

Navier-Stokes 方程式の解の安定性

(東大・理) 増田 久弥

(Kyūya Masuda)

1. 3次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中、有界な物体の外部 $\mathcal{U}$ を流れる非圧縮性粘性流は、Navier-Stokes 方程式によって支配される。

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0, & \operatorname{div} u = 0 \\ & (x \in \mathcal{U}, t > 0) \\ u(x, t) = b(x) & (\mathcal{U} \text{ の境界 } \Gamma \text{ 上}) \\ u(x, t) \rightarrow b_\infty & (|x| \rightarrow \infty) \\ u(x, 0) = a(x) & (x \in \mathcal{U}) \end{cases}$$

ここで、 u は $\mathcal{U}$ における速度ベクトル場、 p は圧力を表わすスカラー場、 ν は粘性係数で正定数、 $b = b(x)$ は Γ 上を与えられたベクトル場、 $a = a(x)$ は $\mathcal{U}$ 上で与えられた初速度ベクトル場、 b_∞ は定数ベクトル。

ただし、 $\operatorname{div} u = 0$ の条件より、次の条件を満たす b と a で与えられることが自然である。

$$(2) \quad \begin{cases} \int_{\Gamma} m \cdot b \, dS_x = 0 \\ \operatorname{div} a = 0 \end{cases}$$

(m は Γ の外向き法線ベクトルを表す.)

特に, 定常流は (便宜上, $u, p \in \mathcal{V}, q \in \mathcal{Z}$)

$$(3) \quad \begin{cases} -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla q = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u(x) = b(x) \quad (x \in \Gamma), \quad u(x) \rightarrow b_\infty \quad (|x| \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (x \in \mathcal{U})$$

と存在。 (3) の解, 存在する定常流の安定性が問題になる。

2.

これに関係して, R. Finn [1, 2, 3] は, "物理的に妥当な" 解 (physically reasonable solution) という概念を導入した。すなわち, (3) の解の中で,

$$(4) \quad |v(x) - b_\infty| \leq \frac{\text{const.}}{|x|} \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

をみたす解をいう。 (4) をみたす (3) の解は, 必然的に,

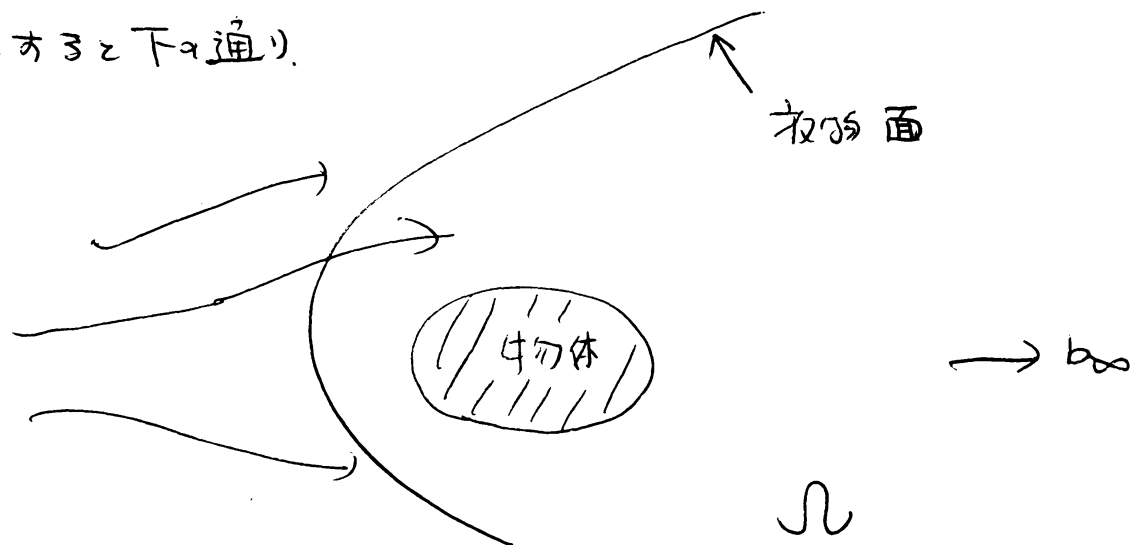
$$(5) \quad v(x) = b_\infty + O\left(\frac{1}{|x| (1 + S_x)}\right)$$

をみたすことが示される。 (上記 Finn の論文をみよ。)

但し, S_x は 次で定義される!

$$(6) \quad S_x = |x| - \frac{b_\infty \cdot x}{|b_\infty|}$$

図示すると下の通り。



放物面の外部の内部では b_{∞} に近づく speed が異なることに注意する。あるいは, wake region が存在する。
 (4) をみたす解の存在は, K.I. Babenko に示された。あるいは, さらに有限の Dirichlet norm

$$(7) \quad \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx < \infty$$

なる解の存在が知られていたが, (7) から (4) が成り立つことを示した。 ([4])。

その後, D. Clark ([5]), Babenko-Vasil'ev ([6]) は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$(8) \quad \text{rot } v(x) = O(|x|^{-2} \exp(-(R-\varepsilon)Sx))$$

を示した。 ($R = |b_{\infty}|/2v$) paraboloid の外では,

$\text{rot } v$ は " $O(|x|^{-2})$ " のとみられる。

上にあることが, 非定常 Navier-Stokes 方程式に対しても成立する。この結果は, Mizumachi' ([7]) により得られた。

3.

2.3.1, (4) をみたす (3) の解の安定性を論ずるが、
大抵と存するに止る内かる。

Masuda は次の結果を得た。 ([83]).

$$(9) \quad \sup_{x \in \mathcal{N}} |x| |v(x) - b_{\infty}| < \frac{1}{2} \nu$$

つまり、 $\sqrt{\cdot}$ は摂動 $a' = a'(x)$ を与えたとき、

$$(10) \quad a' \in L^2(\mathcal{N}), \quad a(x) = v(x) + a'(x)$$

をみたす a を初期値に与え (1) の解 $u = u(x, t)$ は、

$$\|\nabla u(\cdot, t) - \nabla v(\cdot)\|_{L^2} \leq M t^{-1/4}$$

$$(11) \quad \sup_{x \in \mathcal{N}} |u(x, t) - v(x)| \leq M t^{-1/8}$$

但し、 M は大に与えぬ正定数である。つまり、

(9) を満たす (3) の解は安定である。 ($\|\cdot\|_{L^2}$ は $\mathcal{N}$ 上の L^2 -norm を表わす。)

4.

流体のエネルギーは、 u のエネルギーに近づくにある
 うか。わかるか。

$$(12) \quad \|u(\cdot, t) - v(\cdot)\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

Masuda は、これを示した ([9])。この以後、この位
 order 2 の $0 < \alpha < 1$ が多い数学者に於て研究され始めた。
 文献表に掲げた論文を参照していただきたい。例えば、
 のように

P. Secchi, On the stationary and nonstationary Navier-Stokes
 equations in $\mathbb{R}^n$

を (著者が改良した形で) 述べよう。

$\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) において

$$(13) \quad \begin{cases} -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

このとき、

定理 次の $R > 0$, $\alpha \geq 3$ が存在するとする:

$$f \in L^{n/2}(|x| < R), \quad \text{ess. sup}_{|x| \geq R} |x|^\alpha |f(x)| < \infty$$

$$R \|f\|_{L^{n/2}(|x| < R)} + \text{ess. sup}_{|x| \geq R} |x|^\alpha |f(x)| < C_1 \nu^2$$

(C_1 ; m, α にのみ依存する定数) のとき,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} |x| |v(x)| < \infty, \quad \nabla v \in L^m, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v \in L^{\frac{m}{2}}$$

$$p \in L^m, \quad \nabla p \in L^{m/2}$$

をみたす (13) の解がただ一つ存在する。

非定常 Navier-Stokes 方程式の場合は,

$$(14) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla q = f(x) & x \in \mathbb{R}^m, t > 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

を考える。このとき、

定理 $p > m$, $f \in L^p$ とする。 v は (13) の解とする。

$u_0 \in L^p$ を $\nabla \cdot u_0 = 0$ かつ $u_0 - v \in L^2$ とし、このとき、次の定数 C_1, C_2 が存在する。

$$A(v) \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |x| |v(x)| < C_1$$

$$\|u_0 - v\|_2^{2(p-m)/(m(p-2))} \|u_0 - v\|_p^{p(m-2)/(m(p-2))} < C_2 (C_1 - A(v))$$

ならば (14) の解は存在する。これは、

$$\|u(t) - v\|_p \leq C_4 (t+t)^{-\frac{m}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}$$

と減衰する。ただし、 C_4 は、 $m, p, \nu, A(u), \|u_0 - v\|_2, \|u_0 - v\|_p$ に依存する（ $\ast$ に因する）定数である。

$\|\cdot\|_p$ は $\mathbb{R}^m$ 上の $L^p(\mathbb{R}^m)$ のノルムを表わす。

1. R.Finn, On the steady state solutions of the Navier-Stokes equations III Acta Math.,105(1961),197-244.
2. R.Finn, On the extrior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problems. Arch.Rat.Mech.Anal.,19(1965),363-406.
3. R.Finn, Mathematical questions relating to viscous fluid flow in an exterior domain, Rocky Mt. J.Math.,3(1973) 107-140.
4. K.I.Babenko, On stationary solutions of the problem of flow past a body of a viscous incompressible fluids Mat.Sbornik 91(133)91973),3-26 (English transl. in Math.USSR-Sb.,20(1973),1-25.)
5. K.I.Babenko-M.M.Vasilev, On the asymptotic behavior of viscous fluid at some distance from an immersed body, Prikl.Mat.Mech.,37(1973),690-705 (English transl.in J.Appl.Math.Mech.,37(1973),651-665)
6. D.Clark,The vorticity at infinity for solutions of the stationary Navier-Stokes equations in exterior domains, Indiana Univ.Math.J.,20(1971),633-651.
7. R.Mizumachi, On the asymptotic behavior of incompressible viscous fluid motions past objects. J.Math Soc.Japan 36(1984),497-522.
8. K.Masuda, On the stability of incompressible viscous fluid motions past objects. J.Math.Soc.Japan27 (1975),294-327.

9. K. Masuda, Weak solutions of Navier-Stokes equations.
Tohoku Math.J., 36 (1984), 627-646.
10. T. Kato, Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes
equations in R^n , with applications to weak solutions.
Math.Z., 187 (1984), 471-480.
11. M.E. Schonbek, L^2 -decay for weak solutions of the
Navier-Stokes equations. Arch.Rat.Mech.Anal., 89
(1985), 209-222.
12. R. Kajikiya-T. Miyakawa, On L^2 decay of weak solutions of
the Navier-Stokes equations in R^n . Math.Z. 192 (1986),
135-148.
13. G.P. Galdi-P. Maremonti, Monotonic decreasing, and
asymptotic behavior of the kinetic energy for weak
solutions of the Navier-Stokes equations in exterior
domains. Arch.Rat.Mech.Anal., 90 (1986), 253-266.
14. H. Beirao da Veiga, Existence and asymptotic behavior
for strong solutions of the Navier-Stokes equations
in the whole space. Indiana Univ.Math.J., 36 (1987),
149-166.
15. H. Beirao da Veiga-P. Secchi, L^p -stability for the strong
solutions of the Navier-Stokes equations in the whole
space. Arch.Rat.Mech.Anal. 98 (1987), 65-69.