

Marangoni 不安定に対する自由表面の変形の影響

阪市大 理 高島正樹

1. はじめに

静止した水平な流体層を下側から熱した場合に発生する不安定の現象は、その原因を流体の密度の温度変化に基づく浮力であるとする Rayleigh の理論^{1,2)}によって多くの場合よく説明される。ところが、流体が液体で上側の境界面が自由表面の場合には、不安定を引き起こす原因として浮力のほかに表面張力の温度変化に基づく駆動力が加わる。液体層の深さが 1 cm 程度以上の場合にはこれら 2 つの原因のうち浮力の方が主役を演ずるが、深さが 1 mm 程度以下の場合には逆に表面張力による駆動力の方が主役となって浮力はほとんど効かなくなる。Rayleigh の理論の引き金となった Bénard^{3,4)}の有名な実験は鯨脳油の水平層を用いておこなわれたが、その深さは高々 1 mm 程度であり上側の境界面は自由表面であ

った。このため、皮肉なことに Rayleigh の理論は Bénard の実験を説明し得なかったのである。不安定を引き起こす原因として表面張力による駆動力を考慮し、初めて Bénard の実験の理論的説明に成功したのは Pearson⁵⁾ である。Pearson によると、よく知られた Rayleigh 数に代わって Marangoni 数と呼ばれる無次元数が登場するので、自由表面をもつ薄い液体層に発生する不安定の現象はしばしば Marangoni 不安定と呼ばれる。

さて、この Marangoni 不安定に関する理論的研究は Pearson 以来極めて多くの人々によってなされてきたが、これらの大部分は自由表面が常に平面であり変形しないものと仮定している。そしてこの仮定のもとでは、中立状態は定常であり振動モードは存在しないことが Vidal と Acrivos⁶⁾ および Takashima⁷⁾ によって確認されている。これに対して自由表面の変形を考慮した理論的研究は極めて少なく、筆者の知る限りでは五指に満たない。これらの中で代表的なものには Smith⁸⁾ および Zeren と Reynolds⁹⁾ の研究であるが、両者ともに中立状態は定常であると仮定しており、振動モードの有無を検討していないので不完全である。又、両者ともに configuration が Pearson のそれとはかなり異なっている。

一方, Marangoni 不安定に関する実験的研究も Bénard 以来いくつかあるが, それらの中に特に興味深い報告が2つある。1つは, 液体層を下側から冷却した場合にも不安定が発生し, その際現われる細胞状パターンは通常の Bénard の細胞よりもむしろ規則正しいという Block¹⁰⁾ の報告である。もう1つは, 自由表面が下側にあるという特殊な場合(例えば天井に塗ったペンキの層)にも Bénard の細胞によく似た細胞が現われるという Bell¹¹⁾ の報告である。これら2つの観測事実は, 既存の理論では定性的にすら説明できない。

そこで本研究では, 自由表面の変形を考慮し, 振動モードの有無を調べ, 合わせて Block や Bell の観測事実の理論的説明を試みる。なお, configurationとしては Pearsonのそれを採用する。なぜなら, Smith および Zeren と Reynolds が採用した configuration より Pearson のそのの方が Bénard, Block, Bell の実験の状況に近いと考えられるからである。

2. 問題の定式化

一定の深さの, 静止した水平な液体層を考える。下側の境界面内には x_1, x_2 軸をとり, 鉛直上向きに x_3 軸をとる。

下側の境界面 ($x_3 = 0$) は一定の温度 T_0 の固体壁に接し、
上側の境界面 ($x_3 = d$) は自由表面で"そこで"は Newton の
冷却の法則

$$-k \frac{\partial T}{\partial x_3} = h(T - T_A) \quad (2.1)$$

が成り立つものとする。ここで、 T は液体の温度、 T_A は上空
の空気の温度、 k は液体の熱伝導率、 h は自由表面での熱伝
達率である。又、液体層の深さ d は高々 1 mm 程度の場合を
考えるので、浮力の影響は無視できる。これは液体の密度 ρ
を一定と考えることに対応する。

基礎方程式は次の通りである。

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = K \nabla^2 T \quad (2.4)$$

ここで、 v_i は速度ベクトル、 $g_i = (0, 0, -g)$ は重力加
速度ベクトル、 p は圧力、 ν は動粘性係数、 K は温度伝導率
である。なお、 g の値は 980 cm/sec^2 であるが、この値に
マイナスの記号をつけて $g = -980 \text{ cm/sec}^2$ とすれば"自由表

面が下側にあるような特殊な場合を与えることになる。このように、液体層の上下の11づれの側が自由表面であっても、その違いは g の符号の違いとして現われるだけであって、両者は以下の解析において統一的に取り扱えることを指摘しておく。

さて、方程式(2.2)～(2.4)は明らかに次のような定常解をもつ。

$$\bar{v}_i = 0 \quad (2.5)$$

$$\bar{P} = P_A + \rho g (d - x_3) \quad (2.6)$$

$$\bar{T} = T_0 - \beta x_3 \quad (2.7)$$

ここで、 P_A は大気圧、

$$\beta = \frac{k(T_0 - T_A)}{k + k d} \quad (2.8)$$

は逆温度勾配である。これらの解は、液体層が静止状態にあり、熱が伝導によってのみ運ばれているという状況を表わしている。変数の上のバーはそのことを強調するためのものである。

このような状況が安定であるか不安定であるかを調べるために、上の解に微小な攪乱を加え、その微小攪乱量が時間と

ともに減衰するか増大するかを線形安定性理論を用いて調べる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} v_i &= \bar{v}_i + v_i' \\ p &= \bar{p} + p' \\ T &= \bar{T} + T' \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

のようにおいて、これらを方程式 (2.2) ~ (2.4) に代入するのである。ここで、プライムは微小擾乱量であることを表わす。プライムのついた量について 2 次以上の項を省略すると、次のような線形化された方程式群が得られる。

$$\frac{\partial v_i'}{\partial x_i} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial v_i'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i' \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - \beta v_3' = \kappa \nabla^2 T' \quad (2.12)$$

これら 3 つの方程式から v_1' , v_2' , p' を消去すると、初めの静止状態の安定性を調べるために必要な方程式として

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 v_3' = 0 \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - K \nabla^2\right) T' = \beta v_3' \quad (2.14)$$

を得る。

次に、境界条件を考えよう。静止状態にあった液体層に微小な攪乱が加わったことに伴い、自由表面 ($x_3 = d$) も

$$x_3 = d + \zeta \quad (2.15)$$

のように変形をこうむるものとしよう。ここで、 ζ は x_1, x_2 , t の関数で、 d に比べて十分小さいものとする。自由表面の単位面積に働く力の x_1, x_2, x_3 方向の成分はそれぞれ 0 でなければならぬから、我々は次の3つの関係式を得る。

$$-S_{1j} n_j - P_A n_1 + \frac{\partial S}{\partial x_1} = 0 \quad \text{at } x_3 = d + \zeta \quad (2.16)$$

$$-S_{2j} n_j - P_A n_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0 \quad \text{at } x_3 = d + \zeta \quad (2.17)$$

$$-S_{3j} n_j - P_A n_3 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(S \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(S \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \right) = 0$$

$$\text{at } x_3 = d + \zeta \quad (2.18)$$

ここで、 S は表面張力、

$$S_{ij} = -P \delta_{ij} + p v \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.19)$$

は応力テンソル,

$$n_i = \left(-\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_1}, -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_2}, 1 \right) \quad (2.20)$$

は自由表面に立てた外向き (液体側から空気側に向かう) 法線方向の単位ベクトルである。ところで, 表面張力 S は自由表面の温度 T_f の関数であるが, (2.7), (2.9) より

$$T = \bar{T} + T' = T_0 - \beta x_3 + T' \quad (2.21)$$

であるから, (2.15) を用いると

$$\begin{aligned} T_f &= T_0 - \beta(d + \mathcal{J}) + T_f' \\ &= \bar{T}_f - \beta \mathcal{J} + T_f' \end{aligned} \quad (2.22)$$

と書ける。そこで,

$$\bar{T}_f = T_0 - \beta d \quad (2.23)$$

である。したがって

$$S = S(T_f) = S(\bar{T}_f - \beta \mathcal{J} + T_f')$$

$$\begin{aligned}
&= S(\bar{T}_f) + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{T=\bar{T}_f} (-\beta \zeta + T_f') \\
&= S_0 + \sigma \beta \zeta - \sigma T_f'
\end{aligned} \tag{2.24}$$

となる。そこで、

$$S_0 = S(\bar{T}_f) \tag{2.25}$$

$$\sigma = - \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{T=\bar{T}_f} \tag{2.26}$$

で、 σ は通常正である。又、(2.6), (2.9) より

$$P = \bar{P} + P' = P_A + \rho g (d - x_3) + P' \tag{2.27}$$

であるから、自由表面における圧力 P_f は (2.15) を用いて

$$P_f = P_A - \rho g \zeta + P_f' \tag{2.28}$$

と書ける。(2.19), (2.20), (2.24), (2.28) を (2.16) ~ (2.18) に代入して若干の変形をおこなうと、(2.16), (2.17) より

$$\begin{aligned}
\rho \nu \left(\frac{\partial^2 v_3'}{\partial x_3^2} - \nabla_H^2 v_3' \right) + \sigma \beta \nabla_H^2 \zeta - \sigma \nabla_H^2 T' &= 0 \\
\text{at } x_3 = d & \tag{2.29}
\end{aligned}$$

を, (2.18) より

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - 3\nu \nabla_H^2 \right) \frac{\partial v_3'}{\partial x_3} - (\rho g - S_0 \nabla_H^2) \nabla_H^2 \mathcal{J} = 0$$

$$\text{at } x_3 = d \quad (2.30)$$

を得る。ここで,

$$\nabla_H^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (2.31)$$

である。以上のプロセスにおいて, 微少量の2次以上の項はもちろん省略した。なお, $\mathcal{J}$ と v_3' は当然のことながら

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} = v_3' \quad \text{at } x_3 = d \quad (2.32)$$

なる関係で結ばれており, これも境界条件の1つとなる。自由表面における最後の境界条件は, Newton の冷却の法則 (2.1) より

$$\kappa \frac{\partial T'}{\partial x_3} + \kappa T' - \kappa \beta \mathcal{J} = 0 \quad \text{at } x_3 = d \quad (2.33)$$

のように得られる。一方, 固体壁 ($x_3 = 0$) における境界条件は簡単に得られ, それは次の通りである。

$$v_3' = \frac{\partial v_3'}{\partial x_3} = T' = 0 \quad \text{at } x_3 = 0 \quad (2.34)$$

以上で方程式および境界条件が出そろったので, これらを

$$(x, y, z) = \left(\frac{x_1}{d}, \frac{x_2}{d}, \frac{x_3}{d} \right) \quad (2.35)$$

$$\tau = \frac{K}{d^2} t \quad (2.36)$$

$$w = \frac{d}{K} v_3' \quad (2.37)$$

$$\theta = \frac{T'}{\beta d} \quad (2.38)$$

$$h = \frac{J}{d} \quad (2.39)$$

で定義される無次元量を導入して無次元化する。しかるのち線形安定性理論の常套手段として

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \\ h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W(z) \\ \Theta(z) \\ H(z) \end{Bmatrix} \exp[\omega \tau + i(a_x x + a_y y)] \quad (2.40)$$

とおく。そうすると方程式 (2.13), (2.14) は

$$[P^{-1}\omega - (D^2 - a^2)](D^2 - a^2)W = 0 \quad (2.41)$$

$$[\omega - (D^2 - a^2)]\Theta = W \quad (2.42)$$

となり, 境界条件 (2.29), (2.30), (2.32), (2.33), (2.34) は

$$(D^2 + a^2)W + Ma^2\Theta - Ma^2H = 0 \quad \text{at } z=1 \quad (2.43)$$

$$N_c [P'\omega - (D^2 - 3a^2)]DW + (N_G + a^2)a^2H = 0 \quad \text{at } z=1 \quad (2.44)$$

$$\omega H = W \quad \text{at } z=1 \quad (2.45)$$

$$(D+B)\textcircled{H} - BH = 0 \quad \text{at } z=1 \quad (2.46)$$

$$W = DW = \textcircled{H} = 0 \quad \text{at } z=0 \quad (2.47)$$

となる。ここで、 $D = d/dz$ は z で微分記号、 $a = (a_x^2 + a_y^2)^{\frac{1}{2}}$ は波数である。 ω は一般に複素数で $\omega = \omega_r + i\omega_i$ と表わされ、 ω_r は攪乱の対数的増幅率を、 ω_i は角振動数を与える。 $\omega_r < 0$ ならば攪乱は時間とともに減衰するから初めの静止状態は安定で、 $\omega_r > 0$ ならば攪乱は時間とともに増大するから初めの静止状態は不安定ということになる。又、

$$P = \frac{\nu}{\kappa} \quad \text{は Prandtl 数,}$$

$$M = \frac{\sigma \beta d^2}{\rho \nu \kappa} \quad \text{は Marangoni 数,}$$

$$N_c = \frac{\rho \nu \kappa}{S_0 d} \quad \text{は crispation 数,}$$

$$N_G = \frac{\rho g d^2}{S_0} \quad \text{は Weber 数 又は Bond 数,}$$

$$B = \frac{\hbar d}{\kappa} \quad \text{は Biot 数}$$

と呼ばれる無次元数である。

方程式 (2.41), (2.42) および境界条件 (2.43) ~ (2.47) は1つの固有値問題を構成するが, $N_c = 0$ とおくと Pearson が取り扱った固有値問題すなわち自由表面が変形しない場合の固有値問題に退化する。その際, N_g も自動的に消えてしまうことに注意すべきである。

3. 解および数値計算の結果

方程式 (2.41), (2.42) の一般解は容易に求まる。ただ, $P=1$ の場合と $P \neq 1$ の場合では解の形が異なることに注意すべきである。しかし, いづれの場合も得られた解に境界条件 (2.43) ~ (2.47) を適用することにより

$$M = f(P, N_c, N_g, B, a, \omega) \quad (3.1)$$

なる形の固有値関係式を得る。我々の目的は, a を横軸に, M を縦軸にとったとき, P, N_c, N_g, B の与えられた値に対してどのような領域で $\omega_r < 0$ となり, どのような領域で $\omega_r > 0$ となるかを知ることである。そのためには, その2つの領域の境界線, すなわち $\omega_r = 0$ となる曲線(これを中立曲線という)を見つけることが先決問題である。この中立

曲線を境にしてどちら側で $\omega_r < 0$ となり、どちら側で $\omega_r > 0$ となるかは、多くの場合簡単な物理的考察により容易に知れるが、でもないときでも数値計算によって容易に知ることができる。このような理由により、 $\omega_r = 0$ とおく。そうすると $\omega = i\omega_i$ となる。

さて、(3.1) において $\omega = i\omega_i$ とおき、右辺を実部と虚部にわけると

$$M = f_1(P, N_c, N_g, B, a, \omega_i) + i\omega_i f_2(P, N_c, N_g, B, a, \omega_i) \quad (3.2)$$

のようになる。 M は実数であるから、 $\omega_i = 0$ 又は $f_2 = 0$ でなければならぬ。 $f_2 = 0$ を満たす実数の $\omega_i (\neq 0)$ が存在しない場合は、 $\omega_i = 0$ を採用せざるを得ない。又、 $f_2 = 0$ を満たす実数の $\omega_i (\neq 0)$ が存在する場合は、 $\omega_i = 0$ と $\omega_i \neq 0$ の両方を考慮しなければならない。 $\omega_i = 0$ は中立状態が定常であることを意味し、 $\omega_i \neq 0$ は中立状態が振動型であることを意味する。そこで、 $\omega_i = 0$ を定常モード、 $\omega_i \neq 0$ を振動モードと呼ぶことにしよう。

以下に、 $N_g > 0$ (自由表面が上側) の場合と $N_g < 0$ (自由表面が下側) の場合に分けて、数値計算の結果についてのべ

る。

3. 1 $N_G > 0$ (自由表面が上側) の場合

先ず, 定常モードの中立曲線は $M > 0$ の領域にのみ現われる。 $M > 0$ ということは, 下から熱する ($T_0 > T_A$) 場合に対応する。そして, この中立曲線を境にして M の小さい側が安定領域 ($\omega_r < 0$) で M の大きい側が不安定領域 ($\omega_r > 0$) である。今, 中立曲線の最小点の M と α の値をそれぞれ M_c , α_c と書くことにすれば, $M < M_c$ のときにはすべての波数に対して $\omega_r < 0$ (安定) である。この意味で M_c , α_c をそれぞれ臨界 Marangoni 数, 臨界波数と呼ぶ。

一方, 振動モードも存在することが確かめられた。ただし, 振動モードの中立曲線は $M < 0$ の領域にのみ現われる。 $M < 0$ ということは, 下から冷却する ($T_0 < T_A$) 場合に対応する。そして, 定常モードの場合とは逆に, 中立曲線を境にして M の大きい側が安定領域で M の小さい側が不安定領域である。したがって, 振動モードの臨界 Marangoni 数と臨界波数は, この中立曲線の最大点の M と α の値によって与えられる。

図 1 に, $B = 0$, $P = 0.1$ の場合の臨界 Marangoni 数を $N_G = 0.01, 0.1, 1$ の 3 つの場合について N_c の関数として示した。ここで, 実線は定常モードを, 点線は振動モードを

表わす。定常モードに対しては実線の下側が安定領域で、振動モードに対しては点線の上側が安定領域である。なお、 B の値は実際には大変小さい(例えば、Palmer と Berg⁽¹²⁾ 参照)ので $B=0$ としてもほとんど差し支えない(例えば、Takashima⁽¹³⁾ 参照)が、 P の値はどのような液体を用いるかによって広い範囲にわたって変化する。しかし、紙数の都合上ここでは $P=0.1$ の場合のみを回示することにした。ただし、(2.41)、(2.44)から明らかのように、定常モードは P の値に無関係である。

図1から次のようなことがわかる。先ず定常モードでは、 N_c が小さいときには N_c , N_g の値の如何に拘らず $M_c \div 80$ である。これは自由表面が変形しない($N_c=0$)との仮定のもとに得られる M_c の理論値に等しい。ところが、 N_c が或る値を越えると M_c は突然急激に減少し始める。この N_c の或る値というのは N_g の値によって異なるが、 N_g と N_c の比で考えるとほぼ一定で約120という値をとる。すなわち、 $N_g/N_c > 120$ のときは自由表面は変形しないとの仮定を採用してもよいが、 $N_g/N_c < 120$ のときは自由表面の変形を考慮しなければならぬということになる。この criterion を液体層の深さ d で表現すれば、自由表面の変形を考慮しなければならぬのは、水で $d < 0.12 \text{ mm}$ のとき、シリコン

オイル AK_3 で $d < 0.15 \text{ mm}$ のとき, コーンオイルで $d < 0.45 \text{ mm}$ のとき, グリセリンで $d < 1.1 \text{ mm}$ のときである。次に, 振動モードでは, 自由表面の変形が重要な役割を演ずることがわかる。なぜなら, 自由表面が変形しないとの仮定のもとでは振動モードは存在しないことがわかっているからである。自由表面の変形を考慮した場合に振動モードが存在し, しかもその臨界 Marangoni 数が負であるということは, 液体層を下側から冷却した場合にも不安定が発生するという Block の実験事実の一応の説明を与えているという意味で興味深い。ただ Block は, 液体層が不安定となって対流が発生した際その対流が定常であるか振動型であるかについては何も触れていないし, 定量的なことについても何ものべていない。したがって, 図 1 の点線と Block の実験とのこれ以上の比較は不可能である。なお, 臨界波数, 臨界振動数の図示は, 紙数の関係で省略する。

3. 2 $N_G < 0$ (自由表面が下側) の場合

先ず, 定常モードの中立曲線は $M > 0$ の領域と $M < 0$ の領域にまたがって現われる。この中立曲線を境にして M の小さい側が安定領域で M の大きい側が不安定領域である。ただ, $N_G > 0$ の場合とは違って, この場合には定常モードの臨界 Marangoni 数は常に負である。

一方、振動モードも存在し、その中立曲線は $N_G > 0$ の場合と同様に $M < 0$ の領域にのみ現われる。そして、この中立曲線を境にして M の大きい側が安定領域で M の小さい側が不安定領域であることも $N_G > 0$ の場合と同様である。

図2に、 $B = 0$, $P = 0.1$ の場合の臨界 Marangoni 数を $N_G = -0.01, -0.1, -1$ の3つの場合について N_C の関数として示した。ここで、実線は定常モードを、点線は振動モードを表わす。定常モードに対しては実線の下側が安定領域で、振動モードに対しては点線の上側が安定領域である。したがって、 N_G の各値に対して、くさび型の領域の内部でのみ液体層は安定で、その他の領域では不安定ということになる。今、液体層内に温度差がない場合 ($T_0 = T_A$, したがってまた $M = 0$) を考えよう。図2からも明らかのように、この場合は液体層は不安定である。すなわち、天井に付着した薄い液体層は、その内部に温度差がない場合は不安定であって、一定の深さを保って天井に付着し続けることができない。これは、Rayleigh-Taylor instability と呼ばれ、よく知られた事実である。又、空気よりも天井の温度の方が高い場合 ($T_0 > T_A$, したがってまた $M > 0$) も、図2から明らかのように液体層は不安定である。これに対して、天井の温度より空気の温度の方が高い場合 ($T_0 < T_A$, したがってまた

$M < 0$) は, $T_A - T_0$ が或る範囲内にあるときに限って, 天井に付着した薄い液体層が安定に保たれるのである。

自由表面が上側にあるという普通の場合には, 液体層の内部に温度差がないという状況は安定状態である。したがって, この液体層を下側から徐々に熱したり冷却したりしていく実験が可能であるが, 自由表面が下側にあるという特殊な場合には, 液体層の内部に温度差がないという状況自体がすでに不安定な状態なのであるから, その意味で実験を試みるのが困難であると思われる。ただ, 冷たい天井に空気中の水分が徐々に付着していったって薄い水の層ができていくような場合を想像してみるに, そのプロセスにおいてたまたま Marangoni 数が図2のくさび型の領域の内部に属する値をとり続け, したがって天井に付着した水の層が安定に保たれるというようなことはあり得るものと思われる。又, Marangoni 数がたまたま図2の実線のすぐ上, 又は点線のすぐ下の値をとり, Bénard の細胞に似た細胞が現われることも有り得るかも知れない。しかし, Bell の実験はペンキを用いているので, 非ニュートン性やその他の要因が加わる可能性があり, 慎重を期す必要がある。いづれにしても, 自由表面が下側にある場合は, 自由表面の変形が本質的に重要な役割を演ずるものと思われる。

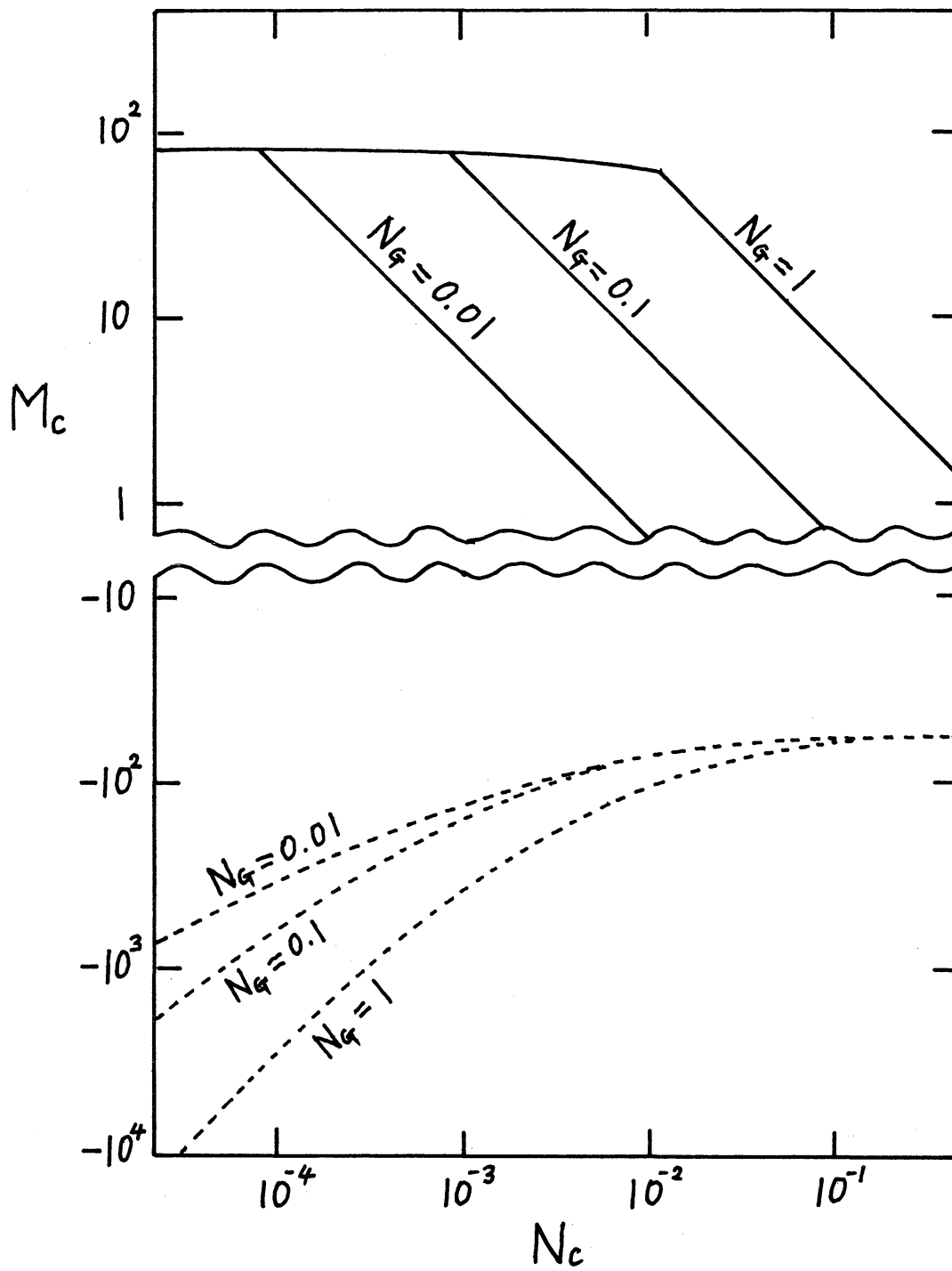


図1. $B=0$, $P=0.1$, $N_g > 0$ のときの臨界Marangoni数.
 実線は定常モード, 点線は振動モードを表わす.

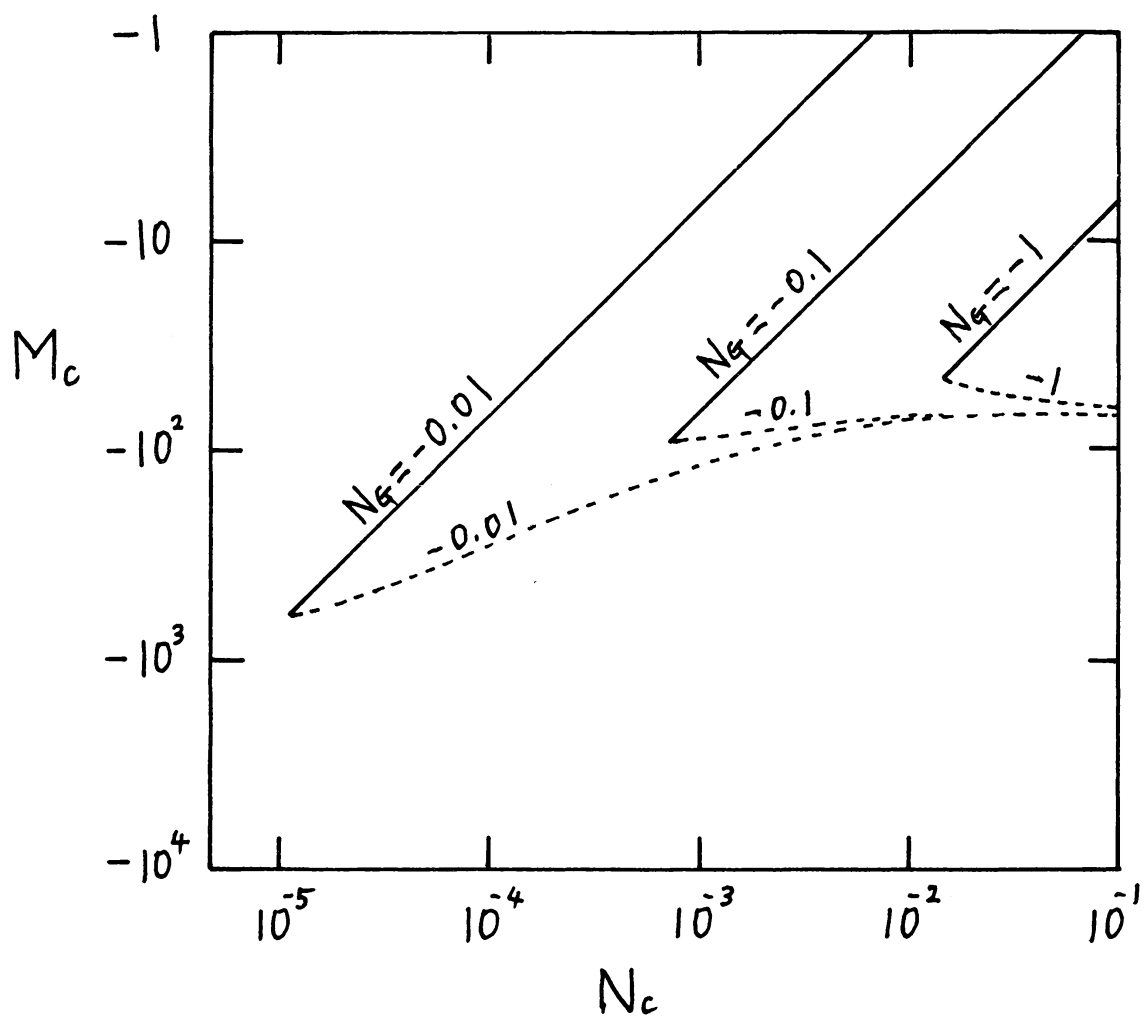


図2. $B=0$, $P=0.1$, $N_g < 0$ のときの臨界 Marangoni 数.
 実線は定常モード, 点線は振動モードを表わす.

文 献

- 1) Lord Rayleigh: Phil. Mag. 32(1916)529.
- 2) S. Chandrasekhar: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (Oxford Univ. Press, London, 1961).
- 3) H. Bénard: Rev. Gen. Sci. pures et appl. 11(1900) 1261 and 1309.
- 4) H. Bénard: Ann. Chim. Phys. 23(1901)62.
- 5) J. R. A. Pearson: J. Fluid Mech. 4(1958)489.
- 6) A. Vidal and A. Acrivos: Phys. Fluids 9(1966)615.
- 7) M. Takashima: J. Phys. Soc. Japan 28(1970)810.
- 8) K. A. Smith: J. Fluid Mech. 24(1966)401.
- 9) R. W. Zeren and W. C. Reynolds: J. Fluid Mech. 53(1972)305.
- 10) M. J. Block: Nature 178(1956)650.
- 11) S. H. Bell: J. Oil Colour Chemists Assoc. 35(1952) 373.
- 12) H. J. Palmer and J. C. Berg: J. Fluid Mech. 47(1971) 779.
- 13) M. Takashima: J. Phys. Soc. Japan 31(1971)283.