

平面ポアズイユ流中の2次元攪乱の非線形発展

相模工大 水島 二郎 (Jiro MIZUSHIMA)
原 研 藤村 薫 (Kaoru FUJIMURA)
岡山大工 柳瀬真一郎 (Shinichiro YANASE)

§ 1. まえがき

平面ポアズイユ流は、定常解がナビエ・ストークス方程式の厳密解として得られる数少ない流れの一つであり、その線形安定性のみならず、乱流に至るまでの攪乱の非線形発展が実験的にも理論的にも非常に詳しく調べられている。平面ポアズイユ流の特徴的な性質として以下のような項目が挙げられる。

1. 線形安定性理論によれば、高い臨界レイノルズ数 ($R_c=5772.22$) を有するが、非粘性の極限では流れは安定である。
2. 弱非線形安定性理論に基づく、線形臨界点近傍を含む広い領域で亜臨界不安定を生じるが、線形中立曲線の下分枝に沿う領域で超臨界安定となる。
3. 有限振幅の攪乱に対しては、線形安定性に基づく臨界点よりもかなり低いレイノルズ数で不安定が生じる (2次元攪乱に関しては $R_c \sim 2500$ 、3次元攪乱に関しては $R_c \sim 1000$)。
4. 流れの3次元化が遷移の早い段階で起こる。

以上の特性により、平面ポワズイユ流の数値シミュレーションや安定性の計算にはいくつかの注意が必要である。とくに、性質1により、中立状態近くではレイノルズ数が大きいため、攪乱は必然的に急激に変化する臨界層を含むことになり、計算には高い空間分解能が必要となる。1953年に Thomas¹⁾ は4次精度の差分法を用いて線形安定性の臨界値を 5780 と求めたものの、1971年に Orszag²⁾ がチェビシェフ多項式展開で求めるまでは 5772.22 という正確な値が得られなかったのはこのような事情による。従ってより高いレイノルズ数での攪乱の変化を追うには非常に高精度の計算スキームが必要である。

さて、線形安定性の問題は、平面ポワズイユ流の場合、厳密に Orr-Sommerfeld 方程式の固有値問題として定式化され、 $\alpha R \gg 1$ の場合には漸近理論が確立されている (ただし、 α は攪乱の波数、 R はレイノルズ数)。また、 R が比較的大きな場合でも、高精度の数値計算スキームを用いることによって固有値を必要な精度で求めることができるので、この流れに関する線形安定性は完全に把握されているといつてよい。

一方、攪乱の振幅が非常に小さいが有限であるときの攪乱の時間 (または空間) 変化を調べる理論として、弱非線形理論が構築されてきた。攪乱の非線形発展を支配する方程式は、元来無限自由度系であるが、弱非線形理論では、これを矛盾なく有限自由度系で打ち切ることを目的としており、その結果得られる基本波の振幅 $A(t)$ に関する発展方程式

(Landau 方程式)

$$dA/dt = \lambda_0 A + \lambda_1 |A|^2 A + \lambda_2 |A|^4 A + \dots$$

が、そこでは中心的な役割を演じる。但し、 λ_0 は攪乱の線形増幅率、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ は Landau 定数と呼ばれる非線形相互作用を表す定数である。ここで $O(|A|^5)$ を無視すると、この方程式は厳密に解け、 $\lambda_0 < 0$ かつ $\lambda_{1r} < 0$ のとき攪乱は初期振幅によらずすべて減衰する絶対安定、 $\lambda_0 > 0$ かつ $\lambda_{1r} < 0$ のときには初期振幅によらず一つの安定な平衡値に漸近する超臨界安定、 $\lambda_0 < 0$ かつ $\lambda_{1r} > 0$ のとき初期振幅が臨界値（不安定平衡値）以上であれば有限時間内に発散、臨界値以下の場合には減衰する亜臨界不安定、 $\lambda_0 > 0$ かつ $\lambda_{1r} > 0$ であれば初期振幅によらずすべて発散する絶対不安定が結論でき、臨界振幅並びに平衡振幅は $\sqrt{-\lambda_0/\lambda_{1r}}$ で与えられる（但し、添字 r は実部を示す）。従って、 λ_0 および λ_{1r} の符号の組合せが、攪乱の漸近的振舞いを把握する上で極めて重要となってくる。

図 1 に Pekeris & Shkoller (1967)³⁾ によって求められた $\lambda_0 = 0$ および $\lambda_{1r} = 0$ の曲線を示す。この図から、平面ポアズイユ流では、臨界点を含む広い領域で $\lambda_{1r} > 0$ が成立しているのでも亜臨界不安定を生じるが、中立曲線に沿う下分枝近傍では $\lambda_{1r} < 0$ であり、超臨界安定となることが結論できる。特に、臨界点においては亜臨界不安定が生じるので、理論的に得られた結果を実験結果と比較する場合、亜臨界での臨界振幅が実的な意味を持つ。

ところが、亜臨界問題に対する弱非線形理論はまだ確立されておらず、⁴⁾ その適用にはかなりの困難があると考えられている。さらに、Landau 方程式の右辺の収束性は非常に悪いため、得られた平衡振幅もしくは臨界振幅は中立曲線のごく近傍でしか物理的な意味を持たない。しかし、超臨界状態での攪乱の時間発展の初期においては、弱非線形理論の有効性は十分にあると思われる。

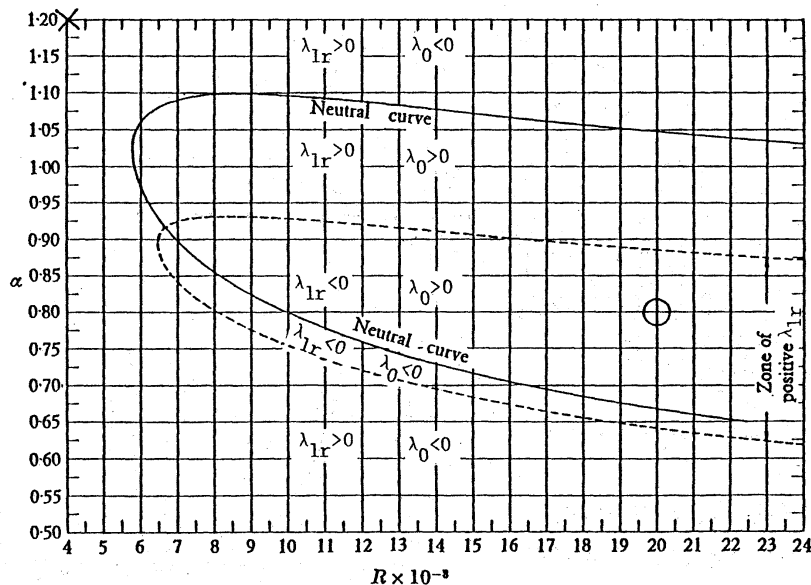


図 1. $\lambda_0 = 0$ および $\lambda_{1r} = 0$ の曲線 [文献 3)]

さて、数学的な合理性を犠牲にして有限自由度での打ち切りを強制的に行った場合には、得られた結果は一つのモデルとしての意味しか持ちえないが、振幅が十分小さいという弱非線形理論の適用限界を除くことが出来るのは大きな利点である。この手法はフーリエモード打ち切り法と呼ばれ、大きく2種類に分類できる。すなわち臨界振幅や平衡振幅解を直接求める方法と、攪乱の時間発展を追跡する数値シミュレーションである。

Zahn, Toomre, Spiegel & Gough (1974)⁵⁾ は前者の方法を採用している。彼らは2次元攪乱が流れ方向に適当なガリレイ変換をすると定常となる解に漸近的に近づくと予想した。すなわち、主流方向及び時間に関して周期的な解（以下、2次元非線形中立解と呼ぶ）を仮定すると、非線形攪乱方程式は、非線形固有値問題に帰着される。彼らは、主流と垂直な方向に差分法を用いた反復法により、種々の (α, R) に対する非線形中立攪乱の振幅を調べ、その結果、臨界レイノルズ数 $R_c=2706.65$ を得た。しかし、流れ方向のフーリエモード数を変化させたとき、高レイノルズ数では明らかに空間分解能の不足が原因と見られる奇妙な結果が得られている。これに対して、流れに垂直な方向の空間分解能をチェビシェフ多項式を用いて向上させた計算が Herbert (1977)⁶⁾ によってなされ、臨界レイノルズ数として $R_c=2934.8$ という値が得られた。図2に Herbert によって求められた2次元非線形中立解の振幅を示す。同図に併記した $R=10000$ の結果には、弱非線形理論によって得られた平衡、臨界振幅が破線で描かれており、ここに書き込んだ矢印は、予測される攪乱の増幅、減衰特性を示す。これによると、非線形中立曲線は下分枝が臨界振幅に、上分枝が平衡振幅に対応しており、線形亜臨界領域では、 $E'=0$ も安定平衡解になることが予想される。しかし、このようにして求められた非線形中立解が、実際に攪乱の時間発展を追跡した場合に得られる平衡振幅解、もしくは臨界振幅解に必ず対応するという保証は無い。

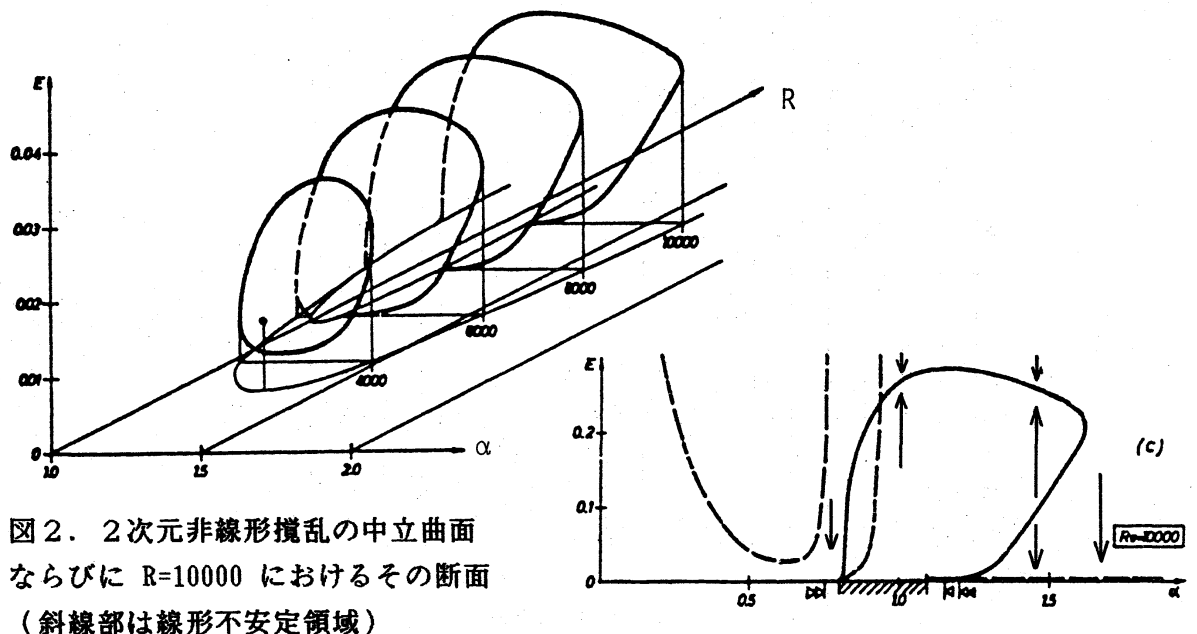


図2. 2次元非線形攪乱の中立曲面
ならびに $R=10000$ におけるその断面
(斜線部は線形不安定領域)

数値シミュレーションを用いれば、この点を明確にすることが原理的には可能である。2次元攪乱に対する数値シミュレーションとしては、George & Hellmus(1972)⁷⁾が、平面ポワズイユ流の2次元有限振幅攪乱に対する亜臨界不安定性を調べている。彼らは、主流方向にフーリエモード打ち切りを行い、主流と垂直の方向には差分法を用いたが、空間差分を4次精度に採ることにより、かなり正確な結果を得ている。Orszag & Kells(1980)⁸⁾は、差分のかわりにチェビシェフ多項式展開を行うことによって高精度の計算を行い、Herbertの求めた非線形臨界レイノルズ数の妥当性を検証した。しかし、攪乱がZahn, et al. や Herbertの求めた非線形平衡解(非線形中立解の上分枝)に漸近するか否かについては触れていない。Kleiser⁹⁾も同様の手法を用いて攪乱の時間発展を追跡した。しかし、計算時間の不足($t < 300$)のため非線形平衡解に漸近する過程を示すことは出来なかった。さらに、Rozhdestvensky & Simakin¹⁰⁾は非常に長時間にわたる($t < 13000$)時間発展を追跡し、2次元攪乱がある平衡解に漸近することを示したが、彼らの示した平衡攪乱のエネルギーの定義は、一般に用いられているものと異なっているため(前者は主流の変形のエネルギーを含んでいる)、それがZahn, et al. や Herbertの求めた平衡振幅解と正確に一致するか否かは、現時点では不明である。

ところで、攪乱方程式を積分するのには圧力勾配一定条件と流量一定条件の2通りの方法が可能であるが、この違いが結果に及ぼす影響についての認識は未だ乏しく、定性的な差異が生じるのか、定量的な差異だけでとどまるのかに関する知識は殆ど得られていない。

本研究は、攪乱を2次元に限定して考え、特に以下の点に注目して平面ポワズイユ流における非線形発展を調べる。

- i) フーリエモード数が結果に及ぼす影響。
- ii) 攪乱の時間発展を解くことによって得られる漸近解と非線形平衡解との関係。
- iii) 圧力勾配一定条件と流量一定条件の違いが結果に及ぼす影響。
- iv) 弱非線形理論との比較。

ところで2次元平衡振幅解は実は3次元攪乱に対して不安定であることが明らかにされている[Herbert(1983)¹¹⁾, Orszag & Patera(1983)¹²⁾]。有限振幅をもつ3次元攪乱の非線形不安定性を考慮にいれると、臨界レイノルズ数はさらに低くなることが指摘されている。⁸⁾ 現実の流れにおいても2次元攪乱は3次元の peak-valley 構造に移行したのち乱流に遷移することが知られている。従って、実験との対応を考える際には、計算は3次元で行わないといけなことが分かる。しかし、今回は上記の問題点 i-iv)を対象としているので、2次元に限定した計算を行い、その範囲で攪乱の非定常発展を詳細に調べた。

§ 2. 攪乱方程式

2次元ナビエ・ストークス方程式は流れ関数 ψ を用いることによって渦度方程式に帰着される。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - R^{-1} \Delta^2 \psi = \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)}, \quad (1)$$

ここに R はレイノルズ数である。 x 方向の主流

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \equiv U(y) \quad (2)$$

を仮定すると、流れ関数 ψ を

$$\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi} \quad (3)$$

のように主流と攪乱に分離することによって、攪乱の従う方程式は次のように得られる。

$$\frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial x} - U'' \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} - R^{-1} \Delta^2 \hat{\psi} = \frac{\partial(\hat{\psi}, \Delta \hat{\psi})}{\partial(x, y)}. \quad (4)$$

平面ポアズイユ流では $U(y)=1-y^2$ となる。流れ方向に波数 α を持つ攪乱に注目し、その高調波を考えてフーリエモードに分解する。

$$\hat{\psi}(x, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(y, t) e^{in\alpha x}, \quad \phi_{-n}(y, t) = \phi_n^*(y, t), \quad (5)$$

$$[(\frac{\partial}{\partial t} + in\alpha) S_n - in\alpha U'' - R^{-1} S_n^2] \phi_n(y, t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} N[\phi_v, \phi_{n-v}], \quad (6)$$

ここで

$$S_n \equiv \partial^2 / \partial y^2 - n^2 \alpha^2,$$

$$N[\phi_p, \phi_q] \equiv i\alpha(p\phi_p \frac{\partial}{\partial y} - q \frac{\partial \phi_p}{\partial y}) S_q \phi_q. \quad (7)$$

境界条件は、 $y=\pm 1$ で各モードの速度がゼロとなることから得られる（圧力勾配一定条件。この他に、流量一定条件もあるが、この違いについては以下に詳しく述べる）。

$$\begin{aligned} \phi_n(\pm 1) &= \partial \phi_n(\pm 1) / \partial y = 0, \quad n \neq 0 \\ \partial \phi_0(\pm 1) / \partial y &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$\alpha=0$ のモード（ゼロ次モード）は、攪乱の非線形相互作用により誘起された主流の変形であるが、これに対する境界条件だけが他と異なる点に注意しなければならない。 ϕ_0 を支配する方程式は次の様になる。

$$[\frac{\partial}{\partial t} S_0 - R^{-1} S_0^2] \phi_0 = i\alpha \sum_{v=1}^{\infty} v \frac{\partial}{\partial y} [\phi_v \frac{\partial^2 \phi_v^*}{\partial y^2} - \phi_v^* \frac{\partial^2 \phi_v}{\partial y^2}]. \quad (9)$$

$u_0(y, t) = \partial \phi_0 / \partial y$, $\phi_0 = \int_{-1}^y u_0(y, t) dy$ として、(8) の両辺を -1 から y まで積分すると

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - R^{-1}S_0\right] u_0 = i\alpha \sum_{v=1}^{\infty} v \left[\phi_v \frac{\partial^2 \phi_v^*}{\partial y^2} - \phi_v^* \frac{\partial^2 \phi_v}{\partial y^2} \right] + C. \quad (10)$$

C は圧力勾配の攪乱のゼロ次モードに対応し、不定定数である。これをゼロと置くのは圧力勾配一定条件と呼ばれる (Constant Pressure Gradient, C.P.G.)。

$$C = - \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right)_{n=0} = 0. \quad (11)$$

これに対して、流量一定条件 (Constant Mass Flux, C.M.F.) という条件が考えられる。

$$\int_{-1}^1 u_0(y) dy = 0.$$

この時は、

$$\phi_0(\pm 1) = 0 \quad (12)$$

となる。この場合には $C \neq 0$ が可能であり、C.P.G. と C.M.F. は一般には両立しない。波数 $\alpha = 0$ に対応するモードを $\alpha \rightarrow 0$ の極限としてとらえると C.M.F. の条件が得られ、逆に、 $\alpha = 0$ の攪乱に $y = \pm 1$ で速度 = 0 の条件を課すと C.P.G. の条件が得られる。

§ 3. 弱非線形理論

ここでは、弱非線形理論を Herbert(1983)¹³⁾ に沿って略述する。 先ず、

$$\phi_n(y, t) = f_n(y, t) e^{-in\omega t}, \quad \omega = \alpha c_r \quad (13)$$

とすると、(6) 式は次の様になる。

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - in\omega + in\alpha U \right) S_n - in\alpha U'' - R^{-1} S_n^2 \right] f_n(y, t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} N[f_v, f_{n-v}] \quad (14)$$

次に、攪乱の振幅が十分小さく、基本波 $[0(A)]$ 同士の相互作用によって高調波 $[0(|A|^2)]$ が励起され、高調波と基本波との相互作用により基本波が変形 $[0(|A|^3)]$ を受けるという弱非線形発展段階を考え、 f_n を以下のように攪乱の振幅 A で展開する。

$$f_n = \sum_{j=0}^{\infty} A^{1+|n-1|} |A|^{2j} f_{n, 2j+1+|n-1|}(y), \quad (n \geq 0) \quad (15)$$

A の時間変化も同一の系列で展開できると仮定する (Landau 方程式) と、

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j |A|^{2j} A \quad (16)$$

f_{nm} 、 λ_n は順次首尾一貫して求めることができる。 λ_0 は線形増幅率であり、古典的な線形固有値問題を解くことによって求められる。 λ_n ($n \geq 1$) は Landau 定数と呼ばれ、非線形性による寄与を表す。 $\lambda_0 = 0$ の場合、 λ_1 は通常の可解条件を課すことによって求められる。

$$\lambda_1 = \int_{-1}^1 \tilde{f} N_{13} dy / \int_{-1}^1 \tilde{f} S_1 f_{11} dy$$

$$N_{13} = i\alpha [2f_{22}S_1 Df_{11}^* - 2Df_{11}^* S_2 f_{22} + Df_{22}S_1 f_{11}^* - f_{11}^* S_2 Df_{22} + f_{11}S_0 Df_{02} - Df_{02}S_1 f_{11}] , \quad D=d/dy \quad (17)$$

ここで、 $\tilde{f}$ は f_{11} の随伴関数である。他方、 $\lambda_0 \neq 0$ の場合、 f_{13} は無条件に可解となるため、一般には λ_1 の値を決定することが出来ない。この困難は攪乱の振幅を厳密に定義することによって回避出来る。即ち適当な $y=y_0 \in [-1, 1]$ において $f_1(t, y)=A(t)$ と定めると、

$$\lambda_1 = 2 \lambda_0 \chi(y_0) \quad (18)$$

によって λ_1 を決定出来る。ここに、 χ は次式で定義される。

$$[(3\lambda_0 - i\omega + i\alpha U)S_1 - i\alpha U'' - R^{-1}S_1^2]\chi = N_{13} \quad (19)$$

高次の λ_n ($n \geq 1$) も同様に決定される。

さて、 λ_1 を計算するためには f_{22} 、 f_{02} を計算しなければならないが、 f_{02} を計算する時に、C.P.G. と C.M.F. の違いが結果に差異を生じる。初めて平面ポアズイユ流の Landau 定数を具体的に計算したのは、Pekeris & Shkoller (1967)³⁾ と Reynolds & Potter (1967)¹⁴⁾ であるが、前者は C.P.G. を採用し、後者は C.M.F. を使っている。

ところで、Herbert (1980)¹⁵⁾ によれば、臨界点の近傍における (16) の級数の収束は非常に悪く、よほど高次まで計算を行わない限り、弱非線形理論によって求められる臨界振幅は、非線形中立解（彼の計算は亜臨界状態で行われているので、臨界振幅解）へ収束していかない。

そこで本研究では、非線形中立解と弱非線形理論を比較する代わりに、攪乱の時間発展の初期を $O(|A|^5)$ 以下を無視した弱非線形理論が、どれほど正確に表現できるかについて §5.3 で検討する。

§ 4. フーリエモード打ち切りモデル

§§ 4.1. 非線形発展

攪乱の完全な時間発展を追うためには、全てのフーリエモードに対して (6) 式を解かなければいけない。y 方向にはチェビシェフ多項式展開を使用すると十分な分解能が得られるので、フーリエ分解による高調波成分をどの程度取り入れるかという点が重要となる。

原理的には無限に多くの項数を取り入れればよいが、現実的には有限項数（数値計算上の要請からは数十項以内）で打ち切らなければいけない。第 N 項で打ち切ると以下のようになる。

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha U \right) S_n - i\alpha U'' - R^{-1} S_n^2 \right] \phi_n(y, t) = \sum_{\substack{|v| \leq N \\ |n-v| \leq N}} N[\phi_v, \phi_{n-v}] \quad (20)$$

(20) は連立の非線形発展方程式であるから任意の初期条件に対する解を少なくとも数値積分で求めることが出来る。

よく知られていることであるが、 $N=3$ の打ち切りモデルと $O(|A|^3)$ までの弱非線形理論との比較は、後の計算結果を考察する際に重要となるので述べておく。 $N=2$ の打ち切りモデルはたとえば C.M.F. では以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha U \right) S_1 - i\alpha U'' - R^{-1} S_1^2 \right] \phi_1(y, t) \\ &= N[\phi_0, \phi_1] + N[\phi_1, \phi_0] + N[\phi_2, \phi_{-1}] + N[\phi_{-1}, \phi_2] \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2i\alpha U \right) S_2 - 2i\alpha U'' - R^{-1} S_2^2 \right] \phi_2(y, t) \\ &= N[\phi_1, \phi_1] + \underline{N[\phi_2, \phi_0]} + \underline{N[\phi_0, \phi_2]} \end{aligned} \quad (21b)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} S_0 - R^{-1} S_0^2 \right] \phi_0(y, t) \\ &= N[\phi_1, \phi_{-1}] + N[\phi_{-1}, \phi_1] + \underline{N[\phi_2, \phi_{-2}]} + \underline{N[\phi_{-2}, \phi_2]} \end{aligned} \quad (21c)$$

弱非線形理論ではオーダー評価によって----の下線を持った項は無視される。 §5.3 で示される $N \geq 4$ の打ち切りモデルとの比較は興味深い結果を示している。

§4.2. 非線形中立解

非線形中立解は、(20) 式における ϕ_n が時間に関して周期的であると仮定することによって得られる。

$$\hat{\psi}(x, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(y) e^{i n \alpha (x - c_r t)} \quad (22)$$

上式を (4) 式に代入して整理し、第 N 項で打ち切ると

$$\left[i n \alpha (U - c_r) S_n - i n \alpha U'' - R^{-1} S_n^2 \right] F_n(y, t) = \sum_{\substack{|v| \leq N \\ |n-v| \leq N}} N[F_v, F_{n-v}] \quad (23)$$

となる。この方程式の C.P.G. に対する計算は Herbert(1977)⁶⁾ によってなされ、 $N=3$ でほぼ満足できるとされた。一方、C.M.F. の場合の計算は Itoh(1986)¹⁶⁾ によって行われ、 $N=4$ でほぼ収束していることが示された。

§5 結果と考察

今回我々は、(20) 式をチェビシェフ選点法によって正確に数値計算し、またその結果を弱非線形理論と比較した。以下、フーリエ級数の打ち切りの項数を N で表し、チェビシェフ展開の項数を M で表す。対称性を利用しているため、実質的には $2M$ の項数と同じ

精度を持っている。流れ関数の各モードを次のようにチェビシェフ多項式に展開する。

$$\phi_n(y, t) = (1-y^2)^2 \left[\sum_{m=0}^{2M} a_{nm}(t) T_m(y) \right], \quad n \neq 0 \quad (24)$$

ただし、 n と m の偶奇性が異なる時は $a_{nm}=0$ 。

$n=0$ に対しては、C.M.F. の場合は上と同じ形、C.P.G. では、 u_0 に対して

$$u_0(y, t) = (1-y^2) \left[\sum_{m=0}^M a_{0m}(t) T_{2m+1}(y) \right] \quad (25)$$

とした。(24), (25) 式を (20) 式へ代入して選点法を適用すると a_{nm} の連立常微分方程式が得られる。

$$\frac{da_{nm}}{dt} = L_{nm} + N_{nm} \quad (26)$$

ここで L_{nm} は線形項を、 N_{nm} は非線形項を表す。(26) 式を 4 次精度の Runge-Kutta 法によって計算した。時間差分刻みは $\Delta t = 0.01 \sim 0.001$ とした。

§5.1. 線形計算

最初に、非線形項を無視して (26) 式を積分し、線形安定性の計算による固有値と比べた。計算は $\alpha=1$ 、 $R=10000$ で行い、 $M=20$ の項数を取った。フーリエモード打ち切り法によって得られた固有値の値を、古典的な固有値問題の結果と比較したものが表 1 に与えられている。

固有値問題と、今回のフーリエモード打ち切り法に用いたチェビシェフ多項式の項数をいずれも $M=20$ とした場合、得られた結果は 8 桁以上一致しており、フーリエモード打ち切り法の数値計算手法の妥当性が検証された。なお、固有値問題で $M=50$ を用いた結果は厳密な値と考えられるが、 $M=20$ で、少なくとも 4 桁の精度が得られることが示され、チェビシェフ級数の項数はこの程度で十分であると考えられる。

表 1. 線形固有値の比較 $\alpha=1$, $R=10000$.

Method	Eigenvalue
Eigenvalue Problem ($M=50$)	$\alpha c = 0.2375264888 + 0.0037396706 i$
Eigenvalue Problem ($M=20$)	$\alpha c = 0.2375263657 + 0.00373929808 i$
Fourier Truncation ($M=20$)	$\alpha c = 0.2375263654 + 0.00373929807 i$

§5.2. 攪乱の非線形発展

C.M.F. と C.P.G. の計算を行った時の、フーリエモード ϕ_0' , ϕ_1 , ϕ_2' の $y=0$ における値の時間発展を図 3 に示した。但し、 $N=2$ 、 $M=20$ であり、同一の初期条件で計算を行った。波数とレイノルズ数は図 1 に $\times$ で示した $\alpha=1.2$, $R=4000$ である。これによれば、初期振幅が臨界振幅以上であれば、両者共 $t \rightarrow \infty$ で漸近解へ近づくが、漸近状態へ近づく速度は全く異なり、C.P.G. の結果は C.M.F. と比べて極端に時間がかかっている。Kleiser が C.P.G. のもとで Herbert の求めた 2 次元平衡解への漸近を示すことに失敗し

たのは、この事情による。この事実はこれまであまり認識されていないようであるが、それはおそらく今回我々の行った程の長時間計算が行われていないからではないかと思われる。

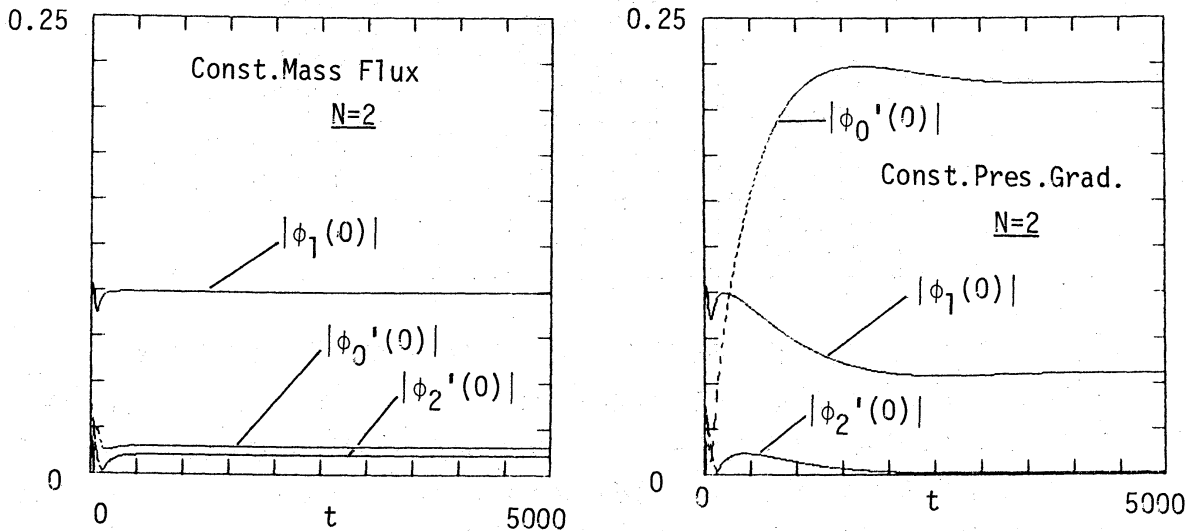


図3. $\alpha=1.2$, $R=4000$ における攪乱の時間発展の比較。初期条件はいずれも $\phi_1(0)=0.1$, $\phi_0(0)=\phi_2(0)=0$ 。

さて、2次元平衡振幅解と今回得られた解の漸近値の関係を表2、3に示す。ここで、攪乱のエネルギーは、主流エネルギーに対する攪乱の全エネルギーの比として

$$E' = \sum_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n = \frac{15}{8} \int_{-1}^1 (|\phi_n'|^2 + |n\alpha\phi_n|^2) dy \quad (27)$$

のように定義される。表中、C.P.G.に対する平衡振幅解の値は、Herbert⁶⁾の求めた非線形中立曲面から直接読み取ったものであり、C.M.F.に対する値は、今回§4.2で説明した手法を用いて求めたものである。これらの値と、フーリエモード打ち切り法の与える漸近値は、十分な精度で一致しており、2次元攪乱は、確かに非線形平衡解に漸近することが明らかになった。

表2. $\alpha=1.2$, $R=4000$ に対する攪乱の時間発展と非線形平衡解の関係 (C.M.F.)

t	E'	$ \hat{\psi}(0) $
1500	$6.68918836061 \cdot 10^{-2}$	$9.91679390913 \cdot 10^{-2}$
3000	$6.68973125846 \cdot 10^{-2}$	$9.91723102724 \cdot 10^{-2}$
4500	$6.68973339778 \cdot 10^{-2}$	$9.91723274960 \cdot 10^{-2}$
6000	$6.68973340622 \cdot 10^{-2}$	$9.91723275639 \cdot 10^{-2}$
7500	$6.68973340624 \cdot 10^{-2}$	$9.91723275641 \cdot 10^{-2}$
9000	$6.68973340624 \cdot 10^{-2}$	$9.91723275641 \cdot 10^{-2}$
Neutral State	—	$9.917513177 \cdot 10^{-2}$

表3. $\alpha=1.2$, $R=4000$ に対する攪乱の時間発展と非線形平衡解の関係 (C.P.G.)

t	E'	$ \hat{\psi}(0) $
1000	0.042344	0.079083
2000	0.023661	0.05831
3000	0.020937	0.054477
4000	0.021693	0.05550
5000	0.021934	0.05584
6000	0.021877	0.055765
7000	0.021857	0.055736
Neutral State	0.02187 ⁶⁾	—

次に、このような非線形問題を解くためにどれほどのフーリエ項数が必要かを示す。

計算は総て $M=20$ で、図1に×で示した $\alpha=1.2$, $R=4000$ で行った。表4は C.M.F. に対して、フーリエ項数 N を変化させた時の $t=3000$, 6000 における攪乱のエネルギー値と $y=0$ における基本波攪乱の流れ関数の値を示している。これから、 $N=3\sim 4$ では1桁の精度しかなく、3桁の精度を得るためには20項以上も必要であることが分かる。このような精度に関する精密な議論がこれまでなされていない原因は、一つには長時間にわたる時間発展を追跡することが、計算機能力の点から出来なかったことにあると思われる。

ところでモード数を変えた時の変化を図4から見てみよう。数値的に正確に計算するためには表4からわかるように非常に多くの項数が必要であるが、図4を見ると、大まかな性質は $N=4$ で十分に表現されている。これは定性的な性質が少数モードでも保存されている重要な例であろう。

表4. 攪乱の漸近解に対するフーリエモード数の影響 ($\alpha=1.2$, $R=4000$)

N	$E' (t=3000)$	$E' (t=6000)$	$ \hat{\psi}(0) (t=3000)$	$ \hat{\psi}(0) (t=6000)$
2	$6.689731 \cdot 10^{-2}$	$6.689733 \cdot 10^{-2}$	$9.917231 \cdot 10^{-2}$	$9.917233 \cdot 10^{-2}$
3	$4.462472 \cdot 10^{-2}$	$4.462260 \cdot 10^{-2}$	$8.041228 \cdot 10^{-2}$	$8.041012 \cdot 10^{-2}$
4	$4.268901 \cdot 10^{-2}$	$4.268815 \cdot 10^{-2}$	$7.852827 \cdot 10^{-2}$	$7.852738 \cdot 10^{-2}$
5	$4.197616 \cdot 10^{-2}$	$4.197341 \cdot 10^{-2}$	$7.782540 \cdot 10^{-2}$	$7.782252 \cdot 10^{-2}$
6	$4.366984 \cdot 10^{-2}$	$4.366846 \cdot 10^{-2}$	$7.948530 \cdot 10^{-2}$	$7.948384 \cdot 10^{-2}$
7	$4.404902 \cdot 10^{-2}$	$4.404807 \cdot 10^{-2}$	$7.910869 \cdot 10^{-2}$	$7.910790 \cdot 10^{-2}$
8	$4.328590 \cdot 10^{-2}$	$4.328512 \cdot 10^{-2}$	$7.984861 \cdot 10^{-2}$	$7.984763 \cdot 10^{-2}$
16	$4.337595 \cdot 10^{-2}$	$4.337517 \cdot 10^{-2}$	$7.919557 \cdot 10^{-2}$	$7.919477 \cdot 10^{-2}$
20	$4.309329 \cdot 10^{-2}$	—	$7.892049 \cdot 10^{-2}$	—
24	$4.298242 \cdot 10^{-2}$	—	$7.881254 \cdot 10^{-2}$	—
32	$4.303731 \cdot 10^{-2}$	$4.303666 \cdot 10^{-2}$	$7.886603 \cdot 10^{-2}$	$7.886536 \cdot 10^{-2}$
64	$4.303256 \cdot 10^{-2}$	—	$7.886141 \cdot 10^{-2}$	—

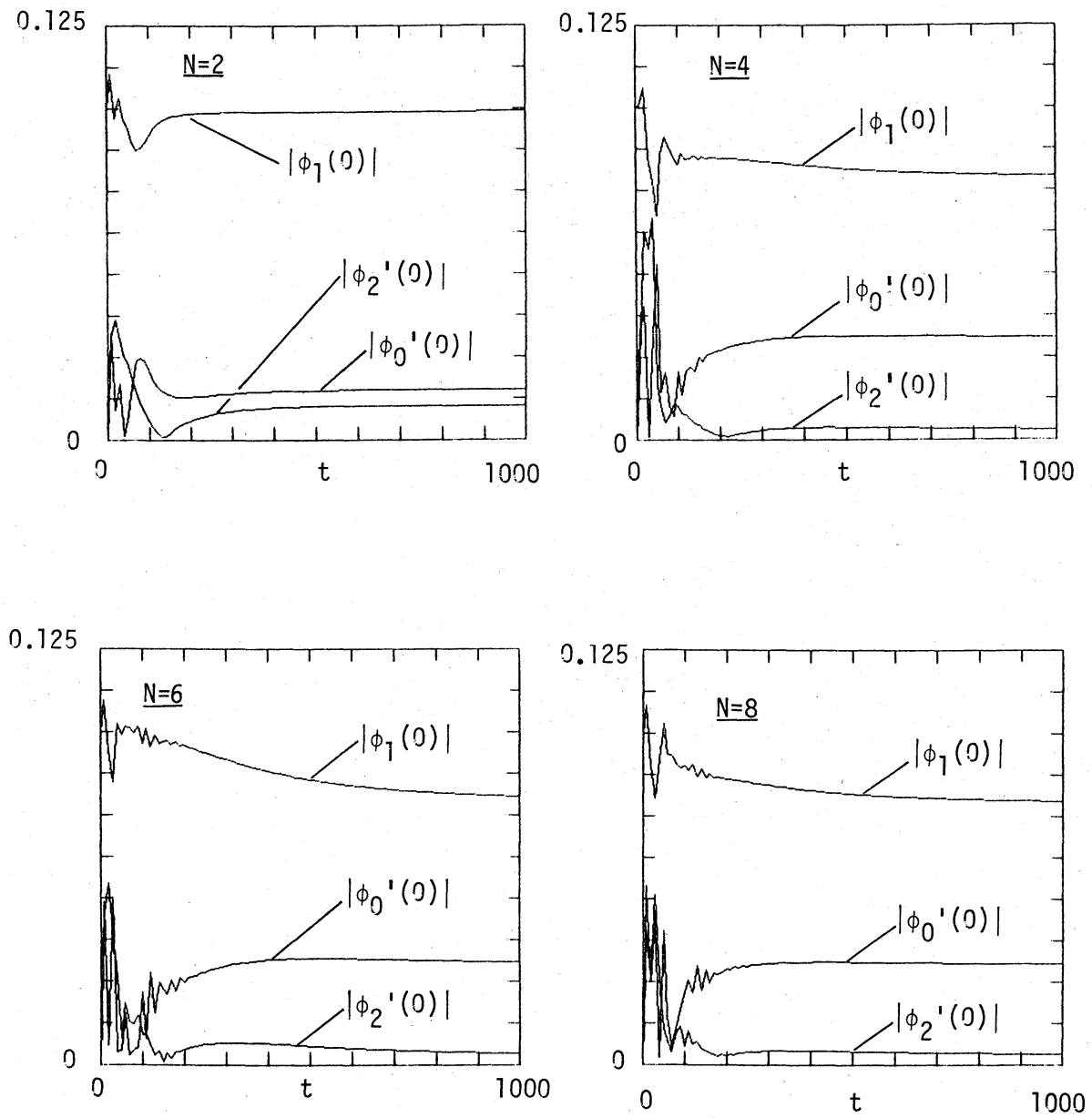


図4. 攪乱の時間発展に対するフーリエモード数の影響 ($\alpha=1.2$, $R=4000$)
 初期条件はいずれも $\phi_1(0)=0.1$, $\phi_0(0)=\phi_2(0)=0$. C.M.F. の条件での結果

§5.3. 弱非線形理論との比較

臨界点より少しはずれたレイノルズ数において、弱非線形理論をそのまま適用することは、たとえそれが振幅展開理論であっても非常に注意を必要とする。なぜなら、弱非線形理論の収束半径は、対象としている主流毎に異なるのみならず、パラメーター (α , R) によっても異なり、しかも、収束半径に関する知識は現在まで Herbert による亜臨界状態での臨界振幅に関するもの以外得られていないからである。従って、考えている主流、パラメーターの組合せに対して、振幅展開の収束半径がどの程度であるかは、今回のようなシミュレーションとの直接の比較によって初めて明らかになる。

ここでは、図1に○で示されている ($\alpha=0.8$, $R=20000$) 超臨界平衡振幅を持つ点での、初期時刻における攪乱の振舞いに関するフーリエモード打ち切り計算と、振幅展開による弱非線形理論との比較を示す。この場合、§3で述べた振幅展開に基づくLandau 方程式は次のようになる。

$$\text{C.M.F.:} \quad dA/dt = 0.005814 A + (-4.1901 - 106.52 i) |A|^2 A$$

$$\text{C.P.G.:} \quad dA/dt = 0.005814 A + (-3.4008 - 105.42 i) |A|^2 A$$

ただし、攪乱振幅は $y=0$ で定義されている。

図5から分かるように弱非線形理論がフーリエモード打ち切り計算と一致するのはほんの少し非線形性が効果的となってくる初期時間 ($t < 500$) である。C.P.G. と C.M.F. の結果はこのような初期時刻では定量的にもほとんど差がない。

特に注目すべき点は、弱非線形理論の結果はフーリエモードの数が多くなるほど長時間有効となる点であって、 $N=8$ は最も長時間一致している ($t < 650$)。この結果は振幅展開理論が小さな振幅では整合的な理論となっていることを示している。一方少数モード打ち切りは、整合性がないために小振幅でも近似に失敗している。それに対して比較的大きな振幅となると、打ち切りモデルは定性的に正しい結果を与える。これは打ち切りモデルの非常に興味深い性質の一つである。

§6. まとめ

平面ポアズイユ流中の2次元攪乱の時間発展を調べた。まず、数値的に正確に攪乱の変化を追うためには、フーリエモードは $N=20$ 以上が必要であることを示した。次に、C.P.G. と C.M.F. では2次元平衡振幅解へ到達する時間に大きな違いがあることを示した。

もちろん2次元平衡振幅解自体も両者では定量的に異なっている。また、振幅展開による弱非線形理論との比較も行った。その結果時間発展の初期においては弱非線形理論は、比較的よい結果を与えることが示された。

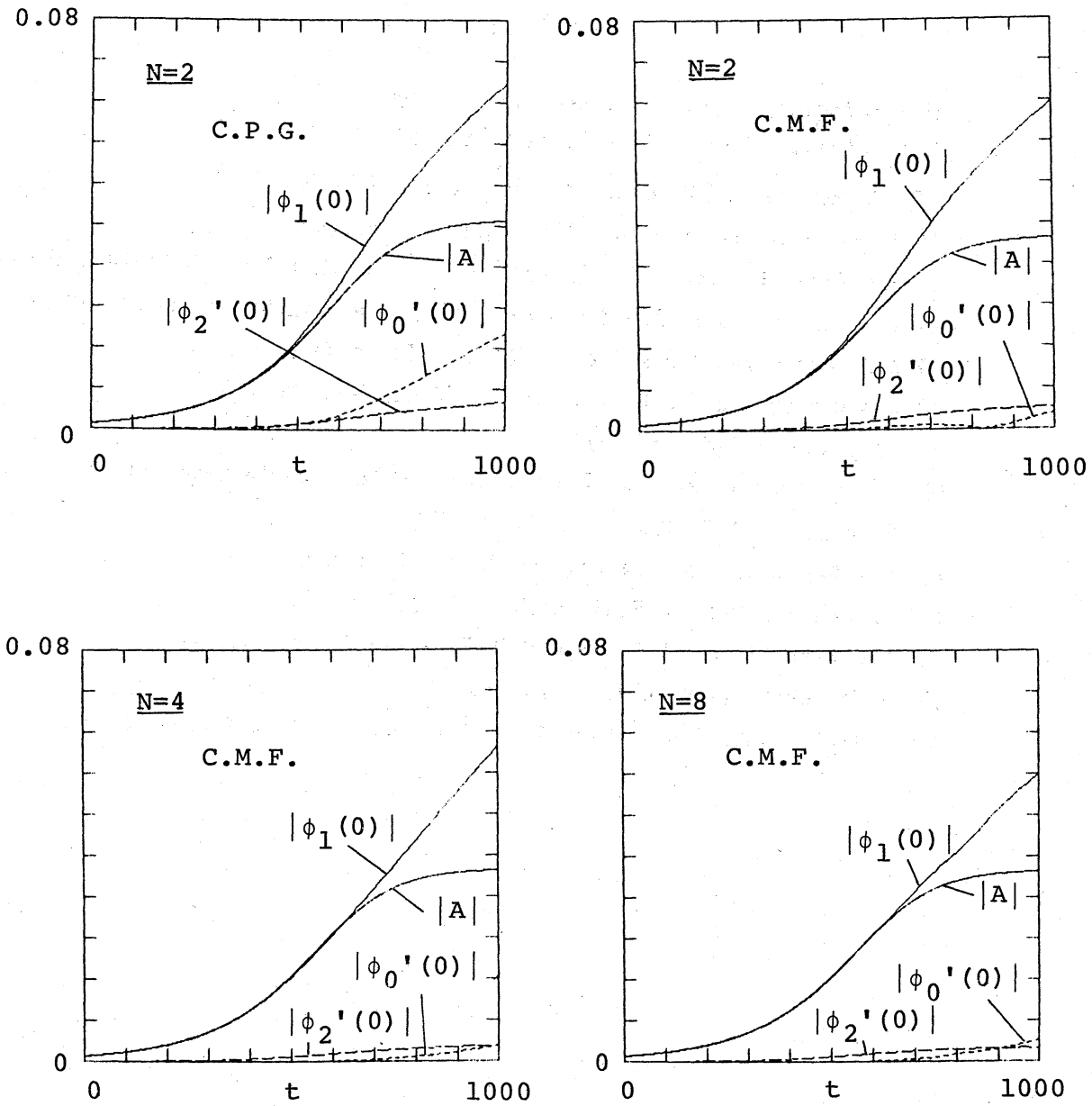


図5. 弱非線形安定性理論とフーリエモード打ち切り法の比較。

$\alpha=0.8$, $R=20000$. 初期条件は $\phi_1(0)=0.001$, $\phi_0(0)=\phi_2(0)=0$.

参考文献

- 1) L. H. Thomas : 1953, Phys. Rev. (2) 91, 780.
- 2) S. A. Orszag : 1971, J. Fluid Mech. 50, 689.
- 3) C. L. Pekeris and B. Shkoller: 1967, J. Fluid Mech. 29, 31.
- 4) J. Mizushima and K. Gotoh: 1985, J. Phys. Soc. Jpn.
- 5) J. P. Zahn, J. Toomre, E. A. Spiegel and D. O. Gough : 1974, J. Fluid Mech. 64, 319
- 6) T. Herbert : 1977, Fluid Dynamics Panel Sym. Lyngby. Denmark ; AGARD cp-224
- 7) W. D. George and J. D. Hellums : 1972, J. Fluid Mech. 51, 687.
- 8) S. A. Orszag and L. C. Kells: 1980, J. Fluid Mech. 96, 159.
- 9) L. Kleiser : 1982, KfK 3271
- 10) B. L. Rozhdestvensky and I. N. Simakin : 1984, J. Fluid Mech. 147, 261.
- 11) T. Herbert: 1983, Phys. Fluids 26, 871.
- 12) S. A. Orszag and A. T. Patera: 1983, J. Fluid Mech. 128, 347.
- 13) T. Herbert: 1983, J. Fluid Mech. 126, 167.
- 14) W. C. Reynolds and M. C. Potter: 1967, J. Fluid Mech. 27, 465.
- 15) T. Herbert : 1980, AIAA J. 18, 243.
- 16) N. Itoh: 1986, Proc. Third Asian Congress of Fluid Mechanics, 19.