

Automorphisms of Commuting Properties

城西大 理 青 木 統 夫

§ 1. 序

spectrally equivalent は必ずしも conjugate でないことはよく知られている。[1] は automorphisms が conjugate であるとき、その行動を compact connected metric abelian group 上で研究している。本稿では [1] の結果 (generalized commuting order of a transformation) を有限測度空間で論じ、そして $C_2(T)$ の spectrum を解析することによって、ergodicity そして mixing の様子を分析する。

§ 2. 準備

(X, Σ, m) : 有限測度空間。

G : 与えられた (X, Σ, m) に関係して決定された measure algebra 上で定義されるすべての metric automorphism から成る group (measure algebra 上の automorphism を metric automorphism であるという)

$$C_0(T) = \{I\} \quad (I \text{ は } G \text{ の identity})$$

$$C_n(T) = \{S \in G : STS^{-1}T^{-1} \in C_{n-1}(T)\}, \quad n=1, 2, \dots$$

$$N(T) = \min \{N : C_N(T) = C_{N+1}(T)\}, \text{ otherwise } N(T) = \infty$$

($N(T)$ は T の generalized commuting order である))

注 1. $C_N(T) = C_{N+1}(T) \Rightarrow C_n(T) = C_{n+1}(T) \quad (n \geq N)$

2. $R, T_1, T_2 (\in G)$ に対し $RT_1R^{-1} = T_2$

$$\Rightarrow N(T_1) = N(T_2)$$

$$\mathcal{O} = \{f \in L^2(X) : T_T f = \alpha f \text{ a.e.}, \|f\|_2 = 1\}$$

定義 1. $T (\in G)$ が discrete spectrum をもつ $\Leftrightarrow L^2(X) = \overline{\text{span } \mathcal{O}}$

注 3. $\mathcal{O}$ は cyclic group K を含む.

4. $T (\in G)$ が discrete spectrum をもち、そして ergodic

$\Rightarrow \|f\| = 1$ a.e. ($f \in \mathcal{O}$), factor group $\mathcal{O}/K$ と isomorphic である subgroup $\mathcal{O}(T)$ (orthonormal base) が存在して, $\mathcal{O} = K \times \mathcal{O}(T)$.

定義 2. $T (\in G)$ が continuous spectrum をもつ $\Leftrightarrow$ constant 以外に proper function をもたない.

注 5. $T (\in G)$ が weakly mixing である必要十分条件は T が continuous spectrum をもつことである.

定義 3. $T (\in G)$ が infinite Lebesgue spectrum をもつ $\Leftrightarrow$

$\{f_i^n : n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, i \text{ runs infinite index set}\}$ が $L^2(X)$ の orthonormal base である. 但し, $T_T f_i^n = f_i^{n+1}$.

以後, $f (\in L^2(X))$ が $T (\in G)$ の proper function であるとして, その

proper value が α であるとき, $\alpha_T(f) = \alpha$ と表わすことにする.

§ 3. Automorphism の commuting order

定理 1. $T \in G$ が totally ergodic, そして discrete spectrum をもつとする. このとき $C_2(T) = C_3(T) (\neq C_1(T))$, 更に $C_0(T)$, $C_1(T)$ そして $C_2(T)$ は G の subgroup である.

この定理の証明において必要とされる次の補題を示す.

補題 1. $T \in G$ が ergodic, そして discrete spectrum をもつとする. このとき $S \in C_1(T)$ である必要十分条件は $\mathbb{D}(T)$ のすべての element が S の proper function であることである.

補題 2. もしも $\mathcal{A}$ が complex conjugation のもとで閉じている $L^\infty(X)$ の subalgebra, $L^2(X) = \overline{\text{span } \mathcal{A}}$ そして ∇ は $L^2(X)$ から $L^2(X)$ の上への linear isometry であって, $\|\nabla p\|_\infty = \|p\|_\infty$ ($p \in \mathcal{A}$) をみたすならば, $\nabla L^\infty(X) = L^\infty(X)$ である.

補題 3. $T \in G$ は ergodic, そして discrete spectrum をもつとする. もしも $S_2 \in C_2(T)$ であれば, $\mathbb{D}(T)$ の element を proper function にもつ $W \in G$, そして $\nabla_{S_2} \mathbb{D}(T) = \mathbb{D}(T)$ なる $S \in G$ が存在して, $S_2 = SW$ である.

証明. $S_2 T S_2^{-1} T^{-1} = S_1$ なる $S_1 \in C_1(T)$ が存在するから, $S = S_1 T$ とおくと, $\nabla_{S_2} \nabla_T = \nabla_S \nabla_{S_2}$. $\mathbb{D}(T)$ は $L^2(X)$ の orthonormal base であるから, すべての $f \in \mathbb{D}(T)$ に対して一意的に $g \in \mathbb{D}(T)$ が存在して, $\alpha_T(g) = \alpha_{S_2}(f)$ とできる. 今, $\nabla f = g$ とおくと, ∇ は

$\mathcal{O}(T)$ から $\mathcal{O}(T)$ 上への 1-1 map である. “上へ” の map であることを示す. $V_{S_2} V_T = V_S V_{S_2}$ によって, $V_T (V_{S_2}^{-1} f) = \alpha_S(f) (V_{S_2}^{-1} f)$ a.e., $V_T (Uf) = \alpha_T(Uf) (Uf)$ a.e. ($f \in \mathcal{O}(T)$) であるから, $|\beta(f)| = 1$ なる f に依存した number $\beta(f)$ が存在して, $V_{S_2}^{-1} f = \beta(f) Uf$ a.e. $V_{S_2}^{-1} \mathcal{O}(T)$ は orthonormal base であるから, $\{Uf : f \in \mathcal{O}(T)\}$ も orthonormal base. したがって, U は “上へ” の map である.

次に, U は “1-1” map であることは明らか.

$$V(\sum_{i=1}^n \gamma_i f_i) = \sum_{i=1}^n \gamma_i Uf_i \quad (f_i \in \mathcal{O}(T)) \text{ とおくと, } \|V(\sum_{i=1}^n \gamma_i f_i)\|_2 = \|\sum_{i=1}^n \gamma_i f_i\|_2.$$

したがって, V は $L^2(X)$ から $L^2(X)$ 上への一意的に拡張される

isometry である. 次に, $Rf = \beta(U^{-1}f)f$ ($f \in \mathcal{O}(T)$) とおく. このとき

R は $\mathcal{O}(T)$ から $\{\beta(U^{-1}f)f : f \in \mathcal{O}(T)\}$ 上への 1-1 map であ

り, $V'f = Rf$ a.e. ($f \in \mathcal{O}(T)$) なる一意的に拡張された linear

isometry V' をもつ. $A(T)$ は polynomial $\sum_{i=1}^n \gamma_i f_i$ ($f_i \in \mathcal{O}(T)$) から成

る space とする. このとき $A(T)$ は各々の element に対して,

それぞれの複素共役な element を含む algebra. V, V' は $A(T)$

上で multiplicative. 従って $\|(VP)^n\|_2 \leq m(X)^{1/2} \|P\|_2^n$ ($P \in A(T)$)

であるから, $\|VP\|_\infty \leq \|P\|_\infty$. 同様にして $\|V^{-1}P\|_\infty \leq \|P\|_\infty$ ($P \in A(T)$)

であるから, $\|VP\|_\infty = \|P\|_\infty$. 補題 2 によって $V L^\infty(X) = L^\infty(X)$. 次

に $f, g \in L^\infty(X)$ に対して, $\{P_n\}, \{g_n\} \subset A(T)$ をとって

$P_n \rightarrow f$ in $L^2(X)$ ($n \rightarrow \infty$), $g_n \rightarrow g$ in $L^2(X)$ ($n \rightarrow \infty$) とで

きるから, $V(fg) = Vf \cdot Vg$ a.e. したがって, V^{-1} を生成する $S \in G$

が存在する。同様な方法によつて、 V^{-1} を生成する $W(\in G)$ が存在する。そして $V_{S_2} = V_S V_W$, 故に $S_2 = SW$.

補題 4. $T(\in G)$ は totally ergodic , そして discrete spectrum をもつとする。 $S(\in G)$ は $V_S \mathcal{O}(T) = \mathcal{O}(T)$, $W(\in G)$ は $\mathcal{O}(T)$ の element を proper function にもつとする。もしも $S'(\in G)$ が存在して、 $S'TS'^{-1}T^{-1} = SW$ ならば、 S は identity である。

証明。 $f \in \mathcal{O}(T)$, そして $Q = SW$ とする。 $V_S f$ の Fourier 展開を $V_S f = \sum_i \langle V_S f, f_i \rangle f_i$ a.e. ($f_i \in \mathcal{O}(T)$) とする。このとき、 $V_S V_T = (V_Q V_T) V_S$ によつて、 $\sum_i \alpha_T(f) \langle V_S f, f_i \rangle = \sum_i \alpha_T(f_i) \alpha_W(f_i) \langle V_S f, f_i \rangle$ $V_S f_i$ a.e. であるから、 $\alpha_T(f) \langle V_S f, V_S f_i \rangle = \alpha_T(f_i) \alpha_W(f_i) \langle V_S f, f_i \rangle$.
もしも f_i が V_S のもとで infinit orbit をもつとすれば、 $\sum_i |\langle V_S f, f_i \rangle|^2 < \infty$ より、 $\langle V_S f, f_i \rangle = 0$. 従つて各々の f_i は V_S のもとで periodic である。 $V_S \mathcal{O}(T)$ は $L^2(X)$ の orthonormal base であつて、 $V_S f$ は $\mathcal{O}(T)$ の periodic element によつて展開されるから、 $\mathcal{O}(T)$ の element は V_S のもとで periodic である。今、或る $f (\in \mathcal{O}(T))$ に対して、 $V_S^n f = f$ a.e. と仮定する。このとき、 $(V_Q V_T)^n f = \alpha_T(f) \alpha_W(f) \alpha_T(V_S f) \alpha_W(V_S f) \cdots \alpha_T(V_S^{n-1} f) \alpha_W(V_S^{n-1} f) V_S^n f$ a.e. であるから、 $\varphi = f^{-1} V_S f$ とおくと、 $(V_Q V_T)^n \varphi = \varphi$ a.e. QT は T と conjugate であつて、 T は totally ergodic であるから、 QT は totally ergodic . 従つて $\varphi = 1$ a.e. 故に、 S は identity である。

定理 1 の証明. $S_3 (\in C_3(T))$ に対して, $S_2 (\in C_2(T))$ が存在して, $V_{S_3} V_T V_{S_3}^{-1} = V_{S_2} V_T$. 補題 3 によつて, $S_2 = SW$ なる $S, W (\in G)$ が存在する. 更に補題 4 によつて, S は identity, $f (\in D(T))$ に対して, $V_{S_3} V_T V_{S_3}^{-1} f = V_{S_2} V_T f = \alpha_T(f) \alpha_W(f) f$ a.e., $V_T f = \alpha_T(f) f$ a.e. であるから, $D(T)$ の element は $S_3 T S_3^{-1} T^{-1}$ の proper function.

補題 1 によつて, $S_3 T S_3^{-1} T^{-1} \in C_1(T)$, 即ち $S_3 \in C_2(T)$.

次に, $C_0(T), C_1(T)$ は G の subgroup であることは明らかであるから, $C_2(T)$ が G の subgroup であることを示す. $S_2, S_2' (\in C_2(T))$ に対して, 補題 2 によつて, $S[S'], W[W'] (\in G)$ が存在する, そして $S_2 = SW [S_2' = S'W']$. ここで, $V_{(S_2' S_2^{-1})} T (S_2' S_2^{-1})^{-1} T^{-1} (V_S f) = \alpha_T(V_S f)^{-1} \alpha_T(V_S f) V_S f$ a.e. であるから, $D(T)$ の element は $(S_2' S_2^{-1}) T (S_2' S_2^{-1})^{-1} T^{-1}$ の proper function. 故に, $S_2' S_2^{-1} \in C_2(T)$.
これで定理 1 は示された.

定理 1 より次の系をうる.

系 1. 有限測度空間 (X, Σ, m) に, $x, y (\in X) (x \neq y)$ ならば $x \in E_n, y \in E_n^c$ なる可算個の可測集合列 $\{E_n\}$ が存在するという条件を与える. そして $T (\in G)$ が totally ergodic, discrete spectrum をもつとする. このとき, $C_2(T) = C_3'(T) (\neq C_1'(T))$, 更に $C_0'(T), C_1'(T)$ そして $C_2'(T)$ は G' の subgroup である.

ここで $G', C_n'(T)$ は次のように約束する:

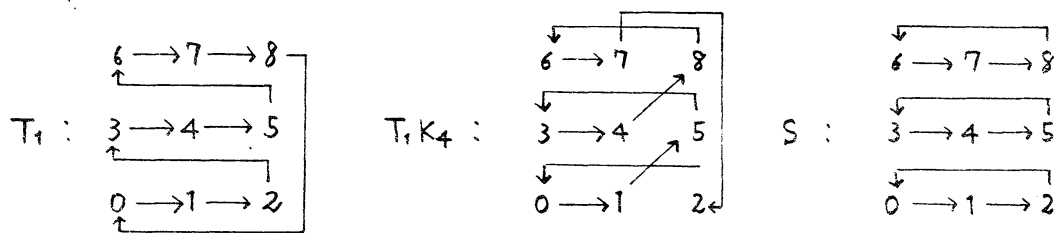
G' は (X, Σ, m) 上で定義されるすべての automorphism から成

group. $C_0(T) = \{S \in G' : S = I \text{ a.e.}\}$ (I は G' の identity),
 $C_n(T) = \{S \in G' : S^{-1}T^{-1}ST \in C_{n-1}(T)\}$, $n=1, 2, \dots$.

例 11. discrete spectrum をもつ $T \in G$ が ergodic であって
totally ergodic でないとき, $C_2(T) \neq C_3(T)$ である例が知られて
いる.

$G(9) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ は additive group (mod 9) として
 $T_k: x \rightarrow x+k \pmod{9}$, として I は identity とする.

T_a が ergodic である必要十分条件は a が $G(9)$ の生成元である
ことである. $G(9)$ 上の automorphism K_k のすべてを求め
ると, $K_1(1)=1$, $K_2(1)=2$, $K_4(1)=4$, $K_5(1)=5$, $K_7(1)=7$ として
 $K_8(1)=8$, $K_1 = (K_2)^3 = (K_5)^6 = (K_7)^3 = (K_8)^2 = I$. このとき T_1
 $T_1 K_4$ の行動は下図のようになる.



S は上のような permutation とする. このとき, $S^{-1}T_1S = T_1K_4$
 $S^3 = I$. S は T_aK_k の form ではないことが分かるから,

$S \notin C_2(T_1^{-1})$. $T_3T_1(T_6K_4) = (T_6K_4)T_1$ であるから, $S \in C_3(T_1^{-1})$.

§ 4. $C_2(T)$ の spectral analysis

補題 5. $T \in G$ は totally ergodic, として discrete spectrum
をもつとする. $\mathcal{V}_S$ は $\mathcal{V}_S \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T)$ をみたすとする. もしも

$\mathbb{D}(T)$ の中には ∇_S のもとで "infinite orbit" が存在するならば, $\mathbb{D}(T)$ には無限に多くの infinite orbit (∇_S のもとで) が存在する.

補題 5 を用いて, 次の定理が示される.

定理 2. $T \in G$ は ergodic, そして discrete spectrum をもつとする. このとき, $L^2(X)$ の subspace H が存在して, $S_2 \in C_2(T)$ は H で discrete spectrum をもち, $H^\perp$ で continuous spectrum をもつ. もしも S_2 が totally ergodic であれば, S_2 は $H^\perp$ で infinite Lebesgue spectrum をもつ.

証明. もしも $S_2 \in C_1(T)$ であれば, S_2 は discrete spectrum をもつことは明らか. 従って $S_2 \notin C_1(T)$ として $S_2 \in C_2(T)$ であるときを示せばよい. 補題 3 によって $S_2 = SW$ なる $S, W \in G$, $S \neq I$ が存在する. H は ∇_S のもとで periodic function $f \in \mathbb{D}(T)$ の全体によつて span された subspace とする. $H(f)$ は finite orbit $f, \dots, \nabla_S^{n-1}f$ によつて span された subspace とする. H は $H(f)$ の direct sum である. 今, $f \in \mathbb{D}(T)$ が period n をもてば, $\nabla_{S_2}(\nabla_S^i f) = \alpha_W(\nabla_S^i f) \nabla_S^{i+1} f$ a.e. ($i = 1, 2, \dots, n-1$). (∇_{S_2}) は $\nabla_{S_2}|_{H(f)}$ によつて決定される matrix とする. このとき, $\det(\nabla_{S_2}) = (-1)^{n-1} \alpha_W(f) \alpha_W(\nabla_S f) \cdots \alpha_W(\nabla_S^{n-1} f)$. (∇_{S_2}) の character equation は $(-1)^n \lambda^n + \det(\nabla_{S_2})$ で与えられる. Proper value を $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ とすれば, λ_j に対応する proper function g_j が存在して, $H(f)$ は $\{g_0, g_1, \dots, g_{n-1}\}$ によつて

spanされる。故に S_2 は H で discrete spectrum をもつ。 $O(f_\alpha)$ は V_{S_2} のもとでの $f_\alpha (\in \mathcal{O}(T))$ の infinite orbit とすれば、 $H^\perp = \overline{\text{span} \bigcup_\alpha O(f_\alpha)}$ 、故に、 S_2 は $H^\perp$ で continuous spectrum をもつ。もしも S_2 が totally ergodic であれば、 S は補題5の条件を満たすから、 S_2 は $H^\perp$ で infinite Lebesgue spectrum をもつ。

定理3. $T(\in G)$ は ergodic, そして discrete spectrum をもつとする。もしも $S_2(\in C_2(T))$ が totally ergodic, $S_2 T S_2^{-1} T^{-1}$ が ergodic であれば、 S_2 は infinite Lebesgue spectrum をもつ。

証明. 補題3によつて、 $S_2 = SW$ なる $S, W(\in G)$ が存在する。 $f \in \mathcal{O}(T)$ として $V_S f = f$ a.e. と仮定するとき、 $V_{S_2} f = V_S V_W f = \alpha_W(f) V_S f, V_{S_2 T S_2^{-1} T^{-1}} f = f$ a.e. 故に $S_2 T S_2^{-1} T^{-1}$ が ergodic であるから、 $f = \text{constant}$ a.e. S_2 の totally ergodicity の条件を使つて、 S は ergodic であることが分かる。補題5によつて、 $\mathcal{O}(T)$ には無限に多くの infinite orbit だけが存在する。これ故に、 S_2 は infinite Lebesgue spectrum をもつ。

定理3から次の系をうる。

系2. $T(\in G)$ は ergodic, そして discrete spectrum をもつとして、 $S(\in G)$ は $V_S \mathcal{O}(T) = \mathcal{O}(T)$ を満たし、 $W(\in G)$ は $\mathcal{O}(T)$ の element を proper function にもつとする。このとき、 SW が infinite Lebesgue spectrum をもつ必要十分条件は S が infinite Lebesgue spectrum をもつことである。

T は ergodic, discrete spectrum をもつとする. このとき, 補題 3 によって, $S_2 (\in C_2(T))$ に対して, $V_{S_2} \mathcal{O}(T) = \mathcal{O}(T)$, $V_W f = \alpha_W(f) f$ a.e. ($f \in \mathcal{O}(T)$) なる $S, W (\in G)$ が存在して $S_2 = SW$ とできる (*).

$\mathbb{F}(S) = \{f \in \mathcal{O}(T) : f \text{ is periodic under } V_S\}$, $\mathcal{M}(W) = \{\alpha_W(f) : f \in \mathcal{O}(T)\}$
 このとき, S が ergodic でない必要十分条件は $\mathbb{F}(S) \neq \{1\}$ であることである. $\mathcal{M}(W)$ は K の subgroup である.

定理 4. $T (\in G)$ は ergodic, そして discrete spectrum をもつとする.

(1) $C_2(T)$ に属する $S_2 = SW$ (S, W は (*) の条件を満たすとする) は continuous spectrum をもたないとする. このとき, S_2 が ergodic である必要十分条件は period n をもつ $f \neq 1 (\in \mathbb{F}(S))$ に対して, f の S_2^n に関する spectrum $\alpha_{S_2^n}(f)$ が $\alpha_{S_2^n}(f) \neq 1$ であることである.

(2) $S_2 (\in C_2(T))$ が ergodic, そして $\mathcal{M}(W)$ は 1 を除いて finite order を含まないとする. このとき, S_2 が totally ergodic である必要十分条件は, $f (\in \mathcal{O}(T))$ に対して $V_{S_2}^n f = \alpha_{S_2^n}(f) f$ a.e. であれば, $V_{S_2} f = \alpha_{S_2}(f) f$ a.e. なることである.

証明. (1): $f \neq 1 \in \mathbb{F}(S)$ は period n として, $V_{S_2}^n f = \alpha_{S_2^n}(f) f$ a.e. に対して $\alpha_{S_2^n}(f) = 1$ と仮定する. このとき, $h = \sum_{k=0}^{n-1} V_{S_2}^k f \neq \text{constant}$ a.e. として $V_{S_2} h = h$ a.e. であるから, S_2 は ergodic ではない. 逆に, period n をもつ $f (\in \mathbb{F}(S))$ に対して, f の S_2^n に関する

spectrum を $\alpha_{S_2^n}(f)$ として, $\alpha_{S_2^n}(f) \neq 1$ と仮定する. $\nabla_{S_2} h = h$ a.e. ($h \in L^2(X)$) に対して, h の Fourier 展開を $h = \sum_i \langle h, f_i \rangle f_i$ ($f_i \in \mathcal{O}(T)$) とする. もしも $f_i \neq 1 \notin F(S)$ であるとき, h と $\nabla_{S_2} h$ の Fourier 係数を比較すると, $\langle h, f_i \rangle = 0$. もしも $f_k \neq 1 \in F(S)$ その period が n であれば, $\langle h, f_k \rangle = \alpha_{S_2^n}(f_k) \langle h, f_k \rangle$. 仮定によつて $\alpha_{S_2^n}(f_k) \neq 1$ であるから, $\langle h, f_k \rangle = 0$. 故に, S_2 は ergodic. (1) は示された.

(2): S_2 が totally ergodic であるとする. このとき, 補題 4 の証明から, $f \in \mathcal{O}(T)$ に対して $\nabla_{S_2}^n f = f$ a.e. であれば, $\nabla_{S_2} f = f$ a.e. 逆に, $\nabla_{S_2}^n f = f$ a.e. ($f \in L^2(X)$) と仮定する. このとき, S_2 の ergodicity から, $f = \text{constant}$ a.e., 故に S_2 は totally ergodic. (2) は示された.

文 献

- [1] L.M. Abramov : Metric automorphisms with quasi-discrete spectrum, Amer. Math. Soc. Transl. 39, (2) 37-56 (1967).
- [2] R.L. Adler : Generalized commuting properties of measure preserving transformations, Trans. Amer. Math. Soc. 115, 1-13 (1965).
- [3] N. Aoki : On generalized commuting properties of metric automorphisms, Proc. Jap. Acad. 44, 467-471

(1968).

[4] N. Dinculeanu and C. Foias : , A universal model for ergodic transformations on separable measure space , Michigan Math. Jour. 13 , 109-117 (1966).

[5] F. J. Hahn : On affine transformations of compact abelian groups , Amer. Jour. of Math. 85, 428-446 (1963).

[6] F. J. Hahn and W. Parry : Minimal dynamical systems with quasi-discrete spectrum , Jour. London Math. Soc. 309-323 (1965).

[7] P. R. Halmos : Lectures on ergodic theory , Math. Soc. of Japan , Tokyo (1956).

[8] P. R. Halmos and J. von Neumann : Operator methods in classical mechanics II , Ann. of Math. 43, 332-350 (1942).

[9] A. H. M. Hoare and W. Parry : Semi-groups of affine transformations , Oxford Quart. Jour. Math. 17, 106-111 (1966).

[10] A. G. Kurosh : The theory of groups I , Chelsea, New York (1955).