

CURVATURE EVOLUTION OF PLANE CURVES
WITH PRESCRIBED OPENING ANGLES

石村 直之 (ISHIMURA, NAOYUKI)

東京大学大学院数理科学研究科

1. K.Ecker and G.Huisken は、 $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) 全体で graph としてあらわされる曲面の平均曲率流を考察した。(Ann. of Math. 130(1989), Invent. Math. 105(1991)) 初期値問題の可解性、長時間後の振る舞い等を示した。特に、初期値がある増大条件をみたせば、時間無限大のとき拡大自己相似解に収束することを証明した。さらにこの拡大自己相似解の分類問題を提出したが、これは現在でも未解決である。

ここでは、一方、一次元全体上において曲線の曲率流を考察する。すなわち

$$\begin{aligned} (1) \quad & u_t = \frac{u_{xx}}{1+u_x^2}, \quad u > 0, \quad \text{in } -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ (2) \quad & u_x \rightarrow -K_2 \text{ as } x \rightarrow -\infty, \text{ and } u_x \rightarrow K_1 \text{ as } x \rightarrow \infty, \\ (3) \quad & u(0, x) = u_0(x) \end{aligned}$$

ここで $0 < K_1 \leq K_2 < \infty$ は任意に指定された定数、 $u_0(x)$ は凸で (2) およびある $C > 0, 0 < \delta \leq 1$ に対し

$$(4) \quad (u_0 - xu_{0x})^2 \leq C(1+x^2)^{1-\delta}$$

をみたすとする。(4)は凸性より導かれないことに注意。条件(4)は本質的に K.Ecker and G.Huisken の増大条件と同じである。そのため解の存在、時間無限大での拡大自己相似解への収束などは同様に示される。この研究の新しいところは、この拡大自己相似解の分類にある。

まず $\tau = \frac{1}{2} \log(1+t)$ として

$$u(t, x) = \sqrt{2(1+t)} \cdot U(\tau, y), \quad y = \frac{x}{\sqrt{2(1+t)}}$$

とおくと、(1)は

$$(5) \quad U_\tau = \frac{U_{yy}}{1+U_y^2} - U + yU_y$$

となる。(5)の定常解を拡大自己相似解という。

定理1. (1)(2)(3)の解が $t > 0$ で存在する。(4)のもとでは、 $t \rightarrow \infty$ のとき(2)をみたす一意の(5)の定常解に収束する。

2. 拡大自己相似解の分類定理を述べておく。少し設定をかえて次の問題を考える。

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{U_{yy}}{1+U_y^2} = U - yU_y, & U > 0 & \text{for } -\infty < y < \infty, \\ U(y) \rightarrow \infty & & \text{as } |y| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

定理2. $0 < K_1 \leq K_2 < \infty$ を任意に与えられた定数とする。(6)の一意解で、それは必然的に凸になるが、次をみたすものが存在する。

$$U(y) = -K_2 y + o(1/|y|) \quad \text{as } y \rightarrow -\infty$$

$$U(y) = K_1 y + o(1/|y|) \quad \text{as } y \rightarrow \infty.$$

詳しい証明は N.Ishimura, Bull. Austral. Math. Soc. 52 (1995) を見られたい。ここでは一意性を示す方針のみ述べる。(6)の解は実は極座標表示できる。今これを認めて

$$(U(\theta), y(\theta)) = (R(\theta) \sin \theta, R(\theta) \cos \theta),$$

ただし $R^2 = U^2 + y^2$ for $\theta_1 < \theta < \theta_2$, $\theta_i \in (0, \pi)$ ($i = 1, 2$) は $\theta_1 = \arctan K_2$, $\theta_2 = -\arctan K_1$ で決める、とおく。すると(6)は

$$(7) \quad \begin{cases} 1 = \frac{(RR_{\theta\theta} - 2R_\theta^2 - R^2)}{(R^2 + R_\theta^2)^2} & \text{for } \theta_1 < \theta < \theta_2, \\ R \rightarrow \infty & \text{as } \theta \rightarrow \theta_1, \theta_2 \end{cases}$$

と変換される。大事な点は、(7)の方程式は $\theta \mapsto \theta + \alpha$ の平行移動により不変なことがある。すなわち結局、次の命題を導けばよいことになる。

命題3. (6)の対称な凸解 $U(y; U_0)$ の 1-parameter family が存在する。対称とは $U_y(0) = 0$, $U(0) = U_0 > 0$ を意味する。

$\alpha(U_0) := \lim_{y \rightarrow \infty} U_y(y; U_0)$ は well-defined、しかも $u_0 \mapsto \alpha(U_0)$ は狭義単調増大で $\mathbf{R}^+ = \{x > 0\}$ からそれ自身への同相写像を与える。