

線型常微分方程式の解の漸近的性質

東大 理 木村 俊房

§1. 目的, 線型方程式

$$(1.1) \quad x' = (A + B(t))x \quad (' = d/dt)$$

において, x は n 次元ベクトル, A は $n \times n$ 定数行列, $B(t)$ は $0 \leq t < \infty$ で定義された $n \times n$ 行列とする. 何等かの意味で $t \rightarrow \infty$ のとき $B(t)$ が小さければ, それに応じて (1.1) の解の $t \rightarrow \infty$ のときの漸近的行動は

$$(1.2) \quad x' = Ax$$

の解のそれに近いことが予想される. 「 $t \rightarrow \infty$ のとき $B(t)$ が小さい」こととして, たとえば,

$$(a) \quad B(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$(b) \quad \int_0^\infty \|B(t)\| dt < \infty$$

などが考えられる.

この主題は, $B(t)$ が (a), (b) などを満たすときの (1.1) の解の漸近的行動を (1.2) の解のそれと比較することにあるが, ここでは種々の結果を挙げることでなく, このような問題に有効な 1 つの方法の説明を主な目的とした. その理由は, この方法は福原氏によって, 線型, 非線型方程式の特異点の研究に用いられ, これらの問題を統一的に扱えることが示されているが, しかしこの方法が広く知られているとは限らないからである.

従って以下記述においても必ずしも精密な結果を述べているわけではない.

§2. 福原の問題, 常微分方程式系

$$(2.1) \quad x_i' = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, \dots, n)$$

を条件

$$(2.2) \quad x_i(t_i) = x_i^0 \quad (i=1, \dots, n)$$

のもとで解く問題を南雲氏に従って 福原の問題 という。

定理 数直線 $\mathbb{R}$ をコンパクト化 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ しておく。

$I_1, \dots, I_n$ は $\bar{\mathbb{R}}$ における区間で, それらの内部は1つの閉区間 I に一致してゐるとする。 $q_i(t), \omega_i(t)$ ($i=1, \dots, n$) は I_i で定義された連続函数で, q_i は複素数値, ω_i は実数値函数で ≥ 0 とする。 t_i, x_i^0 ($i=1, \dots, n$) は

$$|x_i^0 - q_i(t_i)| \leq \omega_i(t_i)$$

をみたすとする。(2.1) の右辺 f_i に対し次の仮定をおく。

① f_i の定義域は

$$D: |x_1 - q_1(t)| \leq \omega_1(t), \dots, |x_n - q_n(t)| \leq \omega_n(t), \quad t \in I$$

で, 固定された各 t に対し $(x_1, \dots, x_n)$ について連続, 固定された各 $(x_1, \dots, x_n)$ に対し t について可測な複素数値函数

② t_i を含む任意の閉区間で可積分な函数 $F_i(t)$ があって

$$|f_i(t, x_1, \dots, x_n)| \leq F_i(t) \quad (i=1, \dots, n)$$

③ 不等式

$$(2.3) \quad |x_1(t) - q_1(t)| \leq \omega_1(t), \dots, |x_n(t) - q_n(t)| \leq \omega_n(t), \quad (t \in I)$$

をみたす任意の $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ に対して

$$(2.4) \quad |x_i^0 + \int_{t_i}^t f_i(s, x_1(s), \dots, x_n(s)) ds - q_i(t)| \leq \omega_i(t) \quad (t \in I).$$

そのとき, (2.1) の解 $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ で, 各 $x_i(t)$ は I_i で連続で (2.2) をみたすものが存在する。

注意1. 解はもちろん不等式 (2.3) をみたす。

注意2. F_i が連続, φ_i, ω_i が微分可能のとき, 条件③がなりたつための十分条件として, たとえば

$$|F_i - \varphi_i'| \leq \rho_{\varphi_i}(t - t_i) \omega_i'(t)$$

をとることができる。

注意3. 任意の $0 < C$ に対し

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| \leq C \omega_i(t)$$

から

$$|x_i^0 + \int_{t_i}^t f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) dt| \leq \sigma C \omega_i(t) \quad (0 < \sigma < 1 \text{ は定数})$$

がいえれば, 解はただ1つである。

§3. A が対角化可能の場合. x に対し適当な1次変換(定係数)を行なうことによって, A は最初から Jordan の標準形になっているとしてよい。このような変換に対し, $B(t)$ の性質 (a), (b) は不変である。

まず,

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$B(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

の場合を考えよう。既 $\lambda_i = \mu_i \quad (i=1, \dots, n)$ とおく。

変換

$$x = e^{At} y$$

によって, (1.1) は

$$y' = e^{-At} B(t) e^{At} y,$$

成分で書いて

$$(3.1) \quad y_i' = \sum_j b_{ij}(t) e^{\lambda_j t - \lambda_i t} y_j = f_i(t, y_1, \dots, y_n)$$

となる。

A の固有値 λ_k を固定し

$$t_i = \begin{cases} +\infty & (\mu_i > \mu_k) \\ \tau & (\mu_i = \mu_k) \\ t_0 & (\mu_i < \mu_k) \end{cases} \quad t_i = \tau \quad t_0 \leq \tau < \infty$$

とおいて、条件

$$(3.2) \quad y_i(t_i) = y_i^0 \quad (i=1, \dots, n), \quad \tau = \tau_i \quad y_i^0 = 0 \quad (\mu_i > \mu_k)$$

を満たす (3.1) の解を求めてみよう。

$$\sum_{j=1}^n |y_j(t)| \leq \beta(t), \quad \beta(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

とする。

$$I_i = [t_i, \infty), [t_i, \infty] \text{ のどちらか, } I = (t_0, \infty),$$

$$f_i(t) = y_i^0, \quad \omega_i(t) = C \omega_i(t, \tau) = C e^{(\mu_k - \mu_i)t + |\int_{\tau}^t \beta(t) dt|}$$

とる。ただし C は十分大きい定数, κ は 1 より大きい任意の定数である。定数 δ を

$$|y_i^0| \leq \delta C \omega_i(t, \tau) \quad (t_0 \leq t < \infty)$$

となるようにとる。右辺が t_j で最小となるためには

$$|\mu_k - \mu_i| \geq \kappa \beta(t) \quad (\mu_i \neq \mu_k)$$

であればよい。

$$|y_i(t) - y_i^0| \leq \omega_i(t)$$

から

$$\begin{aligned} & |y_i^0 + \int_{t_i}^t f_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) dt - y_i^0| \\ & \leq \left| \int_{t_i}^t C(1+\delta) \beta(t) \omega_i(t, \tau) dt \right| \end{aligned}$$

を得る。この右辺が $C(1+\delta) \frac{1}{\kappa} \omega_i(t, \tau)$ を超えないためには、

$$\mu_i - \mu_k \geq 2\kappa \beta(t) \quad \mu_i > \mu_k$$

であればよい。 $1+\delta \leq \kappa$ となるように δ をとり、それに応じて C をとる。

t_0 は $|\mu_i - \mu_k| \geq 2\kappa\beta(t)$ ($\mu_i \neq \mu_k$) となる t には違いない。すると §2 の定理が適用できる。とくに, $\delta = \kappa - 1$, $C = \max_{\mu_j \leq \mu_k} \left\{ \frac{|\psi_j|}{\omega_j(t_j, \tau)} \right\} / (\kappa - 1) < \infty$ となる。

条件 (3.2) を満たす解 $y_j = \psi_j(t)$ に対し,

$$M(\sigma, \Delta_0) = \max_{\mu_j \leq \mu_k} \left\{ \frac{|\psi_j(\Delta_j)|}{\omega_j(\Delta_j, \sigma)} \right\}, \quad t = t_j \text{ 且 } \Delta_j = \begin{cases} +\infty & \mu_j > \mu_k \\ \sigma & \mu_j = \mu_k \\ \Delta_0 & \mu_j < \mu_k \end{cases}$$

とおくと,

$$|\psi_j(t) - \psi_j(t_j)| \leq \frac{M(\tau, t_0)}{\kappa - 1} \omega_j(t, \tau)$$

が得られる。(3.2) を満たす解と, 条件 $y_j(\sigma) = \psi_j(\Delta_j)$ を満たす解は等しいから

$$(3.3) \quad |\psi_j(t) - \psi_j(\Delta_j)| \leq \frac{M(\sigma, \Delta_0)}{\kappa - 1} \omega(t, \sigma).$$

ここで $t = t_j$ において

$$(3.4) \quad |y_j^0| \leq \frac{\kappa}{\kappa - 1} M(\sigma, \Delta_0) \omega(t, \sigma)$$

を得る。 $\mu_j < \mu_k$ のとき $y_j^0 = 0$ とおけば, (3.3), (3.4) を使って, 対応する

(1.1) の解 $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ に対する評価式

$$\frac{\kappa - 1}{\kappa} M_1(\tau) e^{\mu_k(t - \tau) - \kappa \int_{\tau}^t \beta(t) dt} \leq \max_{i=1}^n |x_i(t)| \leq \frac{\kappa}{\kappa - 1} M_1(\tau) e^{\mu_k(t - \tau) + \kappa \int_{\tau}^t \beta(t) dt}$$

が得られる。ここで $M_1(\tau) = \max_{\mu_j = \mu_k} \{ |x_j(\tau)| \}$.

$B(t)$ が

$$\int_0^\infty \|B(t)\| dt < \infty$$

をみたすときには, ずっと簡単に, 各固有値 λ_k に対し

$$|x_i(t) - \delta_i^k e^{\lambda_k t}| \leq o(1) e^{\mu_k t}$$

をみたす解の存在がわかる。それには

$$t_i = +\infty \quad (\mu_i > \mu_k), \quad \tau \quad (\mu_i \leq \mu_k), \quad y_i^0 = \delta_i^k$$

$$q_i = \delta_i^k, \quad \omega_i(t) = \sigma_i(t) e^{(\mu_k - \mu_i)t}$$

といて定理を適用すればよい。

§4. A が対角化不可能の場合, A 自身が Jordan の標準形になっている。つぎの形をしているとする。

$$A = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_e(\lambda_e) \end{bmatrix} \quad J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}} \right\} n_i$$

$$r = \max \{n_1, \dots, n_e\} - 1 \quad \text{とおく。}$$

$B(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$ のときには, つぎの条件を満たす $\beta(t)$ をとる:

$$\sum_{k=1}^n |t_{jk}(t)| \leq \beta(t)$$

$$\beta(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$\beta'(t) = O(\beta(t)^{\frac{1}{1+r}}) \quad (t \rightarrow \infty).$$

変換

$$y = \begin{bmatrix} P_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_e(t) \end{bmatrix} z, \quad P_i(t) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \beta(t)^{-\frac{1}{r}} & \\ & \ddots & \\ & & \beta(t)^{-\frac{n_i-1}{r}} \end{bmatrix}$$

によって, z の方程式は

$$\frac{dz}{dt} = (\Lambda + C(t))z$$

となる。ここで

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_e(\lambda_e) \end{bmatrix}, \quad \Lambda_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix},$$

$$\|C(t)\| = O(\beta(t)^{\frac{1}{1+r}}).$$

これで §3 の場合に帰着した。

つきに, (6) より強い条件

$$(6') \quad \int_0^\infty t^r \|B(t)\| dt < \infty$$

を仮定すれば, 変換

$$y = e^{Dt} z, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_e \end{bmatrix}, \quad D_i = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} n_i$$

を施して得られる方程式

$$\frac{dz}{dt} = (\Lambda + e^{-Dt} B(t) e^{Dt}) z$$

に定理を適用して,

$$|y - t^{\lambda_{rk}} e^{\lambda_{rk} t} c_{rk}| = o(t^{\lambda_{rk}} e^{\lambda_{rk} t}) \quad (1 \leq k \leq n_r, 1 \leq r \leq e)$$

をみたす解の存在がわかる。