

氏 名	西 和 田 公 正 にしわだ きみ まさ
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	論 理 博 第 692 号
学位授与の日付	昭 和 55 年 5 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学位論文題目	Constant Coefficient Differential Operators with Slowly Spreading Solutions (ゆっくりと拡散する解をもつ定数係数微分作用素)

論文調査委員 (主 査) 教授 松浦重武 教授 一松 信 教授 佐藤幹夫 教授 溝畑 茂

論 文 内 容 の 要 旨

$(n+1)$ 変数 (t, x) , $x=(x_1, \dots, x_n)$ の複素定数係数偏微分作用素 $P(D_t, D_x)$:

$$P(D_t, D_x) = D_t^l + \sum_{j=1}^l a_j(D_x) D_t^{l-j}$$

と考察する。ここで $D_t = -i\partial/\partial t$, $D_x = (-i\partial/\partial x_1, \dots, -i\partial/\partial x_n)$ である $i=\sqrt{-1}$ 。

一般に、方程式 $Pu=f$ の解 u の性質と多項式 P の代数的構造がどのように対応しているかを研究することは、偏微分方程式論における重要課題の一つである。たとえば、斉次方程式 $Pu=0$ の解の有限伝播性と多項式 P の双曲性に対応することはよく知られているが、一般に初期面 $t=0$ が特性的な場合（すなわち、或る j に対して a_j の次数が j を超える場合については、偏微分方程式の解 u と多項式 P のどのような性質を取り出せば有効で意味のある対応が得られるかは、完全には分っていない。申請者は主論文と参考論文 1.3 において、主として上記の問題の研究を行い、重要な結果を得た。特に Schrodinger 方程式の或る波束解のひろがり方に着目し、これをもとにして上記の一般的な作用素に適用出来る結果を得た。

まず、全空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ における解を考察し、 $t \rightarrow \pm\infty$ のときの解の挙動に注目して、次の結果を得た。

“斉次方程式 $Pu=0$ の自明でない解 $u \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ であって評価式

$$D_t^k D_x^\alpha u(t, x) \leq M_\alpha \exp(-L_\alpha(|x|-c_1|t|)+c_2|t|^q)(t, x) \in \mathbf{R}^{n+1}$$

(α は任意の多重指数 ; $k=0, 1, \dots, l-1$; $q < 2$; a, c_1, c_2, M_α は正定数 ; $L_\alpha(t)=t^2/2a$ ($t>0$), $=0$ ($t<0$)) を満足するものが存在するための必要十分条件は、多項式 P を複素数体上で既約分解したとき、その一つの既約因子の主部が双曲型になることである。”

次に申請者は t 変数に関して有界な帯状領域 $\mathcal{Q}=\{(t, x) ; t_1 < t < t_2, x \in \mathbf{R}^n\}$ における解を考察している。関数 $u \in C^{l-1}((t_1, t_2) ; S_x') \cup C^\infty(\mathcal{Q})$ に対して、次の不等式を考える。

$$\begin{aligned} & D_t^k D_x^\alpha u(t, x) * \exp(-\sum_j x_j^2/2a_j) \\ & \leq M_\alpha \exp\left(-\sum_j \frac{1}{2}(x_j/s_j)^2 + (x \text{ の低階項})\right), a_j > 0, x \in \mathbf{R}^n \end{aligned}$$

ここで s_j は適当な定数 c_j をもちいて、 $s_j = (a_j + c_j/a_j)^{1/2}$ とする。このとき、 $Pu=0$ の自明でない解で、このような評価を t の相異なる二つの値に対して持つものが存在するための必要十分条件を得ている。この条件は、特別な場合として、自由空間における Schrodinger 方程式によってみたされるが、熱方程式によってはみたされないものである。

以上の結果の証明は主論文においてなされているが、その証明の際の副産物として、Gelfand-Shilov による Paley-Wiener 型定理を更に精密化することにも成功している。

論文審査の結果の要旨

複素数を係数にもつ多変数の多項式 P があたえられれば、その変数のところに、いわゆる imaginary gradient (すなわち偏微分を虚数単位 i を割ったもの) を代入することにより、定数係数の線型偏微分作用素 $P(D)$ が得られる。このようにして得られた偏微分作用素、或は偏微分方程式 $P(D)u=f$ の解析的性質と、もとの多項式の代数的性質 (または、その多項式の零点がなす超曲面の幾何学的性質) がどのように対応しているかということの研究は、偏微分方程式論の重要な課題の一つである。たとえば、変数のうちの一つを時間変数とみなして考えると、斉次方程式 $P(D)u=0$ の解の伝播速度の有限性と、多項式 P が双曲型多項式になることが対応することはよく知られているが、初期面 (すなわち $t=0$) が多項式 P の特性面となっている場合には、偏微分方程式の解と多項式 P のどのような性質をとり出せば有意義な対応が得られるかは、完全には分っていない。

申請者は、主論文と参考論文 1, 3 において上記問題を研究し、重要な結果を得ている。

まず、全空間における問題の場合に $t \rightarrow \pm\infty$ のときの解の挙動に着目して、或る錐状領域の外部で指数的に 2 次の order で減少するような自明でない C^∞ 解を一つもつための必要十分条件は、多項式 P を既約分解したとき、その因子の中に、主部が双曲型になるものが存在することであることを証明している。

次に、時間を有限に限った帯状領域についても考察して、空間的には緩増大超関数となる C^∞ 解について、初期値にガウス分布をおいた場合、時間の経過とともに、解が一層大きな分散をもったガウス分布によって (偏導関数もこめて) 上から評価出来るような解を一つもつための必要十分条件を多項式 P の条件として得ている。この条件は、特別な場合として、自由空間における Schrödinger 方程式によってみたされるが、熱方程式によってはみたされない。実際、この評価はガウス分布を初期値とする Schrödinger 方程式の波束解の挙動と密接に関係しているものと考えられる。

以上の諸結果の証明は主論文でなされているが、その際、適当に固定された ξ , $\eta \in C^n$ によってきまる Riemann 面 $\{(\sigma, \tau) \in C^2, P(\sigma, \tau\xi + \eta) = 0\}$ の上で解 u の Fourier-Laplace 変換を精密に考察する必要がある。申請者はその精密な解析を遂行することにより、一般的な結果を得ている。その結果は、F. John, L. Ehrenpreis などによる結果の一般化となっている。また、Gelfand-Shilov による Paley-Wiener 型定理の精密化も得ている。

なお、参考論文 1 においては、方程式 $P(D)u=f$, $f \in C^\infty$ が Ω の中で、有界な特異台をもつための条件が研究され、さらに特異台の有限伝播性に関連した結果も扱われる。他の参考論文においては、解析的波面集合、初期値問題の適切性などが論じられているが、いずれもその方面の研究の発展に重要な貢献を

となるものである。

これらの諸結果は、いずれも申請者の独創性と広い識見、高い研究能力を示している。よって申請者は理学博士の学位を授与されるに十分な資格をもつものと判断する。