

Parallel immersion のもとでの測地線の挙動について

筑波大 数学研究科 間下 克哉

$\iota: M \rightarrow \mathbb{E}^N$ を対称 R 空間 M のユークリッド空間内への、
平行な第 2 基本形式を持つ等長はめ込みとする。ここで M の
階数が 1 であれば M 内の任意の測地線の ι による像は円にな
ることが知られている。一般に次が成り立つ。

定理 A. $p \in M$ を固定する。 A を p を含む M の極大平坦
全測地的部分多様体とする。 $r = \dim A = \text{rank } M$ 。 A の p にあ
ける接空間 $T_p A$ の正規直交基 $X_1, \dots, X_r$ で、 X_i を初期ベクト
ルとする M の測地線 $\gamma_i(t) = \exp tX_i$ の ι による像が円にな
るものが存在する。

$\mathbb{E}^r$ の原点の近傍から A における p の近傍への局所等長写像

$$\Phi: \mathbb{E}^r \rightarrow A; (t_1, \dots, t_r) \mapsto \exp \left(\sum_{i=1}^r t_i X_i \right)$$

をとる。 $\iota \circ \gamma_i$ を含む 2 次元アフィン部分空間から $\mathbb{E}^2$ への

等長写像 φ_i を, $\iota \circ \gamma_i$ の中心の φ_i による像が E^2 の原点となるようにとり, $f_i = \varphi_i \circ \iota \circ \gamma_i$ とおく。

定理 B. $\iota \circ \alpha: E^r \rightarrow E^N$ は E^r の原点の近傍で, はめこみの積 $f_1 \times \dots \times f_r: E^r \rightarrow E^{2r}$ と同値。

系. M の十分短い測地線分 γ の ι による像は, 高々 $2r$ 次元のアフィン部分空間に含まれる。また M 内には, いろいろな $(2r-1)$ 次元アフィン部分空間にも含まれなり測地線分が存在する。

$\iota: M \rightarrow E^N$ を対称空間 M のユークリッド空間内への等長はめこみとする。 ι が定理 A, 定理 B の主張をみたせば ι の第 2 基本形式は平行である。