

HOMEOMORPHISMS OF LARGE SEIFERT MANIFOLDS

関西学院大学 理 浅野孝平

P を polyhedron とし、 P の自己同相写像の全体がつくる群の、isotopic to identity な自己同相写像の全体のつくる部分群による剰余群を、 P の homeotopy group $\Lambda(P)$ と呼ぶ。ここでは、3-manifold の homeotopy group について考える。3-manifold の homeotopy group については、次の問題に関連して興味がある。

1. 3次元球面の中の knot は、その complementary によって type が決定されるか。

2. Smith Conjecture.

3. knot group の automorphism group を決定する。

sufficiently large な (すなわち incompressible な orientable surface をふくむ)、irreducible な 3-manifold の homeotopy group については、Waldhausen の基本的な結果 [2] が知られている。しかし、実際に、homeotopy group を決定するこ

一般には.

とは、非常にむずかしい。ここでは [1][2] の結果を利用して、sufficiently large な Seifert fiber space についての結果を述べる。

準備 次のようにして、構成された 3-manifold を Seifert fiber space (あるいは、Seifert manifold) $\{b; (\epsilon, g); (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)\}$ と呼ぶ。但し、 $\epsilon = 0_1, 0_2, n_1, n_2, n_3, n_4$. $b \in \mathbb{Z}$ if $\epsilon = 0_1, n_2$ $b \in \mathbb{Z}_2$ if $\epsilon = 0_2, n_1, n_3, n_4$. (α_i, β_i) relatively prime integers with $\alpha_i > \beta_i > 0$.

1. genus g で $r+1$ 個の boundary を持つ surface (orientable or nonorientable) の上の S^1 -bundle を考える。このとき必ず、cross-section が存在する。この cross-section の boundary を a_i と名づける。($i=1, 2, \dots, r$)

2. a_i の上の S^1 -bundle は torus である。これを T_i とおくことにする。 T_i の上の fiber の 1 つを b_i とおくと、 (a_i, b_i) は、 $H_1(T_i) \cong \pi_1(T_i)$ の generating system をなす。

3. 各 T_i ($i \neq 0$) に対して meridian disk が $\alpha_i a_i + \beta_i b_i$ に homologous となるように、solid torus V_i をはりつける。 V_i の中には、 T_i の fibering を拡張しておく。(このとき V_i の center line は普通の意味では fiber ではない。これを

exceptional fiber と呼ぶ。) T_0 には, meridian disk が $a_0 + b b_0$ となるように, solid torus V_0 をはりつける。

4. boundary のある Seifert fiber space は, boundary のない Seifert fiber space から, fiber にそって solid torus をのぞいたものと考えればよい。

最初に, Waldhausen の結果をまとめておく。以下 orientable case すなわち, type 0_1 および n_2 の Seifert fiber space に制限しておく。

次の List にぶくまれている Seifert manifold を "large" Seifert manifold と呼ぶ。

$\partial M \neq \emptyset$ のとき。

(1). $S^1 \times S^1 \times I$, I ; interval.

(2) base space が disk で 2 つの exceptional fiber type $(2, 1)$ を持つ。

(3). Möbius band の上の fiber space.

$\partial M = \emptyset$ のとき

(1) $\epsilon = 0_1$, $g = 0$, $r \leq 3$

(2) $\epsilon = n_2$, $g = 1$, $r \leq 1$

(3) $S^1 \times S^1 \times S^1$

(4) $\{0; (n_2, 2)\}$

(5) $\{-2; (0, 0); (2, 1), (2, 1), (2, 1), (2, 1)\}$

(6) $\{-1; (n_2, 1); (2, 1), (2, 1)\}$

"large"な Seifert fiber space は, sufficiently large である。[1] or [3]。

Waldhausen は large な Seifert manifold について次の定理を証明している。

Theorem M, N を large Seifert manifold とする。
 $\Phi: M \rightarrow N$ を homeomorphism とするならば, Φ と isotopic な fiber preserving homeomorphism が存在する。

さらに, [1] で, isotopic to identity な fiber preserving homeomorphism は, fiber preserving isotopy によって isotopic to identity であることを注意している。ここでは, 以上の2つの結果を使って考える。

$\Lambda(B, \{Z_*, \dots, Z_*\} \dots \{Z_* \dots Z_*\})$, $Z_i \in B$ を B の $\{ \}$ 内の点か set wise に fix されるような homeomorphism の全体の $\underbrace{\{ \}$ 内の点を $\underbrace{\text{set wise に fix した } B \text{ の isotopy によって isotopic to identity な homeomorphism の全体による剰余群とする。}}_{\text{type}(\alpha_i, \beta_j) \text{ の}}$
 exceptional fiber に genus g の surface B の点 Z_i を対応させて, もし $(\alpha_i, \beta_i) = (\alpha_j, \beta_j)$ ならば, Z_i と Z_j を1つの $\{ \}$ 内

にいれ、もし boundary のある Seifert fiber space のときは、boundary の各 component に $z_i \in B$ を対応させ 1つの $\{j\}$ にくくる。このようにしてつくった $\Lambda(B, \{z_1, \dots, z_r\})$ を $\mathcal{A}$ と書くことにする。すると、large な Seifert manifold M に対して、 $\pi: \Lambda(M) \rightarrow \mathcal{A}$ という homomorphism が存在する。

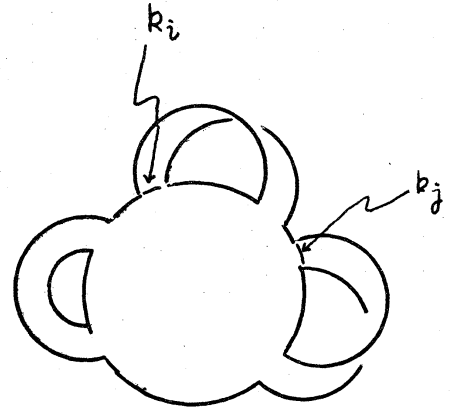
Lemma 1. 次のような homomorphism π が存在する。
 $\pi \pi = \text{identity}.$

証明. $\mathcal{A}$ の element は $\Lambda(B')$ の element と一対一対応している。但し、 B' は、genus g の surface から、 $r+1$ 個の boundary の 1 個数 $\{$ 個の disk の interior をのぞいた surface。 $e=0$ のとき、 M' を M から exceptional fiber の neighbourhood をのぞいた manifold とすると、 $M' \approx B' \times S^1$ である。 B' の homeomorphism は、 $B' \times S^1$ の homeomorphism に拡張できるので、この拡張された homeomorphism が、さらに、各 V_i に、拡張できることを示せば、十分である。 a_i は、 $\pm a_j$ に写され b_i は $\pm b_j$ に写されるのであるから、 V_i の meridian curve は V_j の meridian curve に写される。故に、 V_i から V_j の homeomorphism に拡張可能である。

$\epsilon = n_2$ のとき。 M' を B' の上の S' -bundle と考えて、 $p^{-1}(k_i)$ を A_i とおく。 ($i=1, 2, \dots, g$)。

但し、 p は、 M' を S' -bundle と考えたときの bundle projection。

k_i は図のような、 B' 上の proper arc とする。 $(M' - \bigcup (A_i))$ は、 product bundle であるので、



$(B' - \bigcup (k_i))$ の homeomorphism は、 $(M' - \bigcup (A_i))$ に拡張可能である。そして、 M' が orientable であることを使えば、 M' に拡張できることを証明できる。 ■

したがって、

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \Pi \longrightarrow \Lambda(M) \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

は、 split する。目標は、 $\Lambda(M)$ と $\mathcal{A}$ の関係を明らかにすることであるから、 $\text{Ker } \Pi$ を計算すれば良い。

Lemma 2. $p: N \rightarrow S$ を surface S の上の、 S' -bundle とする。このとき、 S の isotopy $\{i_t; 0 \leq t \leq 1\}$ と、 $i_0 p = p F$ である N の autohomeomorphism F が存在すると仮定する。このとき、 N の isotopy $\{I_t; 0 \leq t \leq 1\}$ で、 $i_t p = p I_t$ 、 $I_0 = F$ となるものが存在する。

上の lemma は, trivial である。このことにより, $\text{Ker } \Pi$ は各 fiber が自分自身に map する homeomorphism を考えれば良いことになる。

Lemma 3. f を, M の fiber preserving homeo で, f の isotopy class $[f]$ が, $\text{Ker } \Pi$ にふくまれているとする。そして, さらに $f(B') = B'$ とするならば, f は isotopic to identity である。

これは, M を $\cup T_j$ および B' で cut することにより, 証明できる。この lemma によって, $\text{Ker } \Pi$ は, M' の cross-section B' の embedding を分類すればよい。まず, cross-section の boundary を考える。

Lemma 4. f を M の fiber preserving homeomorphism で $[f] \in \text{Ker } \Pi$ で, しかも各 fiber は, 自分自身に map されているとする。

$\partial M = \emptyset$ のとき, $M = \{b; (e, g); (2, 1) \dots (2, 1)\}, r=2b$ とすれば,

- 1). $f(a_i) \sim e a_i, f(b_i) \sim e b_i$
- 2). $f(a_i) \sim e(a_i + b_i), f(b_i) \sim -e b_i$

ここで, $\epsilon = \pm 1$, $\sim$ は homologous on T_i を示す.

$\partial M \neq \emptyset$ で, exceptional fiber がすべて type (2, 1) のときも, 上と同じ.

上以外の Seifert manifold に対しては, $f_i(a_i) \sim \epsilon a_i$
 $f(b_i) \sim \epsilon b_i$.

証明は略する. ここで, orientation preserving homeo. であれば, cross-section の boundary は, 固定されているので, 次のような exact sequence を考える. $\Lambda^+(M)$ を, $\{M \text{ の orientation preserving homeo. の全体} \} / \{ \text{isotopic to identity な homeo. の全体} \}$ とすれば,

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \Pi^+ \longrightarrow \Lambda^+(M) \xrightarrow{\Pi^+} \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

は split する. そして, 上の lemma により $\Lambda^+(M)$ を決定すれば $\Lambda(M)$ がわかる. そして,

$$\text{Theorem} \quad \text{Ker } \Pi^+ \cong H_1(B)$$

という結果を得る. さらに $\mathcal{A}$ より $\text{Ker } \Pi^+$ の automorphism group Λ の homomorphism は,

$$\mathcal{A} \longrightarrow \Lambda(B) \longrightarrow \text{Aut } H_1(B)$$

という自然な homomorphism の台成である.

Example torus knot の complement $T_{p,q}$

$$\mathcal{H} \cong \mathbb{Z}_2, \quad \text{Ker } \Pi^+ \cong H_1(B) \cong 0$$

$$\Lambda^+(T_{p,q}) \cong \Lambda(T_{p,q}) \cong \mathbb{Z}_2$$

文献

- (1) F. Waldhausen, "Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I," Invent. Math. 3 (1967), 308 - 333; II, Invent. Math. 4 (1967), 87 - 117.
- (2) F. Waldhausen, "On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large," Ann. Math. 87 (1968), 56 - 88.
- (3) P. Orlik, "Seifert Manifolds," Lecture Notes in Math. 291, Springer-Verlag, (1972).