

であるが、乱流の統計理論³⁾が援用できるかも知れない。

本稿は、R. A. Pasmanter 氏(日本学術振興会の招へいにより来日)との共同研究に基く。

References

- 1) A. S. Monin and A. M. Yaglom, "Statistical Fluid Mechanics" vol. 2 (MIT Press, Cambridge, 1975), p. 527-578.
- 2) C. C. Lin and W. H. Reid, Handbuch der Physik Bd. VIII/2 (Springer, Berlin, 1963), p. 438-523.
- 3) F. R. Ulinich and B. Ya. Lyubimov, Soviet Physics JETP 28, 494 (1969).

乱れた Alfvén 波中での宇宙線のピッチアングル散乱

日大・工 加 藤 正 人

§ 0. はじめに

ブラウン運動をひきおこす揺動力に相関があるばあいの話はいろいろなされているが、さらに揺動力がローレンツ力の場合、ブラウン粒子としての荷電粒子はどのような運動をするのだろうか、単純なブラウン運動=拡散過程で記述できるのだろうか。惑星間空間の磁場とそのなかを運動する宇宙線粒子は今述べた状況の好例なのかもしれない。それは特に運動が $10^6 \text{ eV/c} \sim 10^9 \text{ eV/c}$ の宇宙線(プロトン)のばあい、①無衝突である。密度は数 cm^{-3} 、したがって"抵抗"は無視できる。②電場($\partial B / \partial t$)の影響も無視できる。③磁場の空間的なゆらぎは大きな相関距離を持つ。といった条件を満足するからである。②は主に Alfvén 波の位相速度 v_A で B が時間的に変化することによって生じる電場だが、ここで対象にしている宇宙線の速さは v_A に比べはるかに大きく問題にならない。③は一見磁場だけの性質のようだが、運動量が大きくなり、宇宙線のラーモア半径が磁場の乱れの相関距離を越えてしまうと、宇宙線にとっては乱れが"White"にみえてしまうのである。さらに実際の惑星間空間磁場のゆらぎは非常に大きく(有限振幅)、乱れも磁力線に垂直な成分(Alfvén 波)が卓越していることが特徴である。

こうした状況をわれわれは計算機で"再現"し"相関を持つランダム磁場中での宇宙線の運動"を追ってみた。なお乱数によって作られた"磁場"の形態と物理量は次のとおりである。

①"形"は、 $B_z = \text{固定}$ 、ゆらぎは Z 軸に垂直な方向で Z の関数、 $B_{x(y)} = B_{x(y)}(Z)$ B_x と B_y は

独立。② $\bar{B} = 5 \times 10^{-5}$ gauss。③ $\sqrt{(\Delta B)^2}/\bar{B} = 0.3$ 。④ ΔB すなわち B_x または B_y のパワー
 スペクトルは $P_{BL}(k_Z) = A/(1 + 2\pi k^2)^{r/2}$; $r = 1.5 \sim 2.0$, k は Z に対する波数。

§ 1. “プロトン”の運動を統計的にながめる。

今、考えているのは磁場との相互作用だけなので粒子のエネルギーは変化せずに方向だけが変わる。また § 0 で設定した状況では、宇宙線粒子は磁力線にしっかりまきついているイメージなので、“散乱”も磁場に沿った方向を考え $\mu = v_{\parallel}/v = \cos \theta$ ($v_{\parallel}$ は磁力線に沿った速度, θ は磁力線に対するピッチアングル) という量を導入し, μ の“拡散”を問題にしてゆく。計算機実験のやり方は, ある μ からスタートして“粒子”を“投入”し吸収境界 μ_L (ー側) か μ_R (+側) に達したら計算をストップする, ということをサンプル磁場ごとに φ (円筒座標 Z, r, φ の φ) を変えながら 1000 回以上くりかえし μ の“定常流”を作り出す。図 1 が粒子の運動量を固定し, 磁場の乱れ方 (r で表示) を変えたばあい, 図 2 は初期 $\mu(\mu_S)$ を変えたばあいの μ の実現数のヒストグラムである。外場のない場合の拡散による流れは μ という“速度空間”では

$$J_{\mu} = -D_{\mu} \frac{\partial f}{\partial \mu} \quad (1)$$

(D_{μ} は拡散係数, f は分布関数; ヒストグラム H に比例) が成りたち, また散乱の“等方性”から $D_{\mu}(\mu) = D_{\mu}(-\mu)$ のはずである。さらに D_{μ} は μ のみの関数だから μ_S に依存するというのは考えにくいことである。ところがこれらの図をみる限り, (1) から導かれる

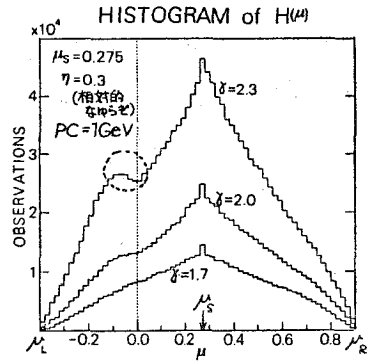


図 1

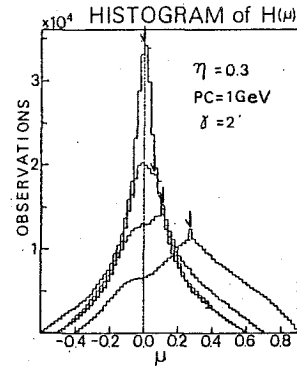


図 2

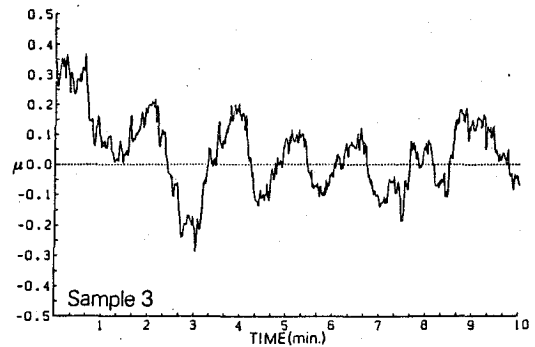


図 3

$D_\mu(\mu)$ は、特に $\mu = 0$ 付近で“等方性”“対称性”も“初期非依存性”も否定され、さらに○で囲んだ部分(図1)では D_μ は負にすらなっているのである。このような現象は粒子のラーモア半径が相関距離より十分小さくて、 r が大きい。すなわち小さなスケールの乱れに比べて大きなスケールの乱れが卓越しているときほど著しく、 $\mu = 0$ を中心に生じていることがわかる。それでは $\mu = 0$ すなわち磁力線に対し粒子が垂直に回転しているところで何が起きているのだろうか。それをみるために1個の特徴的な粒子の軌跡を追ってみた。

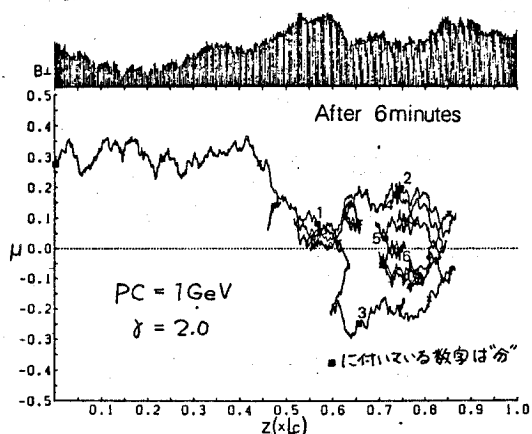


図 4

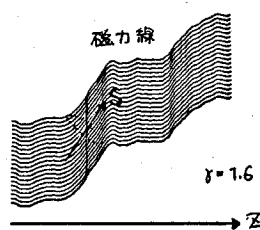


図 5

§ 2. プロトンの運動を力学系で追う。

いくつかのサンプル磁場中で μ が時間的に振動しているばあいがある(図3)。ほとんどのサンプル磁場中では μ はごく短時間に境界に達しているのだが、これはいつまでも $\mu = 0$ のまわりをふらついている。これを位相空間($Z-\mu$)中に画かせたのが図4で磁場の $B_\perp$ 成分と共に表示してある。 B_z は固定なので $B_\perp$ はパターンとしては B そのものと変わらない。磁場の谷間で“往復”しているこの現象はミラートラップそのものである。こうした事例は1例だけでなく数多くみることができた。それではヒストグラムを“拡散型”から変型させる原因となっているのは“ミラートラップ”なのだろうか。これを現象面からだけでなく、“ローレンツ力”そのものから説明するために次のような座標系を用いて考えてみた。

§ 3. “傾いた”軸を持つ円筒座標での粒子の運動方程式。

中心軸 S が磁力線の方を向いている円筒座標系を考えてみよう(図5)。このような系は B の強いところ(濃くなる)では磁力線が大きく傾いているため中心軸 S も元の Z 軸とは向きがだいぶ異なる。この“傾いた”座標系での粒子の運動方程式は

$\text{div } \mathbf{B} = 0$ から

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} B_\varphi + \frac{\partial}{\partial S} B_S = 0 \quad (2)$$

比較的ラーモア半径が小さく、乱れの Index r が大きいという条件のもとでは $\frac{\partial B_S}{\partial S}, \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}$ は r に関しほぼ一定と仮定することができ

$$B_r = -\frac{1}{2} r \frac{\partial B_S}{\partial S} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \quad (3)$$

また S 方向のローレンツ力は

$$F_S = q(v_r B_\varphi - v_\varphi B_r) \quad (4)$$

(4)式右辺の B_r に(3)を代入して

$$F_S = \frac{1}{2} q v_\varphi r \frac{\partial B_S}{\partial S} + q(v_r B_\varphi + v_\varphi \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}) \quad (5)$$

$v_\varphi \approx v_\perp$ $r = r_L$ また $\varphi = \omega t$ を考慮すると

(5)式は $\mu \approx 0$ で effective に

$$F_S = -M \frac{\partial B_S}{\partial S} + q \eta(t) \quad (6)$$

(ω はサイクロトロン振動数, M は磁気モーメント)

この(6)式の意味は重要で $\eta(t)$ がランダムな力の性質を持てば、これはポテンシャル場のなかでの“拡散”の問題になる。また確率的にも予想されるし、実際にもそうなっているのだが、粒子はいつも“ポテンシャル(この場合 B_S)”の頂上またはその近傍で折りかえす。すなわち $\mu = 0$ となることがわかり、当然 μ_S が大きいほど“山”まで登る。この時磁力線は大きくねじれているため B_φ とその微分を大きなものにし“揺動力”を強いものになっている。これは $\mu \approx 0$ での粒子のふるまいを考える上で極めて大事なことで粒子はポテンシャルの頂上にとどまることなく、すぐに“山”からつきおとされることになる。このよう

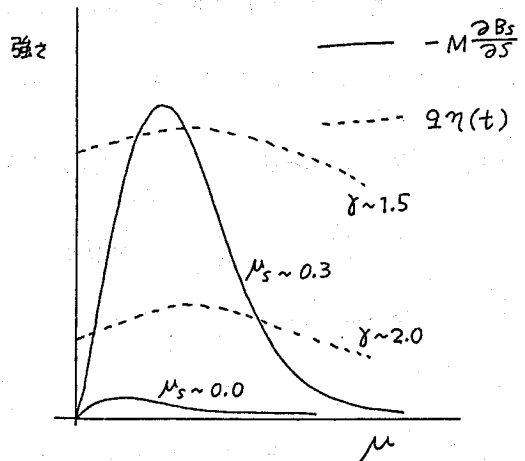


図 6

な状況を書いてみたのが図6の概念図である。すなわち(6)式の右辺第1項の“外場による力”は r が大きいほど、また μ_S が0から離れるほど(しかし、離れすぎではローレンツ力そのものが効かなくなる。)はっきりした形を持つようになり、ミラートラップのような“力学的”な運動をひき起こすようになるのである。 $\mu \approx 0$ で特にヒストグラムの変型が著しかったのも $\mu \approx 0$ でのみ“外場”が生じることによるものであり、当然拡散だけでは説明がつかなくなる。 $\mu \approx 0$ では B_S はおおよそ $-aS^2$ (a は比例係数)の形をしていると考えられ、そのとき(6)式は

$$F_S = aMS + q\eta(t)$$

となり、この解はセパトリクスを持ち、そこで $\eta(t)$ が大きくなっているという性質を持つ。(6)またはこの式を厳密に解くことも大事だが、今回は今まで述べたような定性的な話でしめくりたいと思う。

一般化されたパイコネ変換 —カオスと確率過程—

京大・理 相 沢 洋 二

§ 1. 力学系に内在する双曲的性質は、カオスを発生する基本的な機構の一つである。これによって、接空間は引き延ばし、折りたたみの操作をうけて、ほとんど凡ゆる種類の確率論的性質をもつ random motion が生み出される。Poincaré により指摘された Homoclinicity の具体的モデルである Horse-shoe (Smale) 上のカオスと確率過程の性質を調べる為に、ここでは解析的に扱えるさらに単純化したモデル系(一般化されたパイコネ変換)を解析する。

二次元写像 $T: (X_n, Y_n) \rightarrow (X_{n+1}, Y_{n+1})$

$$X_n = \{2X_{n-1}\}, \quad Y_n = Y_{n-1}/\lambda + [2X_{n-1}](\lambda-1)/\lambda \quad (1)$$

$$0 \leq X, Y \leq 1$$

$\{\dots\}$, $[\dots]$ は小数部, 整数部。

$\lambda = 2$ は measure-preserving, $\lambda > 2$ は contracting map で Y -方向に Cantor set が不変集合になる。 X -方向には常にベルヌーイ的。