

氏 名	伊 藤 公 毅
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2958 号
学位授与の日付	平 成 18 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	Elliptic Hypergeometric Functions Associated to the Configuration Space of Three-Points on an Affine Elliptic Curve (楕円曲線上の3点配置空間に附随する超幾何関数について)
論文調査委員	(主 査) 教 授 深 谷 賢 治 教 授 河 野 明 助教授 梅 田 亨

論 文 内 容 の 要 旨

伊藤公毅の博士論文「楕円曲線上の3点配置空間に附随する超幾何関数について」は楕円関数上の局所系の「周期」が定める関数を考察したものである。

より正確に述べると、楕円曲線から3点をのぞいた空間の上の、正則関数の分数冪を、しかるべき道(局所系に関するホモロジー群の元、あるいはサイクル)に沿って積分した値を考え、それをのぞく3点のモジュライ空間上の関数と見なしたものを考察したものである。

ここで積分を考えるサイクルとは、3点のうち2つ点を結ぶみちを考え、それを両端で「正則化」したもの(および、楕円曲線上の閉曲線にあたるサイクル)である。

また、被積分関数は、楕円関数をいくつか掛け合わせたものの、分数冪であり、考察される積分は

$$\int_c \left(\frac{\sigma(t-x_0)\sigma(t-x_1)\sigma(t-x_2)}{\sigma^3(t)\sigma(x_0)\sigma(x_1)\sigma(x_2)} \right)^\alpha dt$$

と表すことができる。(ここで σ はワイエルシュトラウスの σ 関数である。)

リーマン球面の場合の同様な関数は、ガウスの超幾何関数である。超幾何関数を、そのような、「正則化された道が表す局所係数ホモロジー群におけるサイクルに対する積分」と見なす考え方は、青本によって提示された。この方法にもとづき、青本らによって、超平面配置の場合の超幾何関数とその立場から詳しく考察されている。

伊藤はリーマン球面と並んで基本的である楕円曲線の場合を初めて考え、上記の関数を考察した。

博士論文では、局所系のドラムコホモロジー群や、ホモロジー群を計算することから初めて、得られる関数の満たす微分方程式が具体的に計算されている。(これは、対応するガウス・マニン接続を具体的に求めることによってなされている。)また、その微分方程式の特異点(3点のうち2点が一致するところなどに対応する)での振る舞いが調べられている。

得られた微分方程式は確定特異点型の微分方程式で、いままで知られていなかった新しい方程式である。

さらに、この微分方程式の解の接続が定めるモノドロミー行列が具体的に計算されている。これは、消滅サイクルに関するピカル・レフシツの理論の相対コホモロジー版を考察することによってなされている。

さらに、微分方程式が退化する場合を考察し、ロリチュエラの超幾何関数が現れることを見いだしている。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

超幾何関数はガウスに始まる長い歴史を持つ研究対象であり、その重要性は広く認められている。

超幾何関数の研究の中で、その満たす微分方程式、ベキ級数展開などとならんで重要なものが、超幾何関数の積分表示である。

最近になって、青本によって発見された局所系のド・ラームコホモロジーと局所係数ホモロジー群の元のペアリングによって超幾何関数の積分表示を考える方法は、重要なもので、その意義は確立している。特に超平面配置などの場合などが、この方法で深く研究されてきている。

超平面配置（すなわちリーマン球面内の点は位置の高次元化）は、ガウスの超幾何関数（リーマン球面内の3点は位置の場合）の一般化として自然な一つの方角である。

一方で、リーマン球面をより一般のリーマン面に一般化することも自然かつ基本的であり、さらには高次元の一般の代数多様体を考えることもできる。

伊藤は、リーマン球面について基本的な場合である楕円曲線の場合を考察した。すなわち、楕円関数の分数冪の積分が表す超幾何関数を考察した。

伊藤が考察した場合が、基本的な場合の一つであり、これ場合の研究が超幾何関数の自然な一般化の一つとして重要であるのは明らかであり、むしろいまだそのような考察がなされてこなかったことが不思議である。

伊藤は、この基本的な場合に現れる関数について、精密な研究を行い、それが満たすべき微分方程式の具体的な決定や、モノドロミーの計算、退化の様子など、調べるべきことを網羅的に調べている。

楕円曲線は射影空間に比べてより幾何学的な対象であり、モノドロミーの計算などには、ホモロジーに関する幾何学的事柄（たとえばピカル・レフシッツ理論などが現れる）。

また、微分方程式を具体的に書き上げ、その退化などの様子を精密に調べるには、多大の計算を要する。

このように、伊藤の研究は、多くの方法を用いた、非自明な考察を多く含むもので、明らかに基本的である、楕円曲線上の楕円関数の分数冪の積分で得られる関数という対象に対して、多くの結果をもたらすものである。

得られた結果は、共形場の理論などとの関係も期待され、また、種数の高い場合への一般化や、高次元への拡張など、その先に多くの研究が行われる余地をもつものである。

以上の理由で、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。