) \ni f &\longmapsto \mu_{(x_1, n_1), \dots, (x_r, n_r)}(f) := f(x_1)^{n_1} \cdots f(x_r)^{n_r} \\ &= \exp\left[i \sum_i n_i \arg f(x_i)\right] \in \mathbb{T} \end{aligned}$$

環指標のうちスピンに寄与する部分 $\{\pm 1\}$ ($\sigma_z = \sigma_3$ の固有値) は, 2つのスピン状態 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ に対応している.

2) K-T 作用素の具体的な表式を求める.

(1) 式に従って, 正則表現を求めて書き下すこともできるが, この場合のようにもとの代数が Lie 代数から生成されている場合, Weyl 形式を一方の変数について spectral 分解することでも得られる [12]. いま unitary 群 $\mathcal{U}$ の元は, 実パラメータ $\theta_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) と $\mathbb{R}^3$ 上の任意関数 F を用いて

$$\begin{pmatrix} \exp(i\theta_1 F(x, y, z)) & 0 \\ 0 & \exp(-i\theta_2 F(x, y, z)) \end{pmatrix},$$

と表される. スピンについては既に z 方向で対角化されているので, これから作られる Weyl 形式を $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ について対角化してやれば K-T 作用素の具体的な表式が得られる:

$$\tilde{U}(V) = \int_{\mathbb{R}^3} dE(\vec{x}) \otimes \text{diag} \left[\exp \left(i\theta_1 F(\vec{x} \cdot \vec{\hat{p}}) \right), \exp \left(-i\theta_2 F(\vec{x} \cdot \vec{\hat{p}}) \right) \right] \quad (6)$$

この式の行列部分に着目しよう. $F(\vec{x} \cdot \vec{\hat{p}}) = F(x\hat{p})$ (煩雑さを避けるため vector の記号を省いた) を 1 次の Taylor 展開で近似すると $F(x\hat{p}) \simeq F_0 + F_1 x\hat{p}$ となるが, この近似式の 2 項目の寄与は丁度 CCR の場合の運動量変化を与える作用と同じ形をしている. いまスピンの z 方向について対角化されているのだから, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ ととれば, 粒子の持つスピンの値に応じて同じ大きさで逆向きの運動量変化を与える作用が実現できるこ

とになる.

実験的状況に即して定量的な評価を与えるには, F として磁場の z 成分 B_z をとり, θ は時間スケールを含めて $\theta = \frac{\mu}{\hbar}t$ と同定してやればよい. すると $F_1 = (B_z)_1 \simeq \frac{\partial B_z}{\partial z}$ の近似の下で, 上の作用は $\exp[\frac{it\mu}{\hbar} \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{e}_z) \hat{p}]$ と書け, CCR の場合の $\exp[\frac{i}{\hbar} x \hat{p}]$ と比較することにより, 運動量変化を

$$\Delta p_z = \pm \mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \Delta t \quad : \text{corresponding to the eigenvalue } \pm \text{ of } \sigma_z \quad (7)$$

と見積もることができる. このようにして, Stern-Gerlach 実験におけるスピンの測定方法を前章の一般的スキームから理解できることがわかり, さらに運動量変化についての定量的な評価を与えることができた. ここで
の考察は, G.Emch によるスピン変数と空間変数との「双対」構造を機軸に増幅の仕組みを捉える方法 [4] と整合するものであり, その双対カップリングを担う外場の役割を明確にした点で, 新たな視点を与えることができたといえる.

4.2 理想的な増幅に関する注意

前節の Stern-Gerlach 実験における考察では, 外磁場について幾つかの因子を無視した議論を行った. 特に, (1) $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ の値の変動 と
(2) $B_x, B_y, \frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_z}{\partial y}$ 等の項の影響 は理想的状況からのズレとして最も大きな要因である. (1) については磁場の揺らぎに起因する効果と粒子軌道の変化に伴う空間的配位の変化に起因する効果とに分けられる. (1), (2) ともに, 増幅過程の進行中にスピンの反転を引き起こしてしまい, 測定に誤りの生じる原因になるものである. 磁場に対する「断熱不変性 [1]」は, (1) のうち磁場の揺らぎに起因する効果が十分小さいとする条件であることが摂動論を用いた考察からわかり, 本稿で展開した増幅過程の概念を応用して, 断熱不変性が満たされるとき Stern-Gerlach 測定の誤り確率を評価することができる [12].

これらの誤差要因は, 理想的なスキームで全てを取り込むことはできず, その補正効果として個別に評価してやる必要がある.

謝辞

本研究に際し、多大なご教示と共同研究における大きなお力添えを頂きました小嶋泉 先生、様々な議論と有益な助言を下さった安藤浩志 氏、西郷甲矢人 氏、長谷部高広 氏、重要な文献についてのご指摘を頂きました大矢雅則 先生に心から感謝いたします。

参考文献

- [1] Bohm, D. *Quantum Theory*, New York: Prentice Hall, (1951) 496-500.
- [2] Busch, P., Grabowski, M. & Lahti, P.J., *Operational Quantum Physics* (LNPm31), Springer (1995) 165-173.
- [3] Doplicher, S., Haag, R. and Roberts, J.E., Fields, observables and gauge transformations I & II, *Commun. Math. Phys.* **13**,1-23 & **15**,173-200 (1969); Doplicher, S. and Roberts, J.E., Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, *Comm. Math. Phys.* **131** (1990) 51-107.
- [4] Emch, G., On quantum measurement processes, *Helv. Phys. Acta* **45** (1972/73) 1049-1056.
- [5] Enock, M. & Schwartz, J-M. *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups*, Springer-Verlag (1992) 44-82.
- [6] Ojima, I., A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria –Order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings of adjunctions–, *Open Systems and Information Dynamics*, **10** (2003) 235-279.
- [7] Ojima, I., Micro-macro duality in quantum physics, pp.143–161 in *Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum*, World Scientific (2005).
- [8] Ojima, I., Lévy process and innovation theory in the context of Micro-Macro duality, A brief summary of talks at the 5th Lévy Seminar (2006), edited by T. Hida.

- [9] Ojima, I. and Takeori, M., How to observe quantum fields and recover them from observational data? – Takesaki duality as a Micro-Macro duality –, Open Systems and Information Dynamics, **14**, 307 – 318 (2007).
- [10] Ojima, I., Micro-Macro duality and emergence of macroscopic levels, to appear in Proc. of "International Conference in Quantum Bio-Informatics Center (ICQBIC 2007)" (math-ph/07052945).
- [11] Ozawa, M., Quantum measuring processes of continuous observables. J. Math. Phys. **25**, 79-87 (1984); Publ. RIMS, Kyoto Univ. **21**, 279-295 (1985); Ann. Phys. (N.Y.) **259**, 121-137 (1997); Ozawa, M., Perfect correlations between noncommuting observables, Phys. Lett. A, **335**, 11-19 (2005).
- [12] Harada, R. and Ojima, I., A Unified Scheme of Measurement and Amplification Processes based on Micro-Macro Duality – Stern-Gerlach experiment as a typical example –, *in preparation*.