

と漸近展開されるがこれを用いると $x \gg 1$ のとき

$$K(x) = \alpha \left\{ -\frac{\sin^2 \lambda}{\lambda^2} \frac{\cos x}{x^3} + \left(\frac{2 \sin 2\lambda}{\lambda} - \frac{3 \sin^2 \lambda}{\lambda^2} \right) \frac{\sin x}{x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right) \right\}$$

がえられる。これは Kaplan-Lyons³⁾ によつて求められた $K(x)$ の漸近展開に他ならない。

文 献

- 1) T. Kasuya, Prog. Theor. Phys. 16 (1956) 45.
- 2) K. Yosida, Phys. Rev. 106 (1957) 893.
- 3) T. A. Kaplan and D. H. Lyons, Phys. Rev. 129 (1963) 2072.
- 4) M. A. Ruderman and C. Kittel, Phys. Rev 96 (1954) 99.

Josephson 効果と Superfluidity

恒 藤 敏 彦 (阪大基工)

(10月19日受理)

§1 Josephson 効果

超伝導における Josephson tunneling は、超伝導現象の本質を示す興味深い効果であり、実験的に殆んど疑う余地なく確かめられている。その理論については、Josephson, Ambegaokar & Baratoff, Anderson¹⁾らの取扱いがある。比較的 elementary な方法で非常に面白い物理的な議論を行つているのは Anderson, Green 関数を使つてきれいに導いているのは Ambegaokar & Baratoff の論文であろう。Josephson tunneling は普通の quasi-particle によるものではなく、pair の tunneling であり、その特徴は、0 voltage で電流 (d.c.) が流れること、それが barrier

中の magnetic flux の大きさによつて周期的に変化すること, Voltage の差があると a.c. になることなどである。

この効果は, pair の wave function $\langle \phi^+ \phi^+ \rangle$, あるいは Ginzburg-Landau 理論の Ψ という, いわばマクロの wave function のあることに帰因する。 Ψ の phase は, 1 個の超伝導体では粒子数が一定であるから物理的な意味をもたない (BCS 理論では $|\Delta|$ だけが問題になる)。しかし 2 つの超伝導体が barrier を通じて couple されているとき, それらの relative phase $\alpha_1 - \alpha_2$ は物理的な意味をもつ。そして実際計算すると, Coupling によるエネルギー変化も barrier を通して流れる電流も $\alpha_1 - \alpha_2$ に依存する項をもつ。

ところで, Anderson が指摘しているように, どんな相転移もみかけ上何らかの invariance をこわす。つまり系はもとの Hamiltonian のもつ Symmetry をもたなくなり, その代りにあるマクロの量とその失われた Symmetry をになうことになる。Ferromagnetism の場合は Total Spin の右向, 団体の場合はその重心 (げんみつには全運動量) がそれである。超伝導の場合は, phase まで含めた Ψ である。ただこの場合, Ψ の phase は上に述べたようにまったく不確定である。ここで次の (思考) 実験を考えてみよう。

2 つの超伝導金属 S_1 と S_2 を別々に T_c 以下に冷す。そして両者を barrier を通して連結させる。このとき何が起るであろうか? Ferro のときは, 別別に充分離して (つまり磁場による相互作用を無視できるようにして) Curie point 以下に冷すと, 各々のスピンの向きはまったく random であろう。だから両者をひつつけたとき, 必ずしもエネルギー最低の状態にはならない。そしてなんらかの振動が生じるであろう。超伝導の場合, 2 つを連結したとき, relative phase $\alpha_1 - \alpha_2$ はどんな値をとるか? 連結する前には, α_1 と α_2 はまったく不確定であつた。果して $\alpha_1 - \alpha_2$ の initial value

を考えることは意味があるか？ 連結したとき系は必ずしもエネルギー最低の状態にあるとも考えられない。もし $\alpha_1 - \alpha_2$ が 0 でない値をとれば，おそらく a.c. が流れ，それが電磁波か何かによつて damp するのであろう。観測できるかどうかは別として，この問題はどうか考えたらよいであろうか？

§ 2 He II における Josephson 効果

超伝導と超流動はよく知た現象である。Josephson 効果のような現象が He II でもあるであろうか？

Josephson 効果で大切なことは，2つの bulk superconductors が weak coupling しているということである。その coupling が tunneling である必要はないと思われる。barrier の中に非常に細い導体の bridge があつてもよい。本質的なことはそこで Ψ_1 と Ψ_2 とが overlap することである。He の場合，むしろ tunneling は考え難いが，weak coupling ならありうるのではないか？ 非常にうすい膜に He atom が通過できるくらいの穴があるものでもよいし，ごく細い Capillary を考えてもよい。それによつて 2つの bulk He II が連結されてい

るとしよう。

Hamiltonian を

$$H = H_1 + H_2 + H_{\text{int}} \quad (1)$$

とし， H_{int} を摂動と考える。Unperturbed state は 1 および 2 にそれぞれ localize した粒子状態 $\varphi_{ik}(\vec{X})$ および $\varphi_{2q}(\vec{X})$ で記述される。

$$\psi_i(\vec{X}) = \varphi_{i0}(\vec{X}) a_0 + \sum_k \varphi_{ik}(\vec{X}) a_k, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

$\varphi_{i0}(\vec{X})$ は最低の状態で，そこにマクロの数の粒子 N_{oi} が condense しているとする。 H_{int} は，超伝導の場合の tunneling でやつたように，

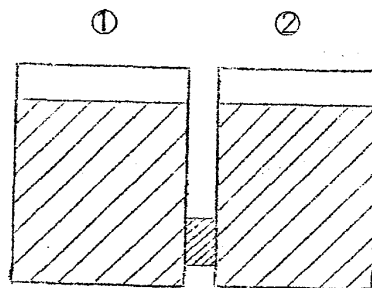


Fig. 1

$$H_{\text{int}} = \sum_{k,q} \{ S_{kq} a_k^+ c_q + S_{kq}^* c_q^+ a_k \} \quad (2)$$

と書けるであろう。(a_k は1の, c_q は2の annihilation operator) つまり S_{kq} は2の q という状態にある粒子を1の k という状態に移す。 S_{kq} は φ_{1k} と φ_{2k} と φ_{2q} の overlap で表わされるであろう。(H_{int} が(2)のように書けることは仮定であつて, Junctionの性質によつては可能でないであろう。)

このとき, 1の粒子数 $N_1 = \sum_k c_k + c_k$ の時間的変化を考える:

$$i\hbar \langle \dot{N}_1 \rangle = \langle [N_1, H] \rangle = 2i \operatorname{Im} \sum_{k,q} S_{kq} \langle c_k^+ a_q \rangle \quad (3)$$

この中で, Condensed State の項をとりだしてみよう:

$\operatorname{Im} S_{00} \langle c_0^+ a_0 \rangle$. $\langle c_0^+ a_0 \rangle$ は普通ならむろん0であるが, condensate のあるときには0でない(?)。なぜかという、Junction があるとき, N_{10} というマクロの数の粒子がある状態から1つの粒子をとりさつて, N_{20} に移しても, 全系の状態は殆んど変化しない。このような, N_{01} (したがつて N_{02}) が異なる多くの状態は, すべて degenerate しており, 実際の合成系の ground state では, 両側の系の間に overlap のため1種の coherence ができているといつてもよい。そのために $\langle c_0^+ a_0 \rangle$ は0でなく, かえつてマクロの量 $\sqrt{N_{10} N_{20}}$ に比例する。 φ_{10} と φ_{20} の phase を explicit に書くと,

$$\operatorname{Im} S_{00} \langle c_0^+ a_0 \rangle = \sqrt{N_{10} N_{20}} \operatorname{Im} S_{00} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (4)$$

となる。したがつて, 両側の chemical potential に差がなくても flow がありうる。もし差があれば $\exp i \alpha_1 - \alpha_2 + (\mu_1 - \mu_2)t$ となり, この flow は時間的に振動する。(4)はCoupling の1次に比例していることに注意しよう。超伝導体の場合には pair であつたから, S の2次の摂動で始めて $\langle a^+ a^+ \rangle \langle c c \rangle$ の形の項が出てきた。He II の場合には1粒子の

移動だから1次からこのような項が現われる。

§ 3 Order estimation

実際に上で考えたような weak couplingがあつて、観測できるであろうか？

問題の flow rate は最大 $n_0 |S|/\hbar$ 程度である。^{*} n_0 は Condensate の粒子密度。ここで単位時間に 10^{-5} cm^3 の He が流れるとする。これは 10^{18} 個の粒子の流れであるから、 $n_0 \sim 10^{23}$ とすると、 $|S|$ は 10^{-32} erg となる。ところで Condensation していない Bose gas の場合と比較してみよう。この場合は簡単な2次の摂動で

$$\langle \dot{N}_1 \rangle = -\frac{2m^3}{\pi^3 \hbar^7} |S|^2 \beta^{-2} \{F_2(\alpha_1) - F_2(\alpha_2)\} \quad (5)$$

という結果がえられる。ただし S_{kq} を constant S で近似した。 $\beta = 1/kT$, $\alpha = -\beta\mu$ で、

$$F_2(\alpha) = \int_0^\infty dx \frac{x}{e^{\alpha+x} - 1} \quad (6)$$

である。Chemical potential が同じなら flow はない。その差をごく大ざっぱに $\Delta\mu = mg\Delta h$ (g は重力定数, Δh は高さの差) とおいて、 $\Delta h = 0.1 \text{ cm}$ としよう。そして温度を数 $^\circ\text{K}$ として (5) を計算してみると

$$\langle \dot{N}_1 \rangle \sim 10^{82} |S|^2 \quad (7)$$

となる。 $S \sim 10^{-32}$ を入れると $\langle \dot{N}_1 \rangle \sim 10^{18}$ 程度になる。だから、非常に粗つぽくいつて、normal の状態でこれくらいの transfer が起るような junction があればよい。(もちろん、長い capillary を流れるような場合には上の取扱いはあてはまらない。だからここでは Superflow を問題にしているのではない。)

また $\Delta\mu$ があつたときの振動は、 $10^7 \times \Delta h \text{ c/sec}$ くらいの振動数をも

* (2) の S は実は両側の volume に依存する。簡単のため以下では $\Omega_1, \Omega_2 = 1$ とする。

つであろう。

§ 4 low density limit のモデル

He II の low density limit の理論を使つて、もう少し計算を進めてみると面白い問題が出てくる。

(2) の H_{int} を 0 state に関するものだけわけてかくと、

$$H_{\text{int}} = S_{00} c_0^+ a_0 + \sum_k' S_{k0} c_k^+ a_0 + \sum_q' S_{0q} c_0^+ a_q + \sum_{k,q}' S_{kq} c_k^+ a_q + \text{c.c.} \quad (8)$$

となる。これらはグラフでかくと第 2 図のようになる。a) はすでに議論した。2 次の摂動ではいろいろの項がでてくるが、ここで Condensate が関与するプロセス、つまり pressure head がなくても flow を与えるプロセスだけとりあげよう。Beliaev および Hugenholtz-Pines²⁾ の理論には普通の Green 関数のほかに、 $\bar{G}$ と $\tilde{G}$ という 2 種類のものが現われる (第 3 図)。 $\bar{G}$ は、 $\psi(x) = \varphi_0(x) + \psi'(x)$ と 0-state を分離したとき、 $-i < T$ $\psi^{+1}(x) \psi^{+1}(x') >$ で定義される。これは実は 2 つの Condensate の粒子を消すプロセスを含んでいるから、Condensate の波動関数の phase を α

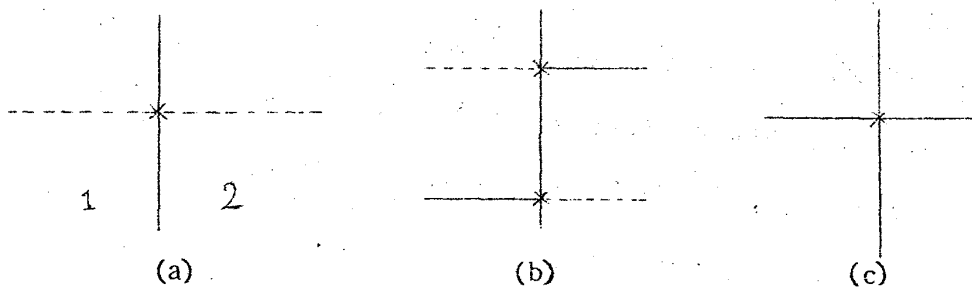


Fig. 2 点線は condensate の粒子を表す。

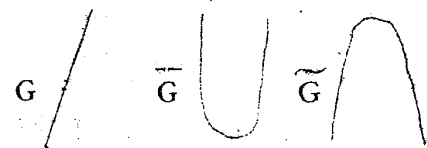


Fig. 3

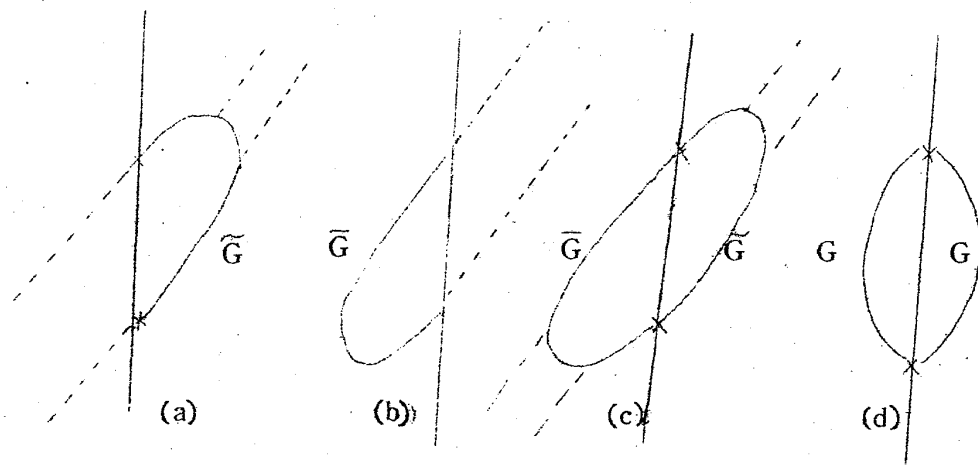


Fig. 4

としたとき, $e^{2i\alpha}$ に比例している。この $\bar{G}$ と $\hat{G}$ を考えると, 問題になる過程として第4図にあげたものがある。すべて一方の側の Condensate から2粒子をとって, 他方に移す過程になっている。普通の過程は第4図d)であつて, これは $\Delta\mu = 0$ のとき消える。たとえば第4図c) という過程は, $\langle \dot{N}_1 \rangle$ に対し

$$\sin \left[2(\alpha_1 - \alpha_2) \right] \frac{2m^3}{\pi^3 \hbar^7} |S|^2 \left(\frac{n_0 a \hbar^2}{2m} \right)^2 \log \left| 1 + C / (2n_0 a \hbar^2 / m) \right| \quad (9)$$

という寄与をする。ここで a は scattering length, C は Cut off (S を constant とすると積分は発散する。実際には S_{kq} の k と q の状態の energy が非常に異なれば, S_{kq} は 0 になると思われるから発散しない)。この場合には, $\sin 2(\alpha_1 - \alpha_2)$ に比例することに注意したい。^{*}(9)と(5)とを比較してみよう。 $n_0 a \hbar^2 / 2m$ は大体温度にして数度とみてよいであろう。したがって最後の factor 以外は同じ程度の大きさである。最後の factor は(9)では1の程度とすると, それは(5)に非常に大きな $\Delta\hbar$ を与えたときに対応する。 $F_2(\alpha_1) - F_2(\alpha_2) \sim \alpha_1 - \alpha_2$ ($\alpha_{1,2} \ll 1$, $(\alpha_1 - \alpha_2)/\alpha_{1,2} \ll 1$ のとき)で, $mg/k \sim 10^{-3}$ だからそう考えてよいであろう。あるいはこれが superleak の説明であるかもしれない。また(9)は(4)よりもはるか

^{*}) 超伝導の場合でも, 4次の摂動からくる Josephson current への寄与は $\sin [2(\alpha_1 - \alpha_2)]$ に比例するであろう。

に大きい。

以上の議論は明らかにまだ不完全なものである。しかしもし本当なら, junction による weak coupling の場合, それを通して流れる superflow ($\Delta\mu = 0$) には Condensate が本質的な役割をしていることになる。したがって n_0 は物理的に問題になる量である。

まだ充分検討してもいないことを書いたが, 批判の対象になれば幸いである。

- 1) B.D. Josephson, Physics Letters 1, 251 (1962)
 P.W. Anderson, Preprint
 V. Ambegaokar and A. Baratoff, Phys. Rev. Letters, 10,
 486 (1963)
- 2) S.T. Beliaev, J.E.T.P. 34, 417 (1958)
 N.M. Hugenholtz and D. Pines, Phys. Rev. 116, 489
 (1959)