

離散化された図形の面積について

愛媛大 工学部 野田松太郎

Ⅰ. 序

パターン認識において、図形（面積 a 、周囲長 p ）のコンパクトさを表わす尺度として、形状因子 $S = p^2/a$ が用いられる。幾何学の等周不等式からわかる様に、 S は次の性質を満足する。

$$i) \quad S \geq 4\pi \quad (S = 4\pi \text{ iff 図形} = \text{円})$$

ii) S は、回転、移動、拡大等の変換の下、不変。

これに対し、計算機で扱う、離散化された図形（デジタル図形）においては、Rosenfeld により、以下の事実が示され、「病理現象」と云われている。¹⁾

$$i) \quad \min(S_d) \neq 4\pi, \quad \min(S_d) \neq S_d(\text{円})$$

$$ii) \quad S_d(\text{円}) \neq 4\pi$$

$$iii) \quad S_d(\text{正方形}) \neq S_d(\text{ダイヤモンド})$$

そこで、 S_d はデジタル図形に対する形状因子である。

すなわち、デジタル図形に対しては、連続図形の形状因子が持つべき性質が保たれないことになる。以下、この点を考察し、さらにデジタル図形の面積を得るのに有効な方法を述べる。

2. デジタル図形の角度依存性

上の病理現象の因を見るために、まず、デジタル図形に関する諸量を定義し、その周囲長に関するデジタル化誤差について考察する。簡単のために、ここでは正方格子によるデジタル化を考える。格子の各要素を素片（又は、cell）、各素片の中心を格子点と名づける。

a : 図形内部の格子点の数

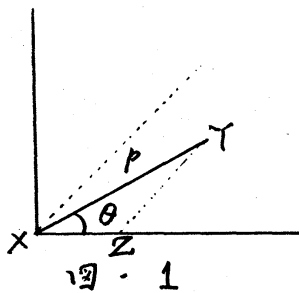
b : 図形の境界上の格子点の数

とおくと、デジタル図形の面積、周囲長は次の様に書ける。

$$\text{面積} : A_d = a + b$$

$$\text{周囲長} : P_d = b$$

ここで、上の定義により、図1の様な、長さ ρ の線分（連続



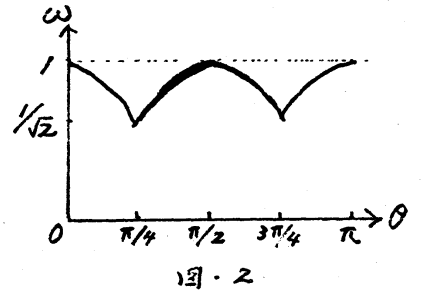
図形) のデジタル化された周囲長を求めると、格子点の連続が $\pi/4$ ずつの変化のみのため、

$$|XY| \rightarrow |XZ| + |ZY|$$

となり、 $p_d = p \cos \theta$ ($0 \leq \theta < \pi/4$), $p_d = p \sin \theta$ ($\pi/4 \leq \theta < \pi/2$) ... となる。ディジタル図形の周囲長は、角度依存性を含み、連続図形の周囲長 p に対する「誤差」を

$$\omega = p_d / p \quad \dots (1)$$

とすると、 ω は図 2 の様に振る舞う。



格子の軸との角度 $0, \pi/2, \pi, \dots$ の図形は正方形で、明らかに、 $p_d = p$ となるが、 $\pi/4$ 回転した正方形（ダイヤモンド）では、 $p_d = \frac{1}{\sqrt{2}} p$ となり、形状因子は正方形の半分になる。同様に、全ての θ を取るので、 ω としてはその平均値を用いる。当然、対応する形状因子は、連続図形より小さく、かつダイヤモンドよりは大きくなる。なお、面積については、上で述べた定義が十分、連続図形のものとよく近似することから、Kulpa により示されている。²⁾ 周囲長に対する、他の定義を用いても、上に述べた事情は本質的に変化しない。又、面積について、より精密な公式

$$\hat{a}_d = c + \frac{1}{2}b - 1 \quad \dots (2)$$

が、Steinhaus により、くわしく検討されている。³⁾ 以後は、ディジタル図形の面積として、(2) を考えることにする。

3. ランダム試行による面積の公式

形状因子に関するディジタル化の問題点を除去するため、容易に考え得ることは、図2のグラフを $\pi/4$ 平行移動し、重ね合わせ、……の操作を繰り返すことである。 $\pi/4$ だけの平行移動は、 $\pi/4$ だけのディジタル化格子の回転に対応するので、上の操作は、ディジタル化格子の無限回の無限小回転の重ね合わせに対応する。これは無限回の計算の手間のため、現実的ではない。有限回の操作でこれを「近似」するために確率概念を導入することは容易である。すなわち、格子の素片のランダムな、図形上への投下を考える。ランダムな向きをした平面を、 ROP と略記する。今の場合、平面は素片と意味する。

ROP の投下に対する、2種の期待値を定める。

$$\mu = \text{期待値} \{ (\text{図形}) \cap (\text{素片}) \neq \emptyset \}$$

$$\nu = \text{期待値} \{ (\text{図形の境界}) \cap (\text{素片}) \neq \emptyset \}$$

又、 μ , ν をもとにして得られる図形の面積、周囲長、形状因子をそれぞれ、 Q^* , P^* , S^* と書く。

周囲長、 P^*

まず、周囲長を考える。当然、 P^* は ν から得られる。 ν の定義には、図3に示す様子を全ての交わりが含まれているが、イの様を交わりを、周囲長として考えられる方が自然で

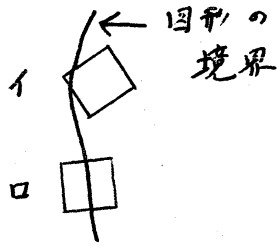


図-3

ある。この様な事象の発生する確率を φ とする。すなわち、 $\varphi = \text{確率}\{\text{イ}\}$

これを用いると、デジタル化された周

囲長は、 $p_d = (1 - \varphi) \nu$

と書き得る、デジタル化誤差 (1) を考え、周囲長を、

$$p^* = p_d / \omega = \frac{1 - \varphi}{\omega} \nu \quad \dots (3)$$

と置く。確率 φ は、次の様にして求める。図4に示さ

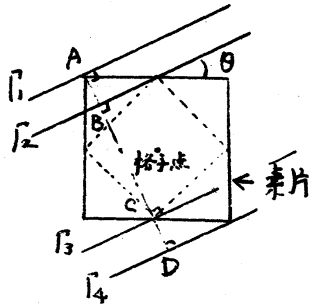


図-4

れた、 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$ を各々図形の境界と

すると、境界と、素片内の点線が交わり

方の確率を φ として差しつかえ方々。

よって、

$$\varphi = \frac{|AB| + |CD|}{|AD|} = \begin{cases} \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} & (0 \leq \theta < \pi/4) \\ \frac{\cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} & (\pi/4 \leq \theta < \pi/2) \end{cases}$$

一方、2. に述べた様に、 $\omega = \cos \theta$ ($0 \leq \theta < \pi/4$), $\sin \theta$ ($\pi/4 \leq \theta < \pi/2$)

なので、(3) より

$$p^* = \frac{\nu}{\sin \theta + \cos \theta}$$

を得る。この表式は、角度 θ にかかわらず一応とできるので、

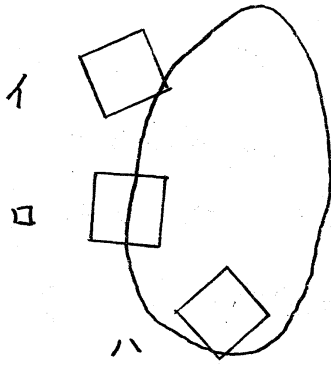
平均化操作により、周囲長 p^* は次の様に得る。

$$p^* \doteq 0.7935 \cdot \nu \quad \dots (4)$$

面積 a^*

上の様に、ROP投下により図形の周囲長を求め得るので

、(4)を用いることにより、精密な面積の公式(2)を簡単に得ることが出来る。周図長の場合と同様に、図形と素片



図・5

の交わりは、図5に示される様に多様である。IとIIの場合の発生は同じ様になる。

確率{I} = 確率{II}

としうるか、面積に対しては、問題となるのは、Iの場合のみであるので、定義

より、 $a_d = \mu - \frac{\nu}{2}$

よって、求めるべき面積の公式は、

$$a^* = \hat{a}_d = \mu - \frac{\nu}{2} - 1 \quad \dots (5)$$

一般に知られている、ランダム試行による面積の公式は、モンテカルロ法によるものであるが、この方法では、格点に対応する量により、しか面積を表現し得ないので、ROPによる公式(5)は、モンテカルロ法によるものと十分比較し得る結果を生むものと期待される。

形状因子、 S^*

ROPによる形状因子は、(4)、(5)より容易に、

$$S^* = p^2/a^* \cong (0.7935 \cdot \nu)^2 / (\mu - \frac{\nu}{2} - 1) \quad \dots (6)$$

となり、問題の角度依存性は消えている。次ぎに、これらの公式を、連続図形に対するものと比較する。

4. 公式の比較

B. で得た公式を幾何学で確立された諸定理と比較することにより、その正当性を見る。

周回長に関して、長さ ρ の曲線の長さを求めるのに、その上に落下させた平行直線群との交点の数 n を用いる Cauchy - Crofton の公式がある。平行直線群を $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$ と表現することにより、この公式は、

$$\iint n \, d\rho \, d\theta = 2\rho$$
 と書ける。これに対し、曲線 r 、回転角 $\frac{k}{m}\pi$ ($k=0, 1, \dots, m-1$) の平行直線群を用いた場合に、次の様に近似され得ることから、Moran により、示された。^{*)}

$$\rho = \frac{1}{2} \iint n \, d\rho \, d\theta \doteq \frac{1}{2} n r \frac{\pi}{m}$$

ここで、一辺の長さ、1 の正方格子を考えると、 $r=1$ 、 $m=2$ とし得るので、

$$\rho \doteq \frac{1}{2} n r \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} n \quad \dots (7)$$

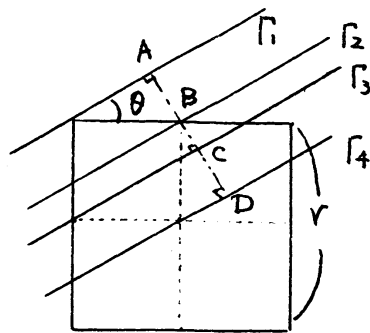


図 - 6

交点数 n は、図 6 より、素片中の点線と、図形の境界 ($l_1 \sim l_4$) との交点数で代表されることが得るので、一辺の長さ r の素片に対し、図が素片の上半分に対応するので、

$$n \Rightarrow 2\{|AB| \times 0 + |BC| \times 1 + |CD| \times 2\} = r(\sin \theta + \cos \theta)$$

一方、ROP で問題とした期待値 ρ は、図 6 において

$$V \Rightarrow 2|AD| = r(\sin \theta + \cos \theta)$$

に対応し、 $\mu_V = 1$ となる。(4), (7) より、

$$P^* \approx 1.010 \cdot P \quad \dots (8)$$

となり、我々の得た周囲長の公式(4)が、連続図形の周囲長と、きわめて良く近似することかわかる。

次に、面積の公式と比較するため、積分幾何学で確立された格子に関する定理⁵⁾

「素片の面積、周囲長を a_0, p_0 とすると、それがランダムに、面積 a 、周囲長 p の図形上に投下された時、その交わりの期待値は、 $\mu = \frac{2\pi(a+a_0) + p p_0}{2\pi a_0}$ である。」

に着目する。 $a_0 = 1, p_0 = 4$ の正六格子では、 $\mu = 1 + \frac{2}{\pi} p + a$ となる。 μ の定義から、 τ 等入したものと同じであることより、(5), (8) を用い、

$$a^* = \mu - \frac{p}{2} - 1 = a \quad \dots (9)$$

を得る。すなわち、ROP 投下による面積の近似(5)は、きわめて優れていることかわかる。

(6), (8), (9) より、形状因子は、

$$S^* = \frac{P^{*2}}{a^*} \approx 1.021 \frac{P^2}{a} = 1.021 S \quad \dots (10)$$

となり、 S^* の振る舞いは、連続図形に対するものと同じであることかわかる。

5. 積分計算への応用、シミュレーション

ROP の図形上への投下により、十分な精度で図形の面積を求め得ることがわかった。もし、「 ROP 発生器」の様なハードウェアを製作し得たから、投下回数を増加させ、通常のモンテカルロ法によるもの以上の精度で図形の面積を計算し得ることが期待される。現在では、このような装置が開発されていなかったため、計算機により、「3次元」乱数を発生させ、 ROP 発生器に代えわけられない。こうして得られたシミュレーション結果のいくつかを、表1, 2に示される。

表1 では、最初の目的であった図形の形状因子に肉する結果がまとめられている。試行回数が多い場合には、(10)式で与えた評価に近づくことがわかる。内について、半径が大きいほど良くなる。最初の「病理現象」に肉する文献においても、図形は十分大きい場合を扱っており、より半径 R を大にすると、やはり (10) 式の評価が得られると期待される。

表2 では、いくつかの積分計算に、 ROP の投下の投法が適用されている。この範囲では、モンテカルロ法に比し、良い結果を得るとはいえないが、試行回数の増加による精度の向上の他、投下素片の大きさにより肉するパラメータ変化による精度の向上も考えられるので、例3の様に変動の激し

い関数の積分に対しては、最終的には、モンテカルロ法によるものも凌ぐ結果を得ることが期待される。

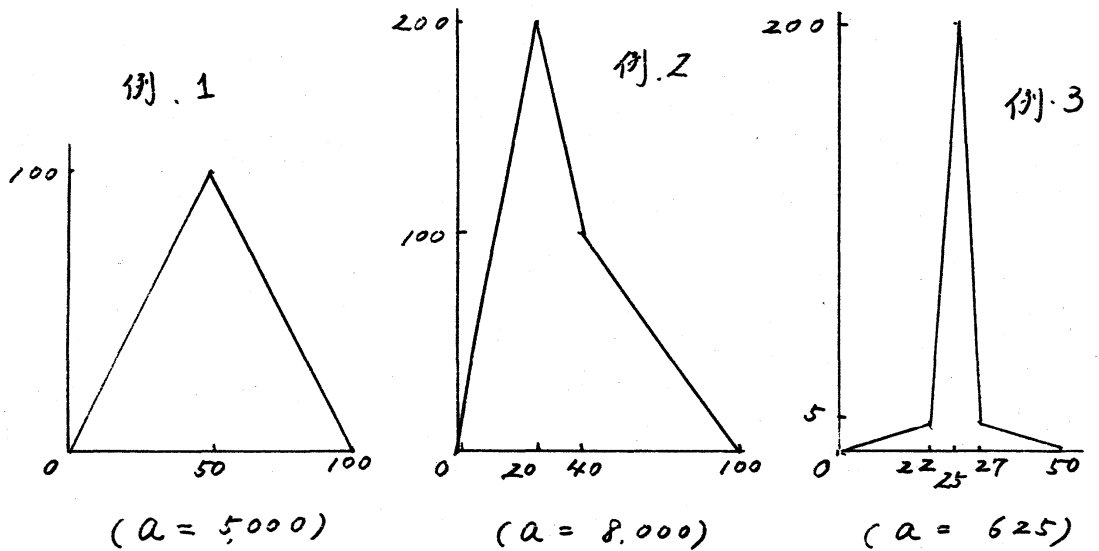
参考文献

- 1). A. Rosenfeld, IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.,
SMC-4 (1974), 221
- 2). Z. Kulp, Computer Graphics and Image Processing,
6 (1977), 434
- 3). H. Steinhaus, Colloq. Math., 3 (1954), 1
- 4). P. A. P. Moran, Biometrika, 53 (1964), 359
- 5). L. A. Santalo, "Integral Geometry and Geometric
Probability", Addison-Wesley (1976), 128~142.

表 - 1. 形状因子

図 形	試行回数	S^*	S^*/S
正方形 (30 × 30)	64,000	16.30	1.019
" (100 × 100)	64,000	16.28	1.018
ダイヤモンド (30 × 30)	32,000	16.35	1.021
19 (R = 20)	50,000	13.76	1.095
" (R = 40)	50,000	13.14	1.046

表 - 2. 積分計算への応用



例	試行回数	ROP (誤差)	モンテカルロ (誤差)
1	50,000	4939.6 (0.012)	5050.7 (0.010)
2	50,000	7869.1 (0.016)	7911.0 (0.011)
3	50,000	596.0 (0.046)	650.0 (0.040)