

Asymptotic stability for a grain boundary motion model with constraint

佛教大学・教育学部 剣持信幸 (Nobuyuki Kenmochi)
Department of Education, School of Education,
Bukkyo University

神奈川大学・工学部 山崎教昭 (Noriaki Yamazaki)
Department of Mathematics, Faculty of Engineering,
Kanagawa University

1 序

本稿では、次のような結晶粒界を記述する数理モデル (P) を考察する:

$$(P) \begin{cases} \eta_t - \kappa \Delta \eta + g(\eta) + \alpha'(\eta) |\nabla \theta| = 0 & \text{in } Q_T := \Omega \times (0, T), \\ \alpha_0(\eta) \theta_t - \nu \Delta \theta - \operatorname{div} \left(\alpha(\eta) \frac{\nabla \theta}{|\nabla \theta|} \right) + \partial I_{[-\theta^*, \theta^*]}(\theta) \ni 0 & \text{in } Q_T, \\ \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0, \quad \theta = 0 & \text{on } \Sigma_T := \Gamma \times (0, T), \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{for } x \in \Omega. \end{cases}$$

ここで、 Ω は $\mathbf{R}^N$ ($N \geq 1$) の有界領域で正則な境界 $\Gamma := \partial\Omega$ をもつとする。 T は任意の正数、 $\kappa > 0$ と $\nu > 0$ は十分小さい定数、 $g(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$, $\alpha_0(\cdot)$ は $\mathbf{R}$ 上の与えられた関数、 $\theta^* > 0$ は正定数、 $I_{[-\theta^*, \theta^*]}(\cdot)$ は閉区間 $[-\theta^*, \theta^*]$ 上で定義された指示関数、 $\partial I_{[-\theta^*, \theta^*]}(\cdot)$ は $I_{[-\theta^*, \theta^*]}(\cdot)$ の劣微分、 n は境界 Γ 上の外向き単位法線ベクトル、 $\eta_0(x)$, $\theta_0(x)$ は与えられた初期値である。

問題 (P) は Kobayashi-Warren-Carter 型 [18, 19] の結晶粒界数理モデルである。結晶粒界のダイナミクスにおいて、変数 θ は平均結晶方位を表す。また、 η は結晶方位の秩序変数で、 $\eta = 1$ のとき結晶方位は完全に決定されている状態、 $\eta = 0$ のときは結晶がない状態を表す。

結晶粒界問題に関する研究は、例えば [5, 6, 7, 18, 19, 20, 21] がある。特に、Kobayashi et al. [18] は非線形項 $\partial I_{[-\theta^*, \theta^*]}(\cdot)$ がない空間領域 2 次元の結晶粒界数理モデル (P) を提唱し、極座標系 (η, θ) を用いて空間領域 2 次元の結晶粒界ダイナミクスを研究した。さらに、[18, 19] において、 Ω が空間 2 次元の有界領域、 $g(\eta) = \eta - 1$, $\alpha_0(\eta) = \alpha(\eta) = \eta^2$ の場合の $\partial I_{[-\theta^*, \theta^*]}(\cdot)$ の項がない数理モデル (P) の数値実験が行われた。

近年、問題 (P) の数学的な解析が行われている。実際、関数 α_0 が strictly positive で、初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ であるとき、[9, 10] において Kobayashi-Warren-Carter モデル (cf. [18]), つまり $\partial I_{[-\theta^*, \theta^*]}(\cdot)$ の項がない数理モデル (P) の可解性が示さ

れた. α_0 が退化する場合 (i.e. $\alpha_0 \geq 0$) は, 初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ で, Ω が $\mathbf{R}^N$ ($1 \leq N \leq 3$) の有界領域であるとき, Kobayashi–Warren–Carter モデル (cf. [18]) の弱解の存在が [11] で示された.

[12] において数理モデル (P) が提唱され, 関数 α_0 が strictly positive ならば初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ をもつ (P) の時間大域解は少なくとも 1 つ存在することが示された. (P) の解の一意性は, 初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ で, Ω が 1 次元領域の場合のみ示されている. また, [16] では (P) の解の漸近挙動を解の一意性なしで考察している.

本稿では, 数理モデル (P) の漸近安定性を解の一意性なしで考察する. 実際, Ω が $\mathbf{R}^N$ ($N \geq 1$) の有界領域で, 関数 α_0 が strictly positive であるとき, (P) により生成された多価半群に対する大域的アトラクター $\mathcal{A}_\infty$ を構成する. 更に, ある仮定の下で $\mathcal{A}_\infty$ の特徴づけを行う.

2 Known results

本稿を通じて, 次の記号を用いる:

- (1) Banach 空間 X のノルムを $\|\cdot\|_X$ で表す.
- (2) $H := L^2(\Omega)$ とし, その内積とノルムをそれぞれ $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|_H$ と表す. H の 2 つの部分集合 A, B に対して, H における Hausdorff semi-distance を

$$\text{dist}_H(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|_H$$

と定義する. また, 通常のソボレフ空間をそれぞれ $L^\infty := L^\infty(\Omega)$, $H^1 := H^1(\Omega)$, $H_0^1 := H_0^1(\Omega)$, $H^2 := H^2(\Omega)$ で表す.

- (3) 適正下半連続凸関数 $\psi: H \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ に対して, その有効領域を $D(\psi) := \{z \in H \mid \psi(z) < \infty\}$ で表し, H での ψ の劣微分を $\partial\psi$ で表す. つまり, $\partial\psi$ は H から 2^H への多価作用素で, $z^* \in \partial\psi(z)$ であるとは

$$z \in D(\psi) \quad \text{and} \quad (z^*, y - z) \leq \psi(y) - \psi(z) \quad \text{for all } y \in H$$

をみたすときをいう. また, $\partial\psi$ の定義域を $D(\partial\psi) := \{z \in H \mid \partial\psi(z) \neq \emptyset\}$ で表す. 劣微分の基本的な性質は, [3, 15] を参照する.

- (4) 直積空間 $H \times H$ の内積 $(\cdot, \cdot)_{H \times H}$ とノルム $\|\cdot\|_{H \times H}$ をそれぞれ

$$(\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\})_{H \times H} := (a_1, b_1) + (a_2, b_2),$$

$$\|\{a_1, a_2\}\|_{H \times H} := \sqrt{(\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2\})_{H \times H}}$$

と定義する. また, $H \times H$ の2つの部分集合 A, B に対して, $H \times H$ における Hausdorff semi-distance を

$$\text{dist}_{H \times H}(A, B) := \sup_{\{a_1, a_2\} \in A} \inf_{\{b_1, b_2\} \in B} \|\{a_1, a_2\} - \{b_1, b_2\}\|_{H \times H}$$

と定義する.

本稿を通じて, 以下を仮定する.

(A1) α_0 は $C^2(\mathbf{R})$ -関数で次をみたすとする:

$$\alpha_0 \geq \delta_0 \text{ on } \mathbf{R} \text{ for a positive constant } \delta_0.$$

(A2) α は 非負値 $C^1(\mathbf{R})$ -関数で, その導関数 α' は $\mathbf{R}$ 上で定義された非減少有界関数で $\alpha'(0) = 0$ をみたすとする.

(A3) g は $\mathbf{R}$ 上で定義された Lipschitz 連続関数で

$$g \leq 0 \text{ on } (-\infty, 0] \text{ and } g \geq 0 \text{ on } [1, \infty)$$

をみたすとし, g の Lipschitz 定数を $L(g)$ で表す. また, g の原始関数を $\hat{g}$ で表し, $\hat{g}$ は $\mathbf{R}$ 上で非負値であるとする.

(A4) κ, ν, θ^* は正の実定数とする.

(A5) 初期値 $\eta_0 \in H$ と $\theta_0 \in H$ は次をみたすとする:

$$0 \leq \eta_0 \leq 1 \text{ a.e. on } \Omega \text{ and } |\theta_0| \leq \theta^* \text{ a.e. on } \Omega.$$

ここで, 初期値の集合を

$$D := \left\{ \{\eta_0, \theta_0\} \mid \begin{array}{l} \eta_0 \in H \text{ with } 0 \leq \eta_0 \leq 1 \text{ a.e. on } \Omega, \\ \theta_0 \in H \text{ with } |\theta_0| \leq \theta^* \text{ a.e. on } \Omega \end{array} \right\}$$

と定める. 同様に

$$D_0 := \left\{ \{\eta_0, \theta_0\} \mid \begin{array}{l} \eta_0 \in H^1 \text{ with } 0 \leq \eta_0 \leq 1 \text{ a.e. on } \Omega, \\ \theta_0 \in H_0^1 \text{ with } |\theta_0| \leq \theta^* \text{ a.e. on } \Omega \end{array} \right\}$$

と定義する.

次に, 問題 (P) に対する解の定義を与える.

定義 2.1. $0 < T < \infty$ とする. 関数 $\eta : [0, T] \rightarrow H$ と $\theta : [0, T] \rightarrow H$ の組 $\{\eta, \theta\}$ が次の条件をみたすとき, $\{\eta, \theta\}$ は初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ をもつ (P) の $[0, T]$ 上の解であるという:

- (i) $\eta \in C([0, T]; H) \cap W_{loc}^{1,2}((0, T]; H) \cap L_{loc}^\infty((0, T]; H^1) \cap L_{loc}^2((0, T]; H^2)$.
- (ii) $\theta \in C([0, T]; H) \cap W_{loc}^{1,2}((0, T]; H) \cap L_{loc}^\infty((0, T]; H_0^1)$, and $|\theta| \leq \theta^*$ a.e. on Q_T .
- (iii) 次の放物型方程式が成立する：

$$\eta'(t) - \kappa \Delta_N \eta(t) + g(\eta(t)) + \alpha'(\eta(t)) |\nabla \theta(t)| = 0 \text{ in } H \text{ for a.e. } t \in (0, T), \quad (2.1)$$

ここで, $\eta' := \frac{d\eta}{dt}$ で, $\Delta_N : D(\Delta_N) := \{z \in H^2; \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \text{ a.e. on } \Gamma\} \rightarrow H$ は齊次ノイマン境界条件をともなうラプラシアンである.

- (iv) 次の変分不等式が成立する：

$$\begin{aligned} & (\alpha_0(\eta(t))\theta'(t), \theta(t) - z) + \nu (\nabla \theta(t), \nabla \theta(t) - \nabla z) \\ & + \int_{\Omega} \alpha(\eta(x, t)) |\nabla \theta(x, t)| dx \leq \int_{\Omega} \alpha(\eta(x, t)) |\nabla z(x)| dx \end{aligned} \quad (2.2)$$

for a.e. $t \in (0, T)$ and all $z \in H_0^1$ with $|z| \leq \theta^*$ a.e. in Ω .

ここで, $\theta' := \frac{d\theta}{dt}$ である.

- (v) $\eta(0) = \eta_0$ and $\theta(0) = \theta_0$ in H .

関数 $\eta : [0, \infty) \rightarrow H$ と $\theta : [0, \infty) \rightarrow H$ の組 $\{\eta, \theta\}$ が (P) の時間大域解であるとは、任意の $T > 0$ に対して $\{\eta, \theta\}$ が (P) の $[0, T]$ 上の解であるときをいう.

さて、変分不等式 (2.2) は次の発展方程式へ帰着できることに注意する (cf. [12, Section 3]):

$$\alpha_0(\eta(t))\theta'(t) + \partial\varphi(\eta(t); \theta(t)) \ni 0 \text{ in } H \text{ for a.e. } t \in (0, T). \quad (2.3)$$

ここで, $\varphi : H \times H \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ は

$$\varphi(w; z) := \begin{cases} \frac{\nu}{2} \|\nabla z\|_H^2 + \int_{\Omega} \alpha(w(x)) |\nabla z(x)| dx + \int_{\Omega} I_{[-\theta^*, \theta^*]}(z(x)) dx & \text{if } z \in H_0^1, \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.4)$$

と定義された関数である. 明らかに, それぞれの $w \in H$ に対し $\varphi(w; \cdot) : H \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ は適正下半連続凸関数である. 従って, $z \in H$ に関する $\varphi(w; z)$ の劣微分 $\partial\varphi(w; z)$ が定義できる. よって, 変分不等式 (2.2) と発展方程式 (2.3) は同値となることが容易にわかる.

また, 問題 (P) の自由エネルギーは

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\eta, \theta) &:= \frac{\kappa}{2} \|\nabla \eta\|_H^2 + \int_{\Omega} \hat{g}(\eta) dx + \frac{\nu}{2} \|\nabla \theta\|_H^2 + \int_{\Omega} \alpha(\eta) |\nabla \theta| dx + \int_{\Omega} I_{[-\theta^*, \theta^*]}(\theta) dx \\ &= \frac{\kappa}{2} \|\nabla \eta\|_H^2 + \int_{\Omega} \hat{g}(\eta) dx + \varphi(\eta; \theta) \end{aligned}$$

であることにも注意する.

問題 (P) の第 2 の方程式が (2.3) へ帰着されることに着目し, [12, 16] において (P) の解の存在と有界性の評価が示された.

命題 2.2 (cf. [12, Theorem 2.2], [16, Theorem 3.1]). (A1)–(A5) を仮定し, T を任意の正数とする. このとき, 定義 2.1 の意味で (P) の $[0, T]$ 上の解 $\{\eta, \theta\}$ が少なくとも 1 つ存在し, η は次をみたす:

$$0 \leq \eta \leq 1 \quad \text{a.e on } Q_T. \quad (2.5)$$

更に, 初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ に依存しない正定数 N_0 が存在し, 次が成立する:

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \mathcal{F}(\eta(\tau), \theta(\tau)) d\tau \leq N_0. \quad (2.6)$$

また, それぞれの正数 $\mu \in (0, 1]$ に対し, 初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ に依存しない正定数 M_μ が存在し, 次が成立する:

$$\|\eta'\|_{L^2(\mu, \infty; H)}^2 + \|\sqrt{\alpha_0(\eta)}\theta'\|_{L^2(\mu, \infty; H)}^2 + \sup_{t \geq \mu} \mathcal{F}(\eta(t), \theta(t)) \leq M_\mu. \quad (2.7)$$

(P) の解の一意性については, [16] で以下のように議論されている:

命題 2.3 (cf. [16, Theorem 2.2]). (A1)–(A4) を仮定し, Ω の空間次元は 1 であるとする. このとき, 任意の初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D_0$ に対し命題 2.2 で得られた (P) の解 $\{\eta, \theta\}$ は一意である.

$\partial I_{[-\theta^*, \theta^*]}(\cdot)$ の項がない結晶粒界数理モデル (P) の解の一意性は [10, Theorem 2.2] において命題 2.3 と同様な仮定の下で示された. $\partial I_{[-\theta^*, \theta^*]}(\theta)$ は θ に関して単調なので, [10, Theorem 2.2] と同様な議論により, 命題 2.3 を示すことができる. 現在, Ω の次元が 2 以上, または, 初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \notin D_0$ の場合, (P) の解の一意性は示されていない. 関数 $\alpha_0(\eta)$ が η に依存しているため, (P) の解の一意性を示すのは非常に困難である. しかし, α_0 が正定数関数ならば, Ω が $\mathbf{R}^N$ ($N \geq 1$) の有界領域でも, 初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ でも, (P) の解の一意性を容易に示すことができる.

次に, 時間 $t \rightarrow \infty$ のときの問題 (P) の解の漸近挙動について述べる.

命題 2.4 (cf. [16, Theorem 4.1]). (A1)–(A5) を仮定し, $\{\eta, \theta\}$ を (P) の時間大域解とする. そして, $t \rightarrow \infty$ のときの $\{\eta(t), \theta(t)\}$ の ω -極限集合を $\omega(\eta, \theta)$ とする, つまり

$$\omega(\eta, \theta) := \left\{ \{\xi, \zeta\} \in H \times H \left| \begin{array}{l} \eta(t_n) \rightarrow \xi \text{ in } H, \theta(t_n) \rightarrow \zeta \text{ in } H \\ \text{for some } t_n \text{ with } t_n \uparrow \infty \end{array} \right. \right\}$$

とする. このとき, $\omega(\eta, \theta) \subset S_0 := \{\{\xi, 0\}; \xi \in D(\Delta_N), -\kappa \Delta_N \xi + g(\xi) = 0 \text{ in } H\}$ となる. ここで, S_0 は (P) の定常解の集合である.

また, [16] では 関数 g の特別な場合を考察し, 以下のような (P) の解の漸近安定性を示した:

命題 2.5 (cf. [16, Theorem 4.2]). (A1)–(A5), 及び,

$$g < 0 \text{ on } [0, 1), \quad g(1) = \hat{g}(1) = 0 \quad (2.8)$$

を仮定する. また, $\{\eta, \theta\}$ を (P) の任意の時間大域解とする. このとき, $\{1, 0\}$ は (P) の一意定常解で

$$\eta(t) \longrightarrow 1 \text{ in } H^1, \quad \theta(t) \longrightarrow 0 \text{ in } H_0^1 \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

となる. また, 収束 (2.9) は初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ に関して一様である.

3 (P) により生成された多価半群に対するアトラクター

この節では, アトラクターの立場から問題 (P) の漸近安定性を考察する. 命題 2.2, 2.3 により, 初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ をもつ (P) の時間大域解の存在は示されたが, 一意性は保証されていないことに注意する. 従って, 本節では解の一意性なしで (P) に対する大域的アトラクターを構成する. つまり, (P) により生成された多価半群に対するアトラクターを構成する.

さて, (P) の多価解作用素の族を $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ で表す. つまり, それぞれの $t \geq 0$ に対し, 多価解作用素 $S(t)$ は任意の初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ に対し次の集合を対応させる:

$$S(t)\{\eta_0, \theta_0\} := \left\{ \{z, w\} \in D \mid \begin{array}{l} \eta(0) = \eta_0, \theta(0) = \theta_0, \eta(t) = z, \theta(t) = w \\ \text{となる (P) の時間大域解 } \{\eta, \theta\} \text{ が存在する} \end{array} \right\}.$$

ここで, (P) の時間大域解は次の *Translation invariance* と *Concatenation invariance* の性質をもつことに注意する:

(i) (*Translation invariance*) $\{\eta, \theta\}$ を (P) の時間大域解とし, $\tau \geq 0$ とする. このとき,

$$\eta^\tau(t) := \eta(\tau + t) \text{ and } \theta^\tau(t) := \theta(\tau + t) \text{ for } t \in [0, \infty)$$

と定義すると, $\{\eta^\tau, \theta^\tau\}$ も (P) の時間大域解となる;

(ii) (*Concatenation invariance*) $\{\eta_1, \theta_1\}, \{\eta_2, \theta_2\}$ を

$$\eta_2(0) = \eta_1(\tau) \text{ and } \theta_2(0) = \theta_1(\tau) \text{ for some } \tau \geq 0$$

となる (P) の時間大域解とする. また, 時間 τ での $\{\eta_1, \theta_1\}$ と $\{\eta_2, \theta_2\}$ の *concatenation* を

$$\eta(t) := \begin{cases} \eta_1(t) & \text{if } t \in [0, \tau], \\ \eta_2(t - \tau) & \text{if } t \in (\tau, \infty), \end{cases}$$

$$\theta(t) := \begin{cases} \theta_1(t) & \text{if } t \in [0, \tau], \\ \theta_2(t - \tau) & \text{if } t \in (\tau, \infty) \end{cases}$$

と定義する. このとき $\{\eta, \theta\}$ は (P) の時間大域解となる.

上記の性質 (i), (ii) を考慮すると, 明らかに次が成り立つ:

(S1) $S(0) = I$ (The identity) on D .

(S2) $S(t+s)\{\eta_0, \theta_0\} = S(t)(S(s)\{\eta_0, \theta_0\})$, $\forall \{\eta_0, \theta_0\} \in D, \forall s, t \in [0, \infty)$.

従って, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ は D 上の多価半群であることがわかる.

また, $S(\cdot)\{\cdot, \cdot\}$ は次のような closedness をもつ.

補題 3.1. $t_n, t \in [0, \infty)$ with $t_n \rightarrow t$, $\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\} \in D$, $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ with $\eta_{0n} \rightarrow \eta_0$ in H , $\theta_{0n} \rightarrow \theta_0$ in H (as $n \rightarrow \infty$) と仮定する. また, $n \rightarrow \infty$ のとき $\{z_n, w_n\} \in S(t_n)\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\}$ は $\{z, w\}$ に $H \times H$ の位相で収束するとする. このとき, $\{z, w\} \in S(t)\{\eta_0, \theta_0\}$ となる.

証明. $t_n \rightarrow t$ (as $n \rightarrow \infty$) なので, 一般性を失うことなく, $t, t_n \in [0, T]$ ($n \in \mathbb{N}$) となる有限時間 $T > 0$ が存在すると仮定してよい.

$\{z_n, w_n\} \in S(t_n)\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\}$ なので,

$$\eta_n(t_n) = z_n, \quad \theta_n(t_n) = w_n, \quad \eta_n(0) = \eta_{0n}, \quad \theta_n(0) = \theta_{0n} \quad (3.1)$$

となる (P) の時間大域解 $\{\eta_n, \theta_n\}$ が存在する.

また, 命題 2.2 の (2.7) より, 任意の正数 $\mu \in (0, 1]$ に対し, 初期値 $\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\} \in D$ に依存しない正定数 M_μ が存在し

$$\|\eta'_n\|_{L^2(\mu, \infty; H)}^2 + \|\sqrt{\alpha_0(\eta_n)}\theta'_n\|_{L^2(\mu, \infty; H)}^2 + \sup_{t \geq \mu} \mathcal{F}(\eta_n(t), \theta_n(t)) \leq M_\mu$$

となる. このとき, [12, Section 5] での同様な議論により, つまり, μ に関する対角線論法により, $n_k \rightarrow \infty$ (as $k \rightarrow \infty$),

$$\eta_{n_k} \rightarrow \eta \text{ in } C([0, T]; H), \quad \theta_{n_k} \rightarrow \theta \text{ in } C([0, T]; H) \quad \text{as } k \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

となる部分列 $\{n_k\} \subset \{n\}$ と関数 $\eta \in C([0, T]; H) \cap W_{loc}^{1,2}((0, T]; H) \cap L_{loc}^\infty((0, T]; H^1) \cap L_{loc}^2((0, T]; H^2)$, $\theta \in C([0, T]; H) \cap W_{loc}^{1,2}((0, T]; H) \cap L_{loc}^\infty((0, T]; H_0^1)$ が存在する. 更に, $\{\eta, \theta\}$ は初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ をもつ (P) の時間大域解となることが容易にわかる.

さて, $z = \eta(t)$, $w = \theta(t)$ であること, つまり, $\{z, w\} \in S(t)\{\eta_0, \theta_0\}$ であることを示す. ε を任意の正定数とすると, $\eta \in C([0, T]; H)$, $t_{n_k} \rightarrow t$ as $k \rightarrow \infty$ なので,

$$\|\eta(t_{n_k}) - \eta(t)\|_H \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall k \geq K_{1\varepsilon} \quad (3.3)$$

となる番号 $K_{1\varepsilon} \in \mathbb{N}$ が存在する.

一方, (3.2) から

$$\|\eta_{n_k} - \eta\|_{C([0, T]; H)} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall k \geq K_{2\varepsilon} \quad (3.4)$$

となる番号 $K_{2\varepsilon} \in \mathbb{N}$ が存在する.

更に, $z_{n_k} \rightarrow z$ in H as $k \rightarrow \infty$ なので,

$$\|z - z_{n_k}\|_H \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall k \geq K_{3\varepsilon} \quad (3.5)$$

となる番号 $K_{3\varepsilon} \in \mathbb{N}$ が存在する. 従って, (3.1)–(3.5) から以下をえる:

$$\begin{aligned}
 \|z - \eta(t)\|_H &\leq \|z - z_{n_k}\|_H + \|z_{n_k} - \eta(t_{n_k})\|_H + \|\eta(t_{n_k}) - \eta(t)\|_H \\
 &= \|z - z_{n_k}\|_H + \|\eta_{n_k}(t_{n_k}) - \eta(t_{n_k})\|_H + \|\eta(t_{n_k}) - \eta(t)\|_H \\
 &\leq \|z - z_{n_k}\|_H + \|\eta_{n_k} - \eta\|_{C([0,T];H)} + \|\eta(t_{n_k}) - \eta(t)\|_H \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \forall k \geq K_{1\varepsilon} + K_{2\varepsilon} + K_{3\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

ε は任意なので, 上記より $z = \eta(t)$ であることがわかる. また, 同様な議論により $w = \theta(t)$ となるので, $\{z, w\} \in S(t)\{\eta_0, \theta_0\}$ をえる. 従って, 補題 3.1 が証明された. $\square$

Remark 3.2. 補題 3.1 により, それぞれの $t \geq 0$ に対し, 多価解作用素 $S(t)\{\cdot, \cdot\}$ は D 上で上半連続であることが容易にわかる. 上半連続写像の定義や性質に関しては, [1, 4] を参照する.

更に, 以下のような多価半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ の性質が成り立つ.

補題 3.3. (A1)–(A5) を仮定する. このとき, 次が成立する:

(i) それぞれの正数 $\mu \in (0, 1]$ に対して, $\mathcal{F}(\eta(t), \theta(t))$ は任意の $t \geq \mu$ と (P) の任意の解 $\{\eta(t), \theta(t)\} \in S(t)D$ に対して有界である.

(ii) 次をみたすコンパクトな凸集合 $B_0 \subset D$ が存在する:

$$\sup_{\{z, w\} \in B_0} \mathcal{F}(z, w) < \infty \quad \text{and} \quad S(t)D \subset B_0 \quad \text{for all } t \geq 1. \quad (3.6)$$

証明. 評価式 (2.7) は (P) の任意の時間大域解 $\{\eta, \theta\}$ に対して成り立ち, また, (2.7) の定数 M_μ は初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ に依存しないことに注意する. 従って, 主張 (i) は (2.7) から従う.

次に (ii) を示す. 実際, $B_0 := \overline{\text{conv}}(S(1)D)$ とすればよい. ここで, $\overline{\text{conv}}(\cdot)$ は $(\cdot)$ の凸包の $H \times H$ 位相における閉包を表す.

さて, (2.7) で $\mu = 1$ とすると

$$\sup_{\{z, w\} \in S(1)D} \mathcal{F}(z, w) \leq M_1$$

となるので, $S(1)D$ は $H \times H$ で相対コンパクトである. 従って, B_0 は $H \times H$ でコンパクトな凸集合である.

ここで, (2.5) と θ の制約 (cf. $\partial I_{[-\theta^*, \theta^*]}(\cdot)$) から, 任意の $t \geq 0$ に対し $S(t)D \subset D$ なることに注意する. 従って, 半群の性質 (S2) から

$$S(t+1)D = S(1)S(t)D \subset S(1)D \subset B_0, \quad \forall t \geq 0$$

となり, (3.6) が成立する. 以上より, 主張 (ii) が成り立つ. $\square$

さて、本稿の主定理を述べる.

定理 3.4 ((P) の大域的アトラクターの存在). (A1)–(A4) を仮定する. このとき, 次をみたす D の部分集合 $\mathcal{A}_\infty$ が存在する:

- (i) $\mathcal{A}_\infty$ は $H \times H$ の空でないコンパクト部分集合である;
- (ii) それぞれの正数 $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\text{dist}_{H \times H}(S(t)\{z, w\}, \mathcal{A}_\infty) < \varepsilon \quad \text{for all } \{z, w\} \in D \text{ and } t \geq T_\varepsilon$$

となる $T_\varepsilon > 0$ が存在する;

- (iii) $S(t)\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_\infty$ for any $t \geq 0$.

定理 3.4 の (i)–(iii) が成立するとき, $\mathcal{A}_\infty$ を多価半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ に対する大域的アトラクターとよぶ. 大域的アトラクター $\mathcal{A}_\infty$ が存在するならば, 明らかに $\mathcal{A}_\infty$ は一意である.

定理 3.4 の証明. 補題 3.1, 3.3 を考慮すると, [8, 23] と同様な手法により多価半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ に対する大域的アトラクター $\mathcal{A}_\infty$ を構成することができる. 実際, $\mathcal{A}_\infty$ は

$$\mathcal{A}_\infty := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)B_0} \quad (3.7)$$

で与えられる. ここで, B_0 は補題 3.3 の (ii) でえられたコンパクト吸収集合である.

Babin [2] や Melnik and Valero [22] は multivalued semiflow に対する大域的アトラクターの抽象論を既に構築している. 従って, [2, 22] の抽象論を応用すれば, (P) に対するアトラクターを構成することはできる. しかしながら, 抽象論 [2, 22] で構成されたアトラクターは一般的に multivalued semiflow に対し semi-invariant (cf. (3.14)) である. また, 抽象論 [22] におけるアトラクターの構成方法は, (3.7) と異なる. 従って, 集合 $\mathcal{A}_\infty$ が多価半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ に対する大域的アトラクターとなることを明確にするため, $\mathcal{A}_\infty$ は定理 3.4 の (i)–(iii) を満たすことを以下で示す.

(P) の時間大域解の存在 (cf. 命題 2.2) と B_0 のコンパクト性から, 明らかに $\mathcal{A}_\infty$ は $H \times H$ の空でないコンパクト部分集合である. 従って, 定理 3.4 の (i) は成立する.

次に (ii) を示す. B_0 は吸収集合なので

$$\text{dist}_{H \times H}(S(t)B_0, \mathcal{A}_\infty) \longrightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

を示せばよい.

背理法により (3.8) を示す. 集合 $\mathcal{A}_\infty$ は B_0 を引きつけないと仮定すると,

$$\|\{z_n, w_n\} - \{x, y\}\|_{H \times H} \geq \sigma_0, \quad \forall \{x, y\} \in \mathcal{A}_\infty \quad (3.9)$$

となる定数 $\sigma_0 > 0$ と列 $\{t_n\} \subset [0, \infty)$ with $t_n \geq n$, $\{\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\}\} \subset B_0$, $\{\{z_n, w_n\}\} \subset H \times H$ with $\{z_n, w_n\} \in S(t_n)\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\}$ が存在する.

B_0 は $H \times H$ のコンパクト吸収集合なので, (3.6) から

$$S(t)B_0 \subset B_0, \quad \forall t \geq 1$$

となる. 従って,

$$\{\{z_n, w_n\} \in H \times H; \{z_n, w_n\} \in S(t_n)\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\}, n = 1, 2, \dots\}$$

は $H \times H$ で相対コンパクトである. よって, $n_k \rightarrow \infty$ (as $k \rightarrow \infty$),

$$\{z_{n_k}, w_{n_k}\} \rightarrow \{z, w\} \text{ in } H \times H \text{ as } k \rightarrow \infty$$

となる部分列 $\{n_k\} \subset \{n\}$ と元 $\{z, w\} \in H \times H$ が存在する.

$\{z_{n_k}, w_{n_k}\} \in S(t_{n_k})\{\eta_{0n_k}, \theta_{0n_k}\}$, $\{\{\eta_{0n_k}, \theta_{0n_k}\}\} \subset B_0$ なので, $\mathcal{A}_\infty$ の定義 (3.7) から

$$\{z, w\} \in \mathcal{A}_\infty$$

となり, (3.9) に矛盾する. 従って, $\mathcal{A}_\infty$ はコンパクト吸収集合 B_0 を引きつけるので, 定理 3.4 の (ii) が成り立つ.

最後に (iii) を示す. まず, 任意の $t \geq 0$ に対し $\mathcal{A}_\infty \subset S(t)\mathcal{A}_\infty$ であることを示す. $\{z, w\}$ を $\mathcal{A}_\infty$ の任意の元とすると,

$$t_n \uparrow \infty \text{ and } \{z_n, w_n\} \longrightarrow \{z, w\} \text{ in } H \times H \text{ as } n \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

となる列 $\{t_n\} \subset [0, \infty)$, $\{\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\}\} \subset B_0$, $\{\{z_n, w_n\}\} \subset H \times H$ with $\{z_n, w_n\} \in S(t_n)\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\}$ が存在する. ここで, B_0 は

$$S(\tau)B_0 \subset B_0, \quad \forall \tau \geq 1 \quad (3.11)$$

となる $H \times H$ のコンパクトな吸収部分集合であることに注意する.

任意の $t \geq 0$ に対し, 半群の性質 (S2) から

$$\{z_n, w_n\} \in S(t)S(t_n - t)\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\} \quad \text{for any } n \in \mathbb{N} \text{ with } t_n \geq t + 1$$

となるので,

$$\{z_n, w_n\} \in S(t)\{\tilde{z}_n, \tilde{w}_n\} \quad (3.12)$$

となる元 $\{\tilde{z}_n, \tilde{w}_n\} \in S(t_n - t)\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\}$ が存在する. このとき, (3.11) から

集合 $\{\{\tilde{z}_n, \tilde{w}_n\} \in H \times H; n \in \mathbb{N} \text{ with } t_n \geq t + 1\}$ は $H \times H$ で相対コンパクト

であることがわかるので, $n_k \rightarrow \infty$ (as $k \rightarrow \infty$),

$$\{\tilde{z}_{n_k}, \tilde{w}_{n_k}\} \rightarrow \{\tilde{z}, \tilde{w}\} \text{ in } H \times H \text{ as } k \rightarrow \infty \quad (3.13)$$

となる部分列 $\{n_k\} \subset \{n\}$ と元 $\{\tilde{z}, \tilde{w}\} \in H \times H$ が存在する. このとき, $\mathcal{A}_\infty$ の定義 (3.7) から明らかに $\{\tilde{z}, \tilde{w}\} \in \mathcal{A}_\infty$ となる.

更に, 補題 3.1 と (3.10)–(3.13) より (必要があれば $\{n_k\}$ の部分列をとることにより),

$$\{z, w\} \in S(t)\{\tilde{z}, \tilde{w}\}$$

となる. 従って, $\{z, w\} \in S(t)\mathcal{A}_\infty$ となるので

$$\mathcal{A}_\infty \subset S(t)\mathcal{A}_\infty, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.14)$$

をえる.

次に, 任意の $t \geq 0$ に対し $S(t)\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{A}_\infty$ であることを示す. (3.14) より任意の $t \geq 0$ に対し

$$S(t)\mathcal{A}_\infty \subset S(t)(S(\tau)\mathcal{A}_\infty) = S(t+\tau)\mathcal{A}_\infty, \quad \forall \tau \geq 0 \quad (3.15)$$

となる.

さて, $\{z, w\}$ を $S(t)\mathcal{A}_\infty$ の任意の元とすると, (3.15) より

$$\{z, w\} \in S(t+\tau_n)\{z_n, w_n\}$$

となる列 $\{\tau_n\} \subset [0, \infty)$ with $\tau_n \geq n$ と $\{\{z_n, w_n\}\} \subset \mathcal{A}_\infty$ が存在する. $\mathcal{A}_\infty$ の定義 (3.7) から明らかに $\mathcal{A}_\infty \subset B_0$ なので, 定理 3.4 の (ii) から

$$\{z, w\} \in \mathcal{A}_\infty$$

となる. よって,

$$S(t)\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{A}_\infty \text{ for any } t \geq 0$$

をえる. 以上より, 定理 3.4 の (iii) が従う. □

4 (P) に対する大域的アトラクターの特徴づけ

前節において (P) に対する大域的アトラクター $\mathcal{A}_\infty$ の存在を示した. しかし, 解作用素 $S(t)$ は多価なので, 任意の $t \geq 0$ と $\{z, w\} \in D$ に対し $S(t)\{z, w\}$ が連結であることを示すのは困難である. 従って, $\mathcal{A}_\infty$ の連結性については示されていないことに注意する.

この節では, (P) に対する大域的アトラクター $\mathcal{A}_\infty$ の特徴づけを行う. そのため, 以下の Allen-Cahn 方程式 (AC) を考える:

$$(AC) \begin{cases} u_t - \kappa \Delta u + g(u) = 0 & \text{in } Q_T = \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \Sigma_T = \Gamma \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{for } x \in \Omega. \end{cases}$$

ここで, (AC) の初期値の集合を

$$D_* := \{u_0 \mid u_0 \in H \text{ with } 0 \leq u_0 \leq 1 \text{ a.e. on } \Omega\}$$

と定義する.

次に, (AC) の解の定義を与える.

定義 4.1. $0 < T < \infty$ とし, $u_0 \in D_*$ とする. 関数 $u : [0, T] \rightarrow H$ が次の条件をみたすとき, u は初期値 $u_0 \in D_*$ をもつ (AC) の $[0, T]$ 上の解であるという:

$$(i) \ u \in C([0, T]; H) \cap W_{loc}^{1,2}((0, T]; H) \cap L_{loc}^\infty((0, T]; H^1) \cap L_{loc}^2((0, T]; H^2).$$

(ii) 次の放物型方程式が成立する:

$$u'(t) - \kappa \Delta_N u(t) + g(u(t)) = 0 \text{ in } H \text{ for a.e. } t \in (0, T). \quad (4.1)$$

ここで, $u' := \frac{du}{dt}$ である.

(iii) $u(0) = u_0$ in H .

関数 $u : [0, \infty) \rightarrow H$ が (AC) の時間大域解であるとは, 任意の $T > 0$ に対して u が (AC) の $[0, T]$ 上の解であるときをいう.

次に, (AC) の解の存在・一意性について述べる.

命題 4.2 (cf. [3, 13]). (A3) を仮定し, T を任意の正数とする. このとき, 任意の $u_0 \in D_*$ に対し, (AC) の $[0, T]$ 上の解 u が一意に存在し

$$0 \leq u \leq 1 \quad \text{a.e. on } Q_T \quad (4.2)$$

となる. 更に, 初期値 $u_0 \in D_*$ に依存しない定数 $\tilde{N}_0$ が存在して

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|\nabla u(\tau)\|_H^2 d\tau \leq \tilde{N}_0 \quad (4.3)$$

が成り立つ. また, それぞれの正数 $\mu \in (0, 1]$ に対し, 初期値 $u_0 \in D_*$ に依存しない定数 $\tilde{M}_\mu$ が存在して, 次が成り立つ:

$$\|u'\|_{L^2(\mu, \infty; H)}^2 + \sup_{t \geq \mu} \|\nabla u(t)\|_H^2 \leq \tilde{M}_\mu. \quad (4.4)$$

証明. 非線形発展方程式理論 (cf. [3, 13]) を適用することにより, 容易に (AC) の $[0, T]$ 上の解 u が一意に存在することがわかる. また, (2.5)–(2.7) と同様な議論により, (4.2)–(4.4) を示すことができる. 実際, 有界性 (4.2) に関しては [10, Proposition 3.1] を, (4.3)–(4.4) の証明に関しては [13, Corollarys 1 and 2] や [16, Theorem 3.1] を参照する. $\square$

命題 4.2 により, (AC) の解作用素の族 $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ を定義することができる. 実際, それぞれの $t \geq 0$ に対し, 一価解作用素 $U(t) : D_* \rightarrow D_*$ を

$$U(t)u_0 = u(t), \quad u_0 \in D_* \quad (4.5)$$

と定義する. ここで, u は初期値 $u_0 \in D_*$ をもつ (AC) の時間大域一意解である. 明らかに, $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ は D_* 上の一価半群である.

ここで, 半群 $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ に対する大域的アトラクターの存在について述べる.

命題 4.3 (cf. [13, Theorem 4.1]). (A3) を仮定する. このとき, 次をみたす D_* の部分集合 $\mathcal{A}_*$ が存在する:

(i) $\mathcal{A}_*$ は H の空でないコンパクトな連結部分集合である;

(ii) それぞれの正数 $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\text{dist}_H(U(t)z, \mathcal{A}_*) < \varepsilon \quad \text{for all } z \in D_* \text{ and } t \geq T_\varepsilon$$

となる $T_\varepsilon > 0$ が存在する;

(iii) $U(t)\mathcal{A}_* = \mathcal{A}_*$ for any $t \geq 0$.

証明. 命題 4.2 により, (AC) は一意解をもつので $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ は D_* 上の一価半群である. (4.2)–(4.4) の性質により, (AC) に対しアトラクターの一般論 (cf. [8, 13, 23]) を直接適用することができるので, $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ に対する大域的アトラクター $\mathcal{A}_*$ を構成することができる. 実際, $B_* := \overline{\text{conv}}(U(1)D_*)$ は H のコンパクトな吸収部分集合となるので (cf. 補題 3.3, (ii)), $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ に対する大域的アトラクター $\mathcal{A}_*$ は

$$\mathcal{A}_* := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} U(t)B_*}$$

で与えられる. □

さて, 定理 3.4 でえた (P) の大域的アトラクター $\mathcal{A}_\infty$ の特徴について述べる.

定理 4.4. (A1)–(A4) を仮定し, $\mathcal{A}_\infty$ を定理 3.4 でえられた (P) の大域的アトラクターとする. また, $\mathcal{A}_*$ を命題 4.3 でえられた (AC) の大域的アトラクターとする. このとき, $\mathcal{A}_* \times \{0\} \subset \mathcal{A}_\infty$ となる. 更に, α_0 は正定数関数であるとする, つまり $\alpha_0 \equiv c_0$ for some constant $c_0 > 0$ と仮定すると $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_* \times \{0\}$ となる.

定理 4.5. (A1)–(A4), (2.8) を仮定し, $\mathcal{A}_\infty$ を定理 3.4 でえられた (P) の大域的アトラクターとする. また, $\mathcal{A}_*$ を命題 4.3 でえられた (AC) の大域的アトラクターとする. このとき, $\mathcal{A}_* = \{1\}$, $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_* \times \{0\} = \{1\} \times \{0\}$ となる.

定理 4.4 を証明する準備として, 次の補題を用意する.

補題 4.6. 定理 4.4 の条件をすべて仮定する. また, T を任意の正数とし, $\{\eta, \theta\}$ を (P) の任意の時間大域解とする. このとき,

$$\int_0^T \|\nabla \theta(t+s)\|_H^2 ds \longrightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (4.6)$$

となり, また, 収束 (4.6) は任意の初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ に関して一様である.

証明. 背理法により (4.6) を示す. (4.6) が成立しないと仮定すると, ある正定数 $\sigma_0 > 0$ に対し

$$\int_0^T \|\nabla \theta_n(t_n+s)\|_H^2 ds \geq \sigma_0 \quad (4.7)$$

となる (P) の時間大域解の列 $\{\{\eta_n, \theta_n\}\}$ と時間列 $\{t_n\} \subset [0, \infty)$ with $t_n \geq n$ ($n = 1, 2, \dots$) が存在する.

ここで, (P) の解の平滑化効果 (cf. (2.7)) を考慮すると, $\{\eta_n, \theta_n\}$ は初期値 $\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\} \in D_0$ をもつ (P) の時間大域解であると仮定してよい. また, $\{\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\}\}$ は $H^1 \times H_0^1$ で有界であると仮定してもよいので (cf. (2.7)),

$$\begin{aligned} \eta_{0n} &\longrightarrow \eta_0 \text{ weakly in } H^1 \text{ and weakly}^* \text{ in } L^\infty \text{ as } n \rightarrow \infty, \\ \theta_{0n} &\longrightarrow \theta_0 \text{ weakly in } H_0^1 \text{ and weakly}^* \text{ in } L^\infty \text{ as } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

となる $\{\eta_0, \theta_0\} \in D_0$ が存在する. このとき, [12, Section 5] と同様な議論により, $n_k \rightarrow \infty$ as $k \rightarrow \infty$, かつ, 任意の時間 $T > 0$ に対し

$$\begin{aligned} \eta_{n_k} &\rightarrow \eta \quad \text{in } C([0, T]; H), \text{ in } L^2(0, T; H^1), \text{ weakly in } L^2(0, T; H^2), \\ &\quad \text{weakly in } W^{1,2}(0, T; H), \text{ weakly}^* \text{ in } L^\infty(0, T; H^1), \\ &\quad \text{and weakly}^* \text{ in } L^\infty(Q_T) \quad \text{as } k \rightarrow \infty, \\ \theta_{n_k} &\rightarrow \theta \quad \text{in } C([0, T]; H), \text{ in } L^2(0, T; H_0^1), \text{ weakly in } W^{1,2}(0, T; H), \\ &\quad \text{weakly}^* \text{ in } L^\infty(0, T; H_0^1) \text{ and weakly}^* \text{ in } L^\infty(Q_T) \quad \text{as } k \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる部分列 $\{n_k\} \subset \{n\}$ と初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D_0$ をもつ (P) の時間大域解 $\{\eta, \theta\}$ が存在する. 明らかに $\eta \in C([0, T]; H^1) \cap W^{1,2}(0, T; H) \cap L^2(0, T; H^2) \cap L^\infty(0, T; H^1) \cap L^\infty(Q_T)$, $\theta \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; H_0^1) \cap L^\infty(Q_T)$ である.

さて, ε を $\varepsilon < \left(\frac{\nu\sigma_0}{8c_0}\right)^{1/2}$ となる任意の正数とする. このとき, 命題 2.4 より

$$\|\theta(t)\|_H < \varepsilon \quad \text{for all } t \geq T_\varepsilon \quad (4.9)$$

となる有限時間 $T_\varepsilon > 0$ が存在する. また, (4.8) より

$$\sup_{\tau \in [0, T_\varepsilon]} \|\theta_{n_k}(\tau) - \theta(\tau)\|_H < \varepsilon, \quad \forall k \geq K_\varepsilon \quad (4.10)$$

となる番号 $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在する.

ここで, α_0 は正定数関数であるとする, つまり, $\alpha_0 \equiv c_0$ for some constant $c_0 > 0$ と仮定する. $\{\eta_{n_k}, \theta_{n_k}\}$ は (P) の時間大域解なので, 次の不等式が成り立つ (cf. (2.3)):

$$\begin{aligned} (c_0 \theta'_{n_k}(\tau), \theta_{n_k}(\tau) - v) + \varphi(\eta_{n_k}(\tau); \theta_{n_k}(\tau)) &\leq \varphi(\eta_{n_k}(\tau); v) \\ \text{for a.e. } \tau > 0 \text{ and any } v &\in H_0^1 \end{aligned}$$

上の不等式において $v = 0$ とすると

$$\frac{c_0}{2} \frac{d}{d\tau} \|\theta_{n_k}(\tau)\|_H^2 + \varphi(\eta_{n_k}(\tau); \theta_{n_k}(\tau)) \leq 0 \quad \text{for a.e. } \tau > 0$$

となるので, τ に関して $[s, t]$ ($0 \leq s \leq t$) 上で積分すると

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{2} \|\theta_{n_k}(t)\|_H^2 + \int_s^t \varphi(\eta_{n_k}(\tau); \theta_{n_k}(\tau)) d\tau &\leq \frac{c_0}{2} \|\theta_{n_k}(s)\|_H^2 \\ \text{for any } 0 \leq s &\leq t \end{aligned} \quad (4.11)$$

をえる. 従って, (4.11) から $\|\theta_{n_k}(t)\|_H$ は時間 $t > 0$ に関して非増加であることがわかる. よって, (4.9)–(4.10) から

$$\begin{aligned} \|\theta_{n_k}(t)\|_H &\leq \|\theta_{n_k}(T_\varepsilon)\|_H \\ &\leq \sup_{\tau \in [0, T_\varepsilon]} \|\theta_{n_k}(\tau) - \theta(\tau)\|_H + \|\theta(T_\varepsilon)\|_H \\ &\leq 2\varepsilon, \quad \forall t \geq T_\varepsilon, \forall k \geq K_\varepsilon \end{aligned}$$

となるので, $t_{n_k} \geq T_\varepsilon$ となる十分大きな番号 k ($\geq K_\varepsilon$) に対して

$$\|\theta_{n_k}(t_{n_k})\|_H \leq 2\varepsilon \quad (4.12)$$

となる.

ここで, (4.12) をみたす時間の列を $\{t_{n_k}\}$ とする. (4.11) において, $s = t_{n_k}$, $t = t_{n_k} + T$ とすると

$$\frac{c_0}{2} \|\theta_{n_k}(t_{n_k} + T)\|_H^2 + \int_{t_{n_k}}^{t_{n_k} + T} \varphi(\eta_{n_k}(\tau); \theta_{n_k}(\tau)) d\tau \leq \frac{c_0}{2} \|\theta_{n_k}(t_{n_k})\|_H^2 \quad (4.13)$$

となる. 従って, (2.4), (4.12), (4.13) から, $t_{n_k} \geq T_\varepsilon$ となる十分大きな番号 k ($\geq K_\varepsilon$) に対して

$$\int_0^T \|\nabla \theta_{n_k}(t_{n_k} + s)\|_H^2 ds \leq \frac{4c_0}{\nu} \varepsilon^2 < \frac{\sigma_0}{2} \quad (4.14)$$

をえる. これは (4.7) に矛盾する. よって, (4.6) が成立する. $\square$

補題 4.7. 定理 4.4 の条件をすべて仮定する. また, T を任意の正数とする. このとき, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, 次が成立するような時間 $t^* = t^*(T, \varepsilon) \geq 1$ が存在する:

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in [0, T]} \|\eta(\tau + t) - U(\tau)\eta(t)\|_H &\leq \varepsilon \\ \text{for all } t &\geq t^* \text{ and all global (in time) solutions } \{\eta, \theta\} \text{ to (P).} \end{aligned} \quad (4.15)$$

証明. 背理法により (4.15) を示す. (4.15) が成立しないと仮定すると, ある正定数 $\varepsilon_0 > 0$ に対し

$$\sup_{\tau \in [0, T]} \|\eta_n(\tau + t_n) - U(\tau)\eta_n(t_n)\|_H \geq \varepsilon_0 \quad (4.16)$$

となる (P) の時間大域解の列 $\{\{\eta_n, \theta_n\}\}$ と時間の列 $\{t_n\} \subset [0, \infty)$ with $t_n \geq n$ ($n = 1, 2, \dots$) が存在する.

有界性の評価 (2.5) と (2.7) より, $\{\eta_n(t_n); n = 1, 2, \dots\}$ は H で相対コンパクトであることがわかる. 従って, $n_k \rightarrow \infty$ as $k \rightarrow \infty$ で

$$\eta_{n_k}(t_{n_k}) \longrightarrow \tilde{\eta}_0 \text{ in } H, \text{ weakly in } H^1 \text{ and weakly* in } L^\infty \text{ as } k \rightarrow \infty \quad (4.17)$$

となる部分列 $\{n_k\} \subset \{n\}$ と元 $\tilde{\eta}_0 \in D_*$ が存在する.

ここで, 以下の2つの初期値問題を考える:

$$\begin{cases} u'_{n_k}(\tau) - \kappa \Delta_N u_{n_k}(\tau) + g(u_{n_k}(\tau)) = 0 & \text{in } H \text{ for a.e. } \tau \in (0, T), \\ u_{n_k}(0) = \eta_{n_k}(t_{n_k}) & \text{in } H, \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} u'(\tau) - \kappa \Delta_N u(\tau) + g(u(\tau)) = 0 & \text{in } H \text{ for a.e. } \tau \in (0, T), \\ u(0) = \tilde{\eta}_0 & \text{in } H. \end{cases} \quad (4.19)$$

このとき, (4.17) に注意すると, 解の収束定理 (cf. [14, Section 2.7]) より (4.18) の解 u_{n_k} は (4.19) の解 u に

$$\sup_{\tau \in [0, T]} \|u_{n_k}(\tau) - u(\tau)\|_H \longrightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow \infty \quad (4.20)$$

の意味で収束する.

次に, (P) の第1の方程式

$$\begin{cases} \eta'_{n_k}(\tau) - \kappa \Delta_N \eta_{n_k}(\tau) + g(\eta_{n_k}(\tau)) + \alpha'(\eta_{n_k}(\tau)) |\nabla \theta_{n_k}(\tau)| = 0 & \text{in } H \\ \eta_{n_k}(0) = \eta_{0n_k} & \text{in } H \end{cases} \quad \text{for a.e. } \tau > 0, \quad (4.21)$$

を考える. このとき, (4.19) と (4.21) から

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|\eta_{n_k}(\tau + t_{n_k}) - u(\tau)\|_H^2 + \kappa \|\nabla \eta_{n_k}(\tau + t_{n_k}) - \nabla u(\tau)\|_H^2 \\ & \leq L(g) \|\eta_{n_k}(\tau + t_{n_k}) - u(\tau)\|_H^2 \\ & \quad + |(\alpha'(\eta_{n_k}(\tau + t_{n_k})) |\nabla \theta_{n_k}(\tau + t_{n_k})|, \eta_{n_k}(\tau + t_{n_k}) - u(\tau))| \\ & \quad \text{for a.e. } \tau \geq 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

となる. ここで, $\alpha'(\cdot)$ の有界性 (cf. (A2)) と (4.22) から

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \|\eta_{n_k}(\tau + t_{n_k}) - u(\tau)\|_H^2 \\ & \leq (2L(g) + 1) \|\eta_{n_k}(\tau + t_{n_k}) - u(\tau)\|_H^2 + C_{\alpha'} \|\nabla \theta_{n_k}(\tau + t_{n_k})\|_H^2 \\ & \quad \text{for a.e. } \tau > 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

となる. ここで, $C_{\alpha'}$ は $\alpha'(\cdot)$ に依存する正定数である. (4.23) に Gronwall-type 不等式を適用すると

$$\begin{aligned} & \sup_{\tau \in [0, T]} \|\eta_{n_k}(\tau + t_{n_k}) - u(\tau)\|_H^2 \\ & \leq e^{(2L(g)+1)T} \left(\|\eta_{n_k}(t_{n_k}) - \tilde{\eta}_0\|_H^2 + C_{\alpha'} \int_0^T \|\nabla \theta_{n_k}(\tau + t_{n_k})\|_H^2 d\tau \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

をえる. 補題 4.6 の証明から (cf. (4.14)), 任意の正数 σ に対し,

$$\int_0^T \|\nabla \theta_{n_k}(\tau + t_{n_k})\|_H^2 d\tau < \sigma \quad \text{for sufficient large } k \in \mathbf{N}$$

となるので, (4.17) と (4.24) から

$$\sup_{\tau \in [0, T]} \|\eta_{n_k}(\tau + t_{n_k}) - u(\tau)\|_H^2 \longrightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow \infty \quad (4.25)$$

となる. 従って, (4.20) と (4.25) から

$$\sup_{\tau \in [0, T]} \|\eta_{n_k}(\tau + t_{n_k}) - u_{n_k}(\tau)\|_H^2 \longrightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

となる. $u_{n_k}(\tau) = U(\tau)\eta_{n_k}(t_{n_k})$ であるので, これは (4.16) に矛盾する. よって, (4.15) は成り立つ. $\square$

定理 4.4 の証明. まず $\mathcal{A}_* \times \{0\} \subset \mathcal{A}_\infty$ を示す. $\{\xi, 0\}$ を $\mathcal{A}_* \times \{0\}$ の任意の元とすると

$$U(t_n)\eta_{0n} \longrightarrow \xi \quad \text{in } H \text{ as } n \rightarrow \infty \quad (4.26)$$

となる列 $\{\eta_{0n}\} \subset B_*(\subset D_*)$ と列 $\{t_n\} \subset [0, \infty)$ with $t_n \geq n$ ($n = 1, 2, \dots$) が存在する.

ここで, 任意の $t \geq 0$ に対し $\eta_n(t) := U(t)\eta_{0n}$ とおくと, η_n は

$$\begin{cases} \eta'_n(t) - \kappa \Delta_N \eta_n(t) + g(\eta_n(t)) + \alpha'(\eta_n(t))|\nabla 0| = 0 & \text{in } H \text{ for a.e. } t > 0, \\ \eta_n(0) = \eta_{0n} & \text{in } H \end{cases} \quad (4.27)$$

をみたすことに注意する. また, 0 は

$$\partial \varphi(\eta_n(t); 0) \ni 0 \quad \text{in } H \text{ for a.e. } t > 0 \quad (4.28)$$

をみたすので, 0 は方程式 (2.3) の定常解であることにも注意する. 従って, (4.27) と (4.28) より, $\{\eta_n(t), 0\} = \{U(t)\eta_{0n}, 0\}$ は初期値 $\{\eta_{0n}, 0\} \in D_0$ をもつ (P) の時間大域解とみなすことができるので,

$$S(t_n)\{\eta_{0n}, 0\} \ni \{U(t_n)\eta_{0n}, 0\}$$

となる.

半群の性質 (S2) から, $S(t_n)\{\eta_{0n}, 0\} = S(t_n - 1)S(1)\{\eta_{0n}, 0\}$ となるので,

$$\{U(t_n)\eta_{0n}, 0\} \in S(t_n - 1)\{\tilde{\eta}_n, \tilde{\theta}_n\} \quad \text{and} \quad \{\tilde{\eta}_n, \tilde{\theta}_n\} \in S(1)\{\eta_{0n}, 0\}$$

となる列 $\{\{\tilde{\eta}_n, \tilde{\theta}_n\}\} \subset B_0$ が存在する. 従って, (3.7), (4.26) から

$$\{\xi, 0\} \in \mathcal{A}_\infty = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)B_0}$$

となるので, $\mathcal{A}_* \times \{0\} \subset \mathcal{A}_\infty$ が成り立つ.

次に $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{A}_* \times \{0\}$ を示す. そのため, α_0 は正定数関数であるとする, つまり, $\alpha_0 \equiv c_0$ for some constant $c_0 > 0$ と仮定する. このとき, (P) の時間大域解は一意的であることに注意する.

$\{\xi, \zeta\}$ を $\mathcal{A}_\infty$ の任意の元とすると, $\mathcal{A}_\infty$ の定義 (3.7) から

$$S(t_n)\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\} \longrightarrow \{\xi, \zeta\} \quad \text{in } H \times H \text{ as } n \rightarrow \infty \quad (4.29)$$

となる列 $\{\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\}\} \subset B_0$ と $\{t_n\} \subset [0, \infty)$ with $t_n \geq n$ ($n = 1, 2, \dots$) が存在する. ここで, 任意の $t \geq 0$ に対し $\{\eta_n(t), \theta_n(t)\} := S(t)\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\}$ とおく.

ε を任意の正定数とする. このとき, 補題 4.6 の証明中の (4.12) により

$$\|\theta_n(t_n)\|_H < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_{1\varepsilon}$$

となる番号 $N_{1\varepsilon} \in \mathbf{N}$ が存在する. 従って, (4.29) から

$$\zeta = 0 \quad \text{in } H \quad (4.30)$$

であることがわかる.

$\mathcal{A}_*$ は (AC) の大域的アトラクターなので, $\varepsilon > 0$ に対し

$$\text{dist}_H(U(\tau)u_0, \mathcal{A}_*) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{for all } u_0 \in D_* \text{ and } \tau \geq \tau_0 \quad (4.31)$$

となる有限時間 $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon) > 0$ が存在する.

また, (4.29) より

$$\begin{cases} \tilde{t}_n := t_n - \tau_0 \geq 0, & \forall n \geq N_{2\varepsilon}, \\ \|\eta_n(\tilde{t}_n + \tau_0) - \xi\|_H < \frac{\varepsilon}{3}, & \forall n \geq N_{2\varepsilon} \end{cases} \quad (4.32)$$

となる番号 $N_{2\varepsilon} \in \mathbf{N}$ が存在する. このとき, $n \geq N_{2\varepsilon}$ となる任意の番号 n に対して $\eta_n(\tilde{t}_n) \in D_*$ なので, (4.31) より

$$\text{dist}_H(U(\tau_0)\eta_n(\tilde{t}_n), \mathcal{A}_*) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq N_{2\varepsilon} \quad (4.33)$$

となる.

ここで, $T = \tau_0$ として補題 4.7 を適用すると, 番号 n に依存しない時間 $t^* = t^*(\tau_0, \varepsilon) \geq 1$ が存在し

$$\sup_{\tau \in [0, \tau_0]} \|\eta_n(\tau + t) - U(\tau)\eta_n(t)\|_H \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall t \geq t^* \quad (4.34)$$

となる. このとき, t^* に対し

$$\tilde{t}_n := t_n - \tau_0 \geq t^*, \quad \forall n \geq N_{3\varepsilon}$$

となる番号 $N_{3\varepsilon} \in \mathbb{N}$ が存在するので, (4.34) より

$$\sup_{\tau \in [0, \tau_0]} \|\eta_n(\tau + \tilde{t}_n) - U(\tau)\eta_n(\tilde{t}_n)\|_H \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq N_{3\varepsilon} \quad (4.35)$$

となる.

従って, (4.32)-(4.35) より

$$\begin{aligned} \text{dist}_H(\xi, \mathcal{A}_*) &\leq \|\xi - \eta_n(\tau_0 + \tilde{t}_n)\|_H + \|\eta_n(\tau_0 + \tilde{t}_n) - U(\tau_0)\eta_n(\tilde{t}_n)\|_H \\ &\quad + \text{dist}_H(U(\tau_0)\eta_n(\tilde{t}_n), \mathcal{A}_*) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \forall n \geq N_{2\varepsilon} + N_{3\varepsilon} \end{aligned}$$

となるので

$$\xi \in \mathcal{A}_* \quad (4.36)$$

をえる. よって, (4.30) と (4.36) から $\{\xi, \zeta\} = \{\xi, 0\} \in \mathcal{A}_* \times \{0\}$ が成り立つので, $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{A}_* \times \{0\}$ をえる.

以上より, 定理 4.4 が成り立つ. $\square$

定理 4.5 の証明. 命題 2.5 (cf. [16, Theorem 4.2]) において, 特別な g の場合, 解の一意性なしで (P) の漸近安定性がえられている. 実際, (2.8) を仮定し, $\{\eta, \theta\}$ を (P) の任意の時間大域解とすると, $\{1, 0\}$ は (P) の一意定常解で

$$\eta(t) \longrightarrow 1 \text{ in } H^1, \quad \theta(t) \longrightarrow 0 \text{ in } H_0^1 \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (4.37)$$

となり, 収束 (4.37) は初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ に関して一様である.

このとき, (4.37) より明らかに, $\mathcal{A}_\infty$ の任意の元 $\{\xi, \zeta\}$ は

$$\xi = 1 \text{ in } H, \quad \zeta = 0 \text{ in } H$$

となり, $\mathcal{A}_* = \{1\}$ となる. 従って, $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_* \times \{0\} = \{1\} \times \{0\}$ をえる. $\square$

Remark 4.8. α_0 が正定数関数であるとき, また, $g(\cdot)$ が特別な関数 (cf. (2.8)) であるとき, (P) の大域的アトラクター $\mathcal{A}_\infty$ を (AC) のアトラクター $\mathcal{A}_*$ を用いて特徴づけることができた. しかし, それ以外の場合, $\mathcal{A}_\infty$ の構造については連結性を含めて未解決である.

参考文献

- [1] J. P. Aubin and H. F. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Systems & Control: Foundations & Applications **2**, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1990.
- [2] A. V. Babin, The attractor of a generalized semigroup generated by an elliptic equation in a tube domain, (Russian) *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, **58**(1994), 3–18; translation in *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **44**(1995), 207–223
- [3] H. Brézis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [4] F. E. Browder, Nonlinear operators and nonlinear equation in Banach space, in *Proceedings, Symposium in Pure Mathematics*, Vol. **18**, Part 2, Amer. Math. Soc., 1976.
- [5] J. W. Cahn, P. Fife and O. Penrose, A phase-field model for diffusion-induced grain-boundary motion, *Acta mater.*, **45**(1997), 4397–4413.
- [6] L. Q. Chen, Phase-field models for microstructure evolution, *Annu. Rev. Mater. Res.*, **32**(2002), 113–140.
- [7] K. Deckelnick and C. M. Elliott, An existence and uniqueness result for a phase-field model of diffusion-induced grain-boundary motion, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **131**(2001), 1323–1344.
- [8] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs **25**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1988.
- [9] A. Ito, M. Gokiel, M. Niezgódka and M. Szpindler, Mathematical analysis of approximate system for one-dimensional grain boundary motion of Kobayashi-Warren-Carter type, (submitted).
- [10] A. Ito, N. Kenmochi and N. Yamazaki, A phase-field model of grain boundary motion, *Appl. Math.*, **53**(2008), 433–454.
- [11] A. Ito, N. Kenmochi and N. Yamazaki, Weak solutions of grain boundary motion model with singularity, *Rend. Mat. Appl. (7)*, **29**(2009), 51–63.
- [12] A. Ito, N. Kenmochi and N. Yamazaki, Global solvability of a model for grain boundary motion with constraint, *Discrete Contin. Dyn. Syst., Series S* (to appear).
- [13] A. Ito, N. Yamazaki and N. Kenmochi, Attractors of nonlinear evolution systems generated by time-dependent subdifferentials in Hilbert spaces, in *Dynamical systems and differential equations, Vol. I (Springfield, MO, 1996)*, *Discrete Contin. Dynam. Systems* 1998, Added Volume I, 327–349.

- [14] N. Kenmochi, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, *Bull. Fac. Education, Chiba Univ.*, **30**(1981), 1–87.
- [15] N. Kenmochi, Monotonicity and Compactness Methods for Nonlinear Variational Inequalities, in *Handbook of Differential Equations, Stationary Partial Differential Equations, Vol. 4*, ed. M. Chipot, Chapter 4, 203–298, North Holland, Amsterdam, 2007.
- [16] N. Kenmochi and N. Yamazaki, Large-time behavior of solutions to a phase-field model of grain boundary motion with constraint, in *Current Advances in Nonlinear Analysis and Related Topics*, 389–403, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **32**, Gakko-tosho, Tokyo, 2010.
- [17] N. Kenmochi and N. Yamazaki, Global attractor of the multivalued semigroup associated with a phase-field model of grain boundary motion with constraint, *Discrete Contin. Dyn. Syst., Series A, A Supplement Volume*, (to appear).
- [18] R. Kobayashi, J. A. Warren and W. C. Carter, A continuum model of grain boundaries, *Phys. D*, **140**(2000), 141–150.
- [19] R. Kobayashi, J. A. Warren and W. C. Carter, Grain boundary model and singular diffusivity, in *Free boundary problems: theory and applications, II (Chiba, 1999)*, 283–294, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **14**, Gakko-tosho, Tokyo, 2000.
- [20] A. E. Lobkovsky and J. A. Warren, Phase field model of premelting of grain boundaries, *Phys. D*, **164**(2002), 202–212.
- [21] M. T. Lusk, A phase field paradigm for grain growth and recrystallization, *Proc. R. Soc. London A*, **455**(1999), 677–700.
- [22] V. S. Melnik and J. Valero, On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions, *Set-Valued Anal.*, **6**(1998), 83–111.
- [23] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Second edition, Applied Mathematical Sciences, **68**, Springer-Verlag, New York, 1997.