

On certain standard subgroups

Kensaku Gomi (Tokyo Univ.)

Iszumi Miyamoto (Tsukuba Univ.)

Hiromichi Yamada (Tokyo Univ.)

成分型の群について、「標数 2 階数 2 の Lie 型の群を成分とする群について」(有限群論 数理解析研究所講究録 277, 1976 年)に続く近況を報告する。成分型の群に関して、基本的なものは次の問題である。

問題 1 $\mathcal{F}$ を単純群のある family とする。有限群 G の $\mathcal{F}$ -involution t の中心化群 $C(t)$ の 2-成分 L で、 $L/Z^*(L)$ が $\mathcal{F}$ に属するものがあれば、 L の正規包 $\langle L^G \rangle$ の組成因子はすべて $\mathcal{F}$ に属する。

Aschbacher, Fiebig の定理により、 $B(G)$ -conjecture のもとで、上の L は G の標準部分群としてよいので、次の問題が研究さ

れるようになった。

問題 2 L を有限群 G の標準部分群とする。 $L/Z(L)$ が既知の単純群であるとき、 $\langle L^G \rangle$ を求めよ。

この問題についての現状を報告する前に、背景となっている $B(G)$ -conjecture との関連を述べる。 $B(G)$ -conjecture は次の有限群論全体における大変重要な予想より導かれる。

Unbalanced Group Conjecture 有限群 G において、 $F^*(G)$ が単純で、 G のある involution t について $O(C(t)) \neq 1$ とするならば、 $F^*(G)$ は、交代群、奇数位数の体上の Chevalley group、 $PSL(3, 4)$ 又は He に同型である。

この予想は、Aschbacher, Thompson, R. Solomon をはじめとする多くの人々の努力の結果、M. Harris の分担していた最後の部分が最近次のような仮定のもとで解決された。

仮定 G を Unbalanced Group Conjecture に対する最小の反例とするとき、 $F^*(N)$ が単純となる G の真の section N において $\bar{r} = \bar{r}(p)$, $p = \text{奇素数}$, として問題 1 は正しいとする。

ここで、 $\mathcal{F}(p)$ は既知の単純群のほとんどすべてを、 $\text{Chev}(p)$ (標数 p の有限体上の Chevalley 群) を軸に類別したものである。しかし、その類別は複雑に入り込んでいて、特に $\mathcal{F}(3)$ には $\text{Chev}(2)$ のほとんどすべて、 $\mathcal{F}(3)$ と $\mathcal{F}(5)$ には交代群が含まれている。従って、既知の単純群のほとんどすべてについて上のような類別にしたがって問題 1 を解くことが、Unbalanced Group Conjecture の解決のために必要となった。この時、上の帰納的仮定により、問題 2 の形で解けば十分となり、こちらの方面からも問題 2 を取り扱う必要が生じている。

終わりに、問題 2 について報告する。最初に引用した報告の後、 $\text{Chev}(2)$ 以外では、3 元体上の Chevalley 群と Sporadic 群で合わせて 10 個程度の群についてのみ未解決となっている。 $\text{Chev}(2)$ で残っていた場合については、Seitz の次の結果を得ている。「 $O(G) = 1$ 、かつ、 $L/Z(L) \cong \text{PS}_p(4, 2^a)$, $a \geq 2$, $\text{PSU}(4, 2^a)$, $\text{PSU}(5, 2^a)$, $\text{PS}_p(6, 2)$, $\text{PSU}(6, 2)$, $\text{PSO}^+(8, 2)$ の場合、 $L \triangleleft G$, $E(G) \cong L \times L$, $E(G) \in \text{Chev}(2)$, $L = \text{PSO}^+(8, 2)$ かつ $E(G) \cong M(22)$ のいずれかが成立するならば、Lie rank 3 以上の L について $\langle L^G \rangle / O(\langle L^G \rangle) \cong L/O(L) \times L/O(L)$ 又は HS 又は $M(22)$, 又は $\in \text{Chev}(2)$ が成立する。」 $\text{PSU}(4, 2)$ について仮定は明らかにまちがっているが、これは例外的な場合として修正可能なよ

うに見えるので、後は、Lie rank 2 の場合を処理すればよいことになる。以下に、この場合について得られた結果を報告する。

We collect some recently obtained results concerning the following problem.

Problem. Let L be a standard subgroup of a group G . Assume that $|Z(L)|$ is odd and $C_G(L)$ has cyclic Sylow 2-subgroups. Assume further that $LO(G) \neq G$. Then for given $L/Z(L)$, determine the normal closure $X = \langle L^G \rangle$ of L in G .

Theorem 1. If $L/Z(L) \cong \text{Sp}_4(q)$, $q = 2^n \geq 4$, then $X/Z(X)$ is isomorphic to one of the following groups:

$$\text{PSU}_4(q), \text{PSU}_5(q), \text{PSL}_4(q), \text{PSL}_5(q), \text{Sp}_4(q^2), \\ \text{and } \text{Sp}_4(q) \times \text{Sp}_4(q).$$

Theorem 2. If $L/Z(L) \cong \text{PSU}_4(q)$, $q = 2^n \geq 4$, then $X/Z(X)$ is isomorphic to $\text{PSL}_4(q^2)$ or $\text{PSU}_4(q) \times \text{PSU}_4(q)$.

Theorem 3. If $L/Z(L) \cong \text{PSU}_5(q)$, $q = 2^n \geq 4$, then $X/Z(X)$ is isomorphic to $\text{PSL}_5(q^2)$ or $\text{PSU}_5(q) \times \text{PSU}_5(q)$.

Theorem 4. If $L \cong \text{PSU}_4(2)$, then one of the following holds.

- (1) $X/O(X) \cong \text{PSp}_4(3), \text{PSU}_4(3), \text{PSL}_4(3)$, or $\text{PSL}_5(3)$.
- (2) $X \cong \text{PSL}_4(4)$ or $\text{PSU}_4(2) \times \text{PSU}_4(2)$.
- (3) For a central involution z of L , $C_G(z)$ has a quasi-simple subgroup K which satisfies the following conditions:

- (a) $z \in K$ and $W = O_2(K)$ is cyclic of order 4.
- (b) $K/\langle z \rangle$ is a standard subgroup of $C_G(z)/\langle z \rangle$, W is a Sylow 2-subgroup of $C_G(K/\langle z \rangle)$, and $[K, O(C_G(z))]=1$.

- (c) Either $K/O(K) \cong \text{SU}_4(3)$ or $K/Z(K)$ has a Sylow 2-subgroup isomorphic to a Sylow 2-subgroup of $\text{PSL}_6(q)$, $q \equiv 3 \pmod{4}$.

Remark. Case (3) occurs in the automorphism group of $\text{PSU}_5(3)$ with $K \cong \text{SU}_4(3)$.

Theorem 5. Let $L \cong G_2(q)$, $q = 2^n \geq 4$, and assume that every section of G satisfies the $B(G)$ -conjecture. Then X is isomorphic to $G_2(q^2)$ or $G_2(q) \times G_2(q)$.

Theorem 6. Let $L \cong {}^3D_4(q^3)$, $q = 2^n \geq 2$, and assume that every section of G satisfies the $B(G)$ -conjecture. Then one of the following holds.

- (1) $X \cong {}^3D_4(q^6)$ or ${}^3D_4(q^3) \times {}^3D_4(q^3)$.
- (2) $q = 2$, $|G:O^2(G)| = 2$, and $O^2(G)$ contains a subgroup H such that $|O^2(G):H|$ is odd and $H \cong {}^3D_4(q^3) \times {}^3D_4(q^3)$.