

Moser 問題と無情報型最良選択問題の中間モデル

愛知大学経営学研究科 D2

王 琦 (Qi Wang)

Department of Business Administration, Aichi University

1 はじめに

秘書問題はしばしば利用可能な情報の観点からは「無情報型」と「完全情報型」に、また最適化基準の観点からは「最良選択」と「順位最小化」に大別される。特に無情報型最良選択問題は古典的秘書問題とも呼ばれ、次のように記述される。

意思決定者は n 個の対象を逐次観測する。ただし、毎時観測されるのは対象の相対順位（既に出現した対象の中での順位）である。例えば、 i 番目の対象の相対順位を R_i , $1 \leq i \leq n$, で表すと、これは 1 から i の値を取る確率変数である。 n 個の対象が順位付け可能（順位 1 が最良）で、全くランダムに出現する場合（換言すれば、 $n!$ 通りの出現順序がそれぞれ $1/n!$ の等確率を持つ場合）、次の 2 つの性質が成立する。

(a) $R_1, R_2, \dots, R_n$ は独立な確率変数

(b) $P\{R_i = j\} = 1/i, 1 \leq j \leq n$

観測値 $\{R_i\}$ に基づいて、停止か継続かを決めなければならない。目的は全体の中の最良を選ぶ確率を最大化する停止規則とその時の成功確率を求めることである。よく知られているように、最適停止規則は閾値規則となり、最初の $r_n - 1$ 個の対象を見送り、それ以降最初に出現する相対順位 1 の対象を選択する（すなわち、ここで停止する）ことである。 r_n は、

$$r_n = \min\left\{r \geq 1 : \frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} \leq 1\right\}, \quad n \geq 2$$

で与えられる。その規則の下での成功確率は、

$$v_0(n) = \left(\frac{r_n - 1}{n}\right) \sum_{j=r_n}^n \frac{1}{j-1}$$

となる。ただし、 $r_n = 1$ の時、 $v_0(n) = 1/n$ 。

タイトルに掲げた Moser 問題について述べよう。この最適停止問題は通常秘書問題の範疇には入らない (Ferguson(1989) 参照)。 n 個の確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が独立で、それぞれ区間 $(0, 1)$ で一様分布することが分かっており、意思決定者はこれらを逐次観測する（時刻 i には X_i を観測する）。Moser の最適化基準は観測値を利得と見なし、停止時の利得の期待値を最大化することである。ただし、最後まで選択しなかった場合、 n 番目を選択しなければならない。今の観測値が x で、残り観測（対象）数が j 個の時、最適停止規

則は $x \geq v_j$ の場合に限り停止するというものである。ただし、 v_j は次の漸化式から計算される値である（ただし、 $v_0 = 0$ ）。

$$v_{j+1} = \frac{1}{2}(1 + v_j^2), \quad j \geq 0$$

また、最適停止規則の下での期待利得は v_n で与えられる。

次に Bearden(2006) の問題を紹介しよう。Moser と同様に $(0,1)$ 区間で一様分布する $X_1, \dots, X_n$ を想定しているが、意思決定者はこれらの値を直接観測することはできない、知ることができるのは相対順位が 1 か否かということだけである。例えば、時刻 i で利用することができる情報 $R_i^{(1)}$ は

$$R_i^{(1)} = \begin{cases} 1, & X_i = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases}$$

である。Bearden 問題は古典的秘書問題に似ているが、最適化基準が異なる。最適化基準は Moser 問題と同様に停止時の X 値の期待値の最大化である。この意味において Bearden 問題を Moser 問題と古典的秘書問題の中間モデルと見なすことができる。Bearden は最適停止規則が古典的秘書問題と同様に閾値規則となることを示した。また、最適な閾値 r^* は $\lfloor n^{1/2} \rfloor$ あるいは $\lceil n^{1/2} \rceil$ であり、最適利得が

$$V_n = 1 - \left(\frac{r^* - 1}{2} \right) \left(\frac{1}{(r^* - 1)r^*} + \frac{1}{n} \right).$$

となることも示した。言うまでも無く、Bearden の結果は $X_1, \dots, X_n$ が区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従うという仮定に大きく依存している。Samuel-Cahn(2007) は、 $X_1, \dots, X_n$ の分布依存性に関して、深い研究を行った。最大値分布は $n \rightarrow \infty$ の時、3 つの異なった吸引域を持つことが知られているが、それぞれに対応して、その漸近挙動を調べた。

本稿では再び Bearden 問題に戻り、順位情報が詳しくなる時の効果を調べる。すなわち、 m を与えられた正整数として時刻 i での利用可能な情報 $R_i^{(m)}$, $1 \leq i \leq n$ を次のように定義する。

$$R_i^{(m)} = \begin{cases} j, & X_i \text{ が } (X_1, X_2, \dots, X_i) \text{ の中で } j(\leq m) \text{ 番目に大きい場合} \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases}$$

この問題をオーダー m のランク問題と呼ぶ。 $m = 1$ の場合が Bearden に、 $m = 2$ の場合が Wang and Tamaki(2008) に相当する。2 節では、 $m = 3, 4$ の場合を詳しく調べる。

2 オーダー m のランク問題

1 節の 2 つの性質 (a), (b) より、オーダー m の場合、 $R_k^{(m)}$, $1 \leq k \leq n$ は独立な確率変数であり、 $P\{R_k^{(m)} = i\} = 1/k$, $1 \leq i \leq \min(k, m)$ となる。 $R_1^{(m)} = i_1, R_2^{(m)} = i_2, \dots, R_k^{(m)} = i_k$ を観測した直後の状態を (k, i) で表す ($R_1^{(m)}, R_2^{(m)}, \dots, R_k^{(m)}$ の独立性から、過去の観測値には依存しない)。状態 (k, i) から出発した時の期待利得の最大値を $V^{(m)}(k, i)$ で表し、こ

の状態で停止した時の期待利得を $s(k, i)$ で表すと、次の最適方程式が成立する。

$$V^{(m)}(k, i) = \max\left\{s(k, i), \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{\min(k+1, m)} V^{(m)}(k+1, j) + \left(1 - \frac{\min(k+1, m)}{k+1}\right) V^{(m)}(k+1, 0)\right\}, \quad 1 \leq k < n \quad (1)$$

ただし、 $V^{(m)}(n, i) = s(n, i)$ 。区間 $(0, 1)$ の一様分布に対する順序統計量の性質より、

$$s(k, i) = E[X_k | R_k^{(m)} = i] = \frac{k+1-i}{k+1}, \quad 1 \leq i \leq k.$$

を得る。また、

$$s(k, 0) = \frac{k+1-m}{2(k+1)}, \quad k > m.$$

である。これを導くには、次の関係 $E[X_k] = E[E[X_k | R_k^{(m)}]]$ を利用する。左辺は明らかに $1/2$ である。右辺は

$$\begin{aligned} E[E[X_k | R_k^{(m)}]] &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^m E[X_k | R_k^{(m)} = i] + \left(1 - \frac{m}{k}\right) E[X_k | R_k^{(m)} = 0] \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^m s(k, i) + \left(1 - \frac{m}{k}\right) s(k, 0) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^m \frac{k+1-i}{k+1} + \left(1 - \frac{m}{k}\right) s(k, 0) \end{aligned}$$

と書け、これより上述の $s(k, 0)$ が求まる。状態 (k, i) で停止しないで継続したときの期待利得 $c^{(m)}(k)$ は

$$\begin{aligned} c^{(m)}(k) &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{\min(k+1, m)} V^{(m)}(k+1, j) \\ &\quad + \left(1 - \frac{\min(k+1, m)}{k+1}\right) V^{(m)}(k+1, 0), \quad 0 \leq k < n \end{aligned} \quad (2)$$

である。また $c^{(m)}(n-1) = 1/2$ であり、最適利得 $V_n^{(m)}$ は $c^{(m)}(0)$ で与えられる。状態 (k, i) では $s(k, i) \geq c^{(m)}(k)$ の時停止する。最適規則は以下のようにまとめられる。

定理 1. (1). $i \geq 1$ の時、状態 (k, i) で停止することが最適であれば、

(a) 状態 $(k, i-1)$ で停止することが最適であり ($i \geq 2$)、

(b) 状態 $(k+1, i)$ で停止することが最適である。

(2). $i = 0$ の時は最後のステージ以外決して停止しない。

証明. (1) では、 $s(k, i) \geq c^{(m)}(k)$ が仮定されている。(a) では $s(k, i-1) \geq c^{(m)}(k)$ 、(b) では $s(k+1, i) \geq c^{(m)}(k+1)$ を示せばよい。 $s(k, i)$ は i に関して減少であるから、(a) の成立は明らか。また、 $s(k, i)$ が k に関して増加であり、 $c^{(m)}(k)$ が k に関して非増加、すなわち $c^{(m)}(k) \geq c^{(m)}(k+1)$ が式 (1), (2) から明らかのため、(b) が成立する。(2) を示す

ためには、 $s(k, 0) < c^{(m)}(k)$, $1 \leq k < n$ を示せばよい。しかるに、 $s(k, 0)$ は k に関して増加、 $c^{(m)}(k)$ は非増加、さらに、 $s(n-1, 0) = (1 - m/n)/2 < 1/2 = c^{(m)}(n-1)$ であるから、このことが示される。

定理 1 より、直ちに次の結果を得る。

補題 2. 臨界値 $r_i^{(m)}$ を次式で定義する。

$$r_i^{(m)} = \min\{k \geq i : s(k, i) \geq c^{(m)}(k)\}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (3)$$

この時、 $r_i^{(m)}$ は i に関して非減少であり、状態 (k, i) では $k \geq r_i^{(m)}$ の時に限って停止することが最適である。

2.1 $m=2$

$m = 1$ の場合は Bearden 問題であり、1 節で紹介した。 $m = 2$ の場合は既存研究 Wang and Tamaki(2008) があり、以下の結果を得ている。

(a) 臨界値

$$\begin{aligned} r_2^{(2)} &= \min\{2 \leq k \leq n : (k-1)k(k+1) \leq 2(n-1)n\} \\ r_1^{(2)} &= \min\left\{1 \leq k \leq n : \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{(r_2^{(2)}-1)r_2^{(2)}} + \frac{r_2^{(2)}-2}{(n-1)n}\right\} \end{aligned}$$

(b) 最適利得

$$V_n^{(2)} = 1 - \left(\frac{r_1^{(2)}-1}{2}\right) \left[\frac{1}{(r_1^{(2)}-1)r_1^{(2)}} + \frac{1}{(r_2^{(2)}-1)r_2^{(2)}} + \frac{r_2^{(2)}-2}{n(n-1)}\right]$$

2.2 $m=3$

(1),(2) と定理 1 より、

$$c^{(3)}(k-1) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^3 \max\{s(k, j), c^{(3)}(k)\} + \left(1 - \frac{3}{k}\right)c^{(3)}(k), \quad 3 \leq k \leq n, \quad n \geq 4$$

である。 $m = 2$ と同様に計算すると、以下のような結果を得る。

(a) 臨界値

$$r_3^{(3)} = \min\{3 \leq k \leq n : (k-2)(k-1)k(k+1) \leq 3(n-2)(n-1)n\} \quad (4)$$

$$r_2^{(3)} = \min\left\{2 \leq k \leq n : \frac{2}{(k-1)k(k+1)} \leq \frac{1}{(r_3^{(3)}-2)(r_3^{(3)}-1)r_3^{(3)}} + \frac{r_3^{(3)}-3}{(n-2)(n-1)n}\right\} \quad (5)$$

$$r_1^{(3)} = \min \left\{ 1 \leq k \leq n : \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{(r_2^{(3)} - 1)r_2^{(3)}} + \frac{r_2^{(3)} - 2}{(r_3^{(3)} - 2)(r_3^{(3)} - 1)r_3^{(3)}} + \frac{(r_2^{(3)} - 2)(r_3^{(3)} - 3)}{(n-2)(n-1)n} \right\} \quad (6)$$

(b) 最適利得

$$V_n^{(3)} = 1 - \left(\frac{r_1^{(3)} - 1}{2} \right) \left[\frac{1}{(r_1^{(3)} - 1)r_1^{(3)}} + \frac{1}{(r_2^{(3)} - 1)r_2^{(3)}} + \frac{r_2^{(3)} - 2}{(r_3^{(3)} - 2)(r_3^{(3)} - 1)r_3^{(3)}} + \frac{(r_2^{(3)} - 2)(r_3^{(3)} - 3)}{(n-2)(n-1)n} \right]$$

(c) 漸近的な関係

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1^{(3)}}{r_2^{(3)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_2^{(3)}}{r_3^{(3)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

証明. (a) と (b) の証明は Wang and Tamaki(2008) を参照されたい。(c) について、 n が大きくなると、式 (4),(5) より

$$(r_3^{(3)})^4 \approx 3n^3 \iff \frac{(r_3^{(3)})^4}{n^3} \approx 3 \quad (7)$$

$$\frac{2}{(r_2^{(2)})^2} \approx \frac{1}{(r_3^{(3)})^3} + \frac{r_3^{(3)}}{n^3} \iff 2 \approx \left(\frac{r_2^{(3)}}{r_3^{(3)}} \right)^3 \left[1 + \frac{(r_3^{(3)})^4}{n^3} \right] \quad (8)$$

を得る。(7) を (8) に代入すると、

$$1 \approx 2 \left(\frac{r_2^{(3)}}{r_3^{(3)}} \right)^3,$$

が得られる。同様に、

$$1 \approx 3 \left(\frac{r_1^{(3)}}{r_2^{(3)}} \right)^2,$$

が得られる。

2.3 m=4

(1),(2) と定理 1 より、

$$c^{(4)}(k-1) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^4 \max\{s(k, j), c^{(4)}(k)\} + \left(1 - \frac{4}{k}\right) c^{(4)}(k)$$

となる。最適規則と漸近的な関係は以下のように与えられる。詳細は省く。

(a) 臨界値

$$\begin{aligned}
 r_4^{(4)} &= \min \{4 \leq k : (k-3)(k-2)(k-1)k(k+1) \leq 4(n-3)(n-2)(n-1)n\} \\
 r_3^{(4)} &= \min \left\{ 3 \leq k : \frac{3}{(k-2)(k-1)k(k+1)} \right. \\
 &\quad \left. \leq \frac{1}{(r_4^{(4)}-3)(r_4^{(4)}-2)(r_4^{(4)}-1)r_4^{(4)}} + \frac{r_4^{(4)}-4}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \right\} \\
 r_2^{(4)} &= \min \left\{ 2 \leq k : \frac{2}{(k-1)k(k+1)} \leq \frac{1}{(r_3^{(4)}-2)(r_3^{(4)}-1)r_3^{(4)}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{r_3^{(4)}-3}{(r_4^{(4)}-3)(r_4^{(4)}-2)(r_4^{(4)}-1)r_4^{(4)}} + \frac{(r_3^{(4)}-3)(r_4^{(4)}-4)}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \right\} \\
 r_1^{(4)} &= \min \left\{ 1 \leq k : \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{(r_2^{(4)}-1)r_2^{(4)}} + \frac{r_2^{(4)}-2}{(r_3^{(4)}-2)(r_3^{(4)}-1)r_3^{(4)}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(r_2^{(4)}-2)(r_3^{(4)}-3)}{(r_4^{(4)}-3)(r_4^{(4)}-2)(r_4^{(4)}-1)r_4^{(4)}} + \frac{(r_2^{(4)}-2)(r_3^{(4)}-3)(r_4^{(4)}-4)}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \right\}
 \end{aligned}$$

(b) 最適利得

$$\begin{aligned}
 V_n^{(4)} &= 1 - \left(\frac{r_1^{(4)}-1}{2} \right) \left(\frac{1}{(r_1^{(4)}-1)r_1^{(4)}} + \frac{1}{(r_2^{(4)}-1)r_2^{(4)}} + \frac{r_2^{(4)}-2}{(r_3^{(4)}-2)(r_3^{(4)}-1)r_3^{(4)}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(r_2^{(4)}-2)(r_3^{(4)}-3)}{(r_4^{(4)}-3)(r_4^{(4)}-2)(r_4^{(4)}-1)r_4^{(4)}} + \frac{(r_2^{(4)}-2)(r_3^{(4)}-3)(r_4^{(4)}-4)}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \right).
 \end{aligned}$$

(c) 漸近的な関係

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1^{(4)}}{r_2^{(4)}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_2^{(4)}}{r_3^{(4)}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_3^{(4)}}{r_4^{(4)}} = \sqrt[4]{\frac{3}{5}}.$$

参考文献

- [1] Bearden, J.N.(2006), A new secretary problem with rank-based selection and cardinal payoffs, *J.Math.Psychology* **50**,58-59.
- [2] Ferguson, T.S.(1989), Who solved the secretary problem?, *Stat.Sci.* **4**,282-296.
- [3] Gilbert, J.P. and Mosteller, F.(1966), Recognizing the maximum of a sequence, *J.Amer.Statist.Assoc.* **61**,35-73.
- [4] Moser, L.(1956), On a problem of Cayley, *Scripta.Math.* **22**,289-292.
- [5] Samuel-Cahn,E.(2007), Optimal Stopping for I.I.D. Random Variables Based on the Sequential Information of the Location of Relative Records Only , *SequentialAnalysis* **26**,395-401.

- [6] Samuels, S.M.(1991), Secretary problem. In B.K. Gosh and P.K. Sen(Eds.), *Handbook of sequential analysis*, Marcel Dekker, 381-405.
- [7] Wang, Q. and Tamaki, M.(2008), A Generalization of the Secretary Problem with Rank-based Selection and Cardinal Payoffs , 愛知経営論集 **158** , 29-137.