
修士論文 (1993年度)

kagomé 格子上の反強磁性ハイゼンベルグモデルの研究

東京大学 大学院 理学系研究科 物理学専攻
鈴木研究室 博士課程 1 年

浅川 仁

(1994 年 3 月 22 日受理)

概要

この論文は、私の修士論文 "Hitoshi Asakawa: Study of the antiferromagnetic Heisenberg model on the kagomé lattice, Master Thesis, Univ.of Tokyo (1994)" の内容を中心に、物性研究 に掲載する原稿として、邦文に書き下ろしたものである。修士論文の一部分は、他の雑誌に掲載済み [1,2] (Physica A 198 (1993) 210, Physica A 687 (1994) 687) である。そこで、雑誌にはまだ未発表の部分と、それに関連する修士論文提出後 (1994 年 2 月 — 3 月) の研究成果とをここにまとめることにした。なお、修士論文の概要は、ここには掲載しない部分も含めて本稿の 1.3 節に示す。

ここで、この論文の構成を述べておく。第 1 節は introduction として、まず籠目格子上の反強磁性ハイゼンベルグモデルの特徴とその問題点を説明する (1.1 節)。つぎに、このモデルをめぐる過去の研究を概観する (1.2 節)。そのあと、私自身のこのモデルに関する研究の経緯を述べる (1.3 節)。その内容は、修士論文の概要でもある。第 2,3,4 節が本稿の中心であり、私自身の研究結果である。籠目格子上の反強磁性ハイゼンベルグモデルの性質を、スピン波理論を用いて考察した結果を中心に説明する。ここで議論する方法は、この系と同様な性質をもつ、他の反強磁性ハイゼンベルグモデルやハバードモデルの性質を考察する上でも、有用であると考えている。第 5 節では、第 2,3,4 節の結果の考察をしてまとめとする。

1 はじめに

1.1 籠目格子上的反強磁性ハイゼンベルグモデル

近年、低次元のスピン系及び電子系の研究は、非常に活発に行なわれている。その理由の一つとしては、二次元のハイゼンベルグモデルやハバードモデルの研究が、高温超伝導のメカニズムの解明に重要であると考えられるからであろう。しかしながら、このような具体的な物理現象を度外視しても、低次元のスピン系及び電子系の研究は、統計物理学的に非常に興味深いと思われる。二次元の量子スピン系である籠目格子上的反強磁性ハイゼンベルグモデルは、このような非常に興味深い系の一つであり、ここ数年の間に非常に多くの研究が行なわれた。この系のハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (1.1)$$

と書ける。但し、 $\mathbf{S}_i$ はサイト i におけるスピン演算子であり、スピンの大きさを S とする。和は、籠目格子上的最近接サイトの組にわたってとるものとする。さらに、以下の実際の計算では、常に系の格子点数（システムサイズ）を N とし、周期的境界条件をとるものとする。

このモデルに対する関心が高まった理由の一つは、基底状態においても長距離秩序が現れにくいと期待されることにある。実際、以下に列挙する性質を見ても、この量子系が絶対零度でも対称性の破れを起こしにくいことが暗に示唆される。

- 最近接格子点数が少ない。

籠目格子の最近接格子点数は 4 である。この値は、系が二次元であることに由来して、それよりも高次元の系と比べると小さい値であるといえる。また、同じ二次元でも、正方格子の場合は 4 であるが、三角格子の場合は 6 であるから、この系は二次元系の中でも最近接格子点数は少ない方である。この値が小さいということは、長距離の相関が現れにくいことを示唆している。

- フラストレーションがある。

籠目格子の最小のセルは、三角形である。また、スピンは反強磁性で結合している。従って、三角格子上的反強磁性ハイゼンベルグモデルの場合と同様に、この系もフラストレーションのある系といえる。フラストレーションの影響は、イジングモデルの場合と比べると深刻ではないと思われるが、ハイゼンベルグモデルの場合でも、長距離秩序を弱める寄与をするであろう。

- 対応する古典系の基底状態に連続縮退が存在する。

籠目格子上的反強磁性古典ハイゼンベルグの基底状態は、いわゆる 120° 構造である。すなわち、隣り合うスピンのなす角度がすべて 120° になる構造である。すべてのスピンを一斉に回転する自由度を除いても、基底状態の構造は一意的ではない。これらの基底状態のうち、すべてのスピンの同一平面内に存在する共平面的構造だけでも、その個数は少なくない。共平面的構造の中でも代表的な $q=0$ 構造と $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

図 1 : $q = 0$ 構造 (左) と $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ 構造 (右)

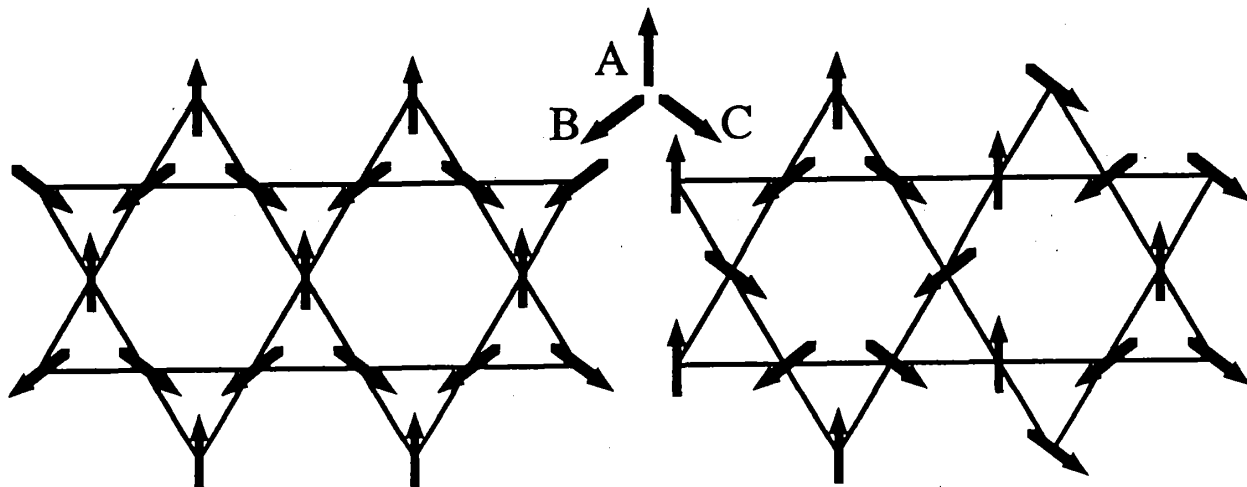
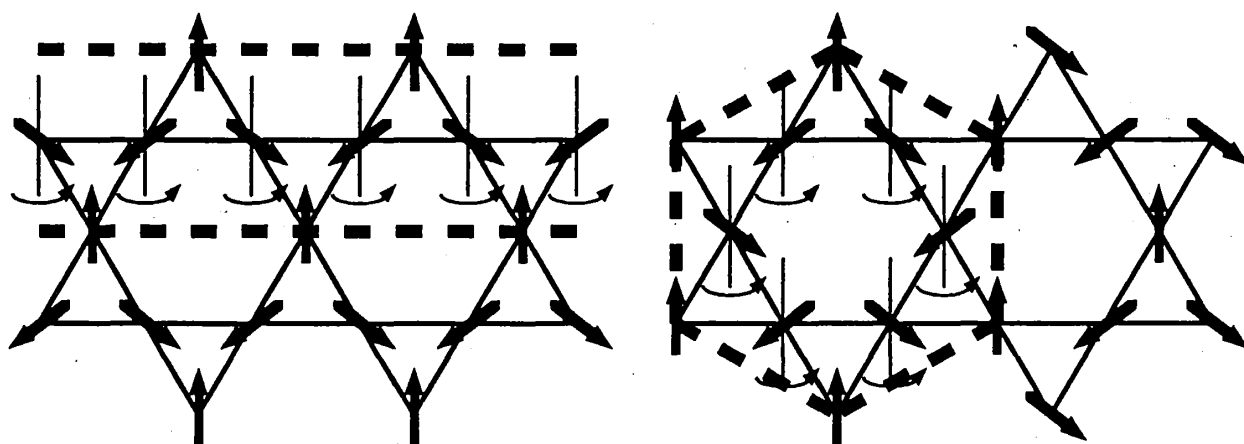


図 2 : $q = 0$ 構造 (左) と $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ 構造 (右) の連続縮退



構造とを図 1 に示す。これから、両状態の連続縮退について述べる。図 2 において A 副格子を結ぶ波線で囲まれた領域にある B, C 副格子上的スピンの着目する。それらのスピンをそれぞれの位置で、A 副格子上的スピンの向きを軸として一斉に回転させる。このようにして作られる構造もまた、(共平面的ではないが) 120° 構造、すなわち基底状態である。一般に、他の基底状態でもこのような半局所的連続縮退が存在する。ここでは、システムサイズ N に対して、高々 $N^{\frac{1}{2}}$ 程度の隣り合うスピンからなる領域を "半局所な領域" と呼ぶことにする。

つまりこの系では、絶対零度でも (熱的なゆらぎがなくても), 量子力学的なゆらぎによって、反強磁性的な秩序が起こりにくいであろう。とりわけ、スピンの大きさ S が小さいときには、この量子力学的な効果は大きいと思われる。

こういった状況をふまえて、この系の基底状態や低励起状態のふるまいに大きな関心が集まり、多くの研究が行なわれてきた。これらの研究において取り組まれている

る籠目格子上的反強磁性ハイゼンベルグモデルをめぐる問題点を、もう少し具体的に列挙してみると、次のようになる。

- $S = 1/2$ のとき、基底状態に反強磁性的秩序は存在するか。
- 反強磁性的秩序が存在しないとすれば、臨界的か無秩序か。別の言い方をすれば、低励起の分散関係はどうなっているか。
- 反強磁性的秩序が存在しないとすれば、その他の秩序は存在するか。
- 基底状態や低励起状態のふるまいが、 S の値 (その大きさや、整数か半整数かということ等) に依存するか。

以上のような問題に対して、これまでにどういった研究がなされ、どのような結果が得られているかを、次の節で簡単にまとめることにする。

1.2 籠目格子上的反強磁性ハイゼンベルグモデルをめぐる研究の概観

籠目格子上的反強磁性ハイゼンベルグモデルについては、今日にいたるまでさまざまな研究がなされている。ここでは、それらの研究を簡単に振り返ってみることにする。

この系に関する研究の発端は、1989 年の Grewell と Busch による比熱の測定にあった [22]。彼らは、グラフアイト上に形成される ^3He の層の比熱のふるまいに次のような異常があることを発見した。

- 2.5mK 付近に鋭いピークが存在する。
- そのピークに対応するエントロピー変化が、期待されていた値 $k_B \ln 2$ の約半分である。

Elser はこれらの現象を説明するために、籠目格子上的スピンモデルを導入した [3]。これは、籠目格子上的反強磁性ハイゼンベルグモデルにフリースピンを付け加えたモデルである。(フリースピンの位置は六角セルの中央である。) Elser はその論文の中で、(フリースピンのない) 籠目格子上的反強磁性ハイゼンベルグモデルそのものについても考察し、基底状態においても長距離秩序の現れにくい系であることを示唆している。また、彼は 12 サイトのクラスターにおける数値対角化で比熱を求め、それがダブルピークをもつことを示した。この研究以来、現実の物理系 (^3He の層) の物性とは切り放して、籠目格子上的反強磁性ハイゼンベルグモデルそのものについての研究が始まったといえる。以下では、方法別にこのモデルに関する研究を概観する。

□ スピン波理論

Zeng と Elser は線形スピン波理論を用いて、基底状態におけるスタガード磁化を評価した [4]。彼らは、籠目格子の各六角セル中央にスピンを一個ずつ用意して、六

角セル上のスピンと反強磁性相互作用をするモデルを考えた。これは、三角格子上の反強磁性ハイゼンベルグモデルと、罫目格子上の反強磁性ハイゼンベルグモデルとを内挿するモデルである。新たに加えた相互作用の強さを変化させて三角格子上のモデルが罫目格子上のモデルに近づいていくその途中の段階で、スタガード磁化は 0 になる。このことから彼らは、罫目格子上のこのモデルが長距離秩序をもちにくいのではないかと予想している。

Harris らは、 $q=0$ 構造と $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ 構造とから線形スピン波展開を行った [5]。線形の範囲内では、両方の分散関係が互いに等価であること、その分散関係の中にはフラットモードが現れることを示した。フラットモードとは、任意の波数 k の励起に対して、励起エネルギー $\omega(k)$ が常に 0 となるモードのことである。すなわち、 $\omega(k) \equiv 0$ となるモードのことをいう。このフラットモードの存在は、線形スピン波理論によってスタガード磁化の量子補正を評価すると、それが発散することを意味している。これに対して、Chubukov は両構造からのスピン波展開において繰り込みをすれば、フラットモードがリフトアップすると主張した [7]。また、このとき、 $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ 構造の方が、 $q=0$ 構造よりもエネルギー的に安定化する可能性も示唆した。しかしながら、彼の繰り込み計算の詳細は報告されていない。

□ 量子モンテカルロ法

Zeng と Elser は 13 サイトまでのデカップルドセルをもちいたモンテカルロ法により、比熱を計算した [4]。前述の 12 サイトの数値対角化法で現れた比熱のダブルピークが、熱力学的極限でも残るかを調べるためである。彼らの結果はダブルピークが残る可能性を示唆するものであった。

鈴木-トロッター変換を用いたモンテカルロ法による計算結果はまだ報告されていない。しかしながら、この系の低温における不符号問題を解決する努力が行なわれている。

□ 有限系の数値対角化 ($S = 1/2$)

Zeng と Elser は 21 サイトまでのクラスターを用いて、基底状態のエネルギー、エネルギーギャップ及びスピン相関を評価した [4]。エネルギーギャップが熱力学的極限で有限に外挿される傾向があること、スピン相関が距離の指数関数で上から押えられることから、彼らは基底状態が磁性的秩序をもたないのではないかと予想している。その後、Leung と Elser は 36 サイトまでのクラスターを用いて、これらの値を評価して同様の結果を得ている [8]。さらに、Leung らは、スピンバイエルス相関も評価し、この秩序が存在するとしても、かなり小さいであろうと予想している。

Chalker と Eastmond は、18 サイトまでのクラスターを用いて、ネール、スピンバイエルス、スピンネマティック、カイラルの各相関を評価した [16]。これらの相関は、距離の関数として急速に減衰している。このことから彼らは、基底状態がハミルトニアンに存在するすべての対称性をもった状態、いわゆるスピンリキッドなのではないかと考えている。

数値対角化を近似的に行う方法として、強制振動子法がある。この方法で、Fukamachi と Nishimori は 18 サイトまでのクラスターの比熱を計算した [21]。彼らは、

ダブルピークのうち低温側のものが、熱力学的極限で消えることを示唆する結果を得た。しかしながら最近になって、彼らと同程度の大きさのクラスターで（数値的に）厳密な対角化を行うと、彼らの結果とは微妙に矛盾することが報告されている。

□ 摂動展開

Singh と Huse は、 $S = 1/2$ の系で $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ 構造からの摂動展開により、スタガード磁化を評価した [6]。彼らはその論文の中で、三角格子の場合についても計算して、両者の場合を比較している。三角格子の場合は、臨界的か、あるいは非常に弱い秩序のあることが期待されるのに対して、箆目格子の場合は、無秩序なのではないかと予想している。

□ 高温展開

Harris らは、 β^8 までの高温展開により、帯磁率を評価した [5]。彼らの計算によれば、帯磁率行列の最大固有値は β^8 に至ってはじめて波数依存性を持ち、その 8 次の最大帯磁率が $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ 構造に対応していることが示された。

□ $1/N$ 展開

Marston と Zeng[9], 及び Sachdev[10] はそれぞれ、このモデルを $SU(2)$ フェルミオン系及び $Sp(1)$ ボゾン系に書き換えた。しかる後に、これらを $SU(N)$ 及び $Sp(N)$ に拡張して $1/N$ 展開を行った。二つの異なった方法から得られる結果は一致していない。 $SU(N)$ フェルミオンを用いた展開からは、 $S = 1/2$ の箆目格子上の反強磁性ハイゼンベルグモデルの基底状態には、磁性的秩序は存在しないが、ダイマー秩序が存在することが予想されている。一方、 $Sp(N)$ ボゾンを用いた展開からは、箆目格子上の反強磁性ハイゼンベルグモデルの基底状態は、 S が十分大きい場合には $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ 構造になり、 S が小さい場合にはいかなる秩序も存在しない状態になることが予想されている。

□ コヒーレント表示 — WKB 法

Delft と Henly は二つの相異なる古典的基底状態に着目して、その間のトンネル確率を計算した [19,20]。その計算によれば、スピン S が整数の場合、トンネル確率は有限で S が大きくなるにつれて急速に 0 に近づく。一方、スピン S が半整数の場合、トンネル確率は 0 である。このことから彼らは、スピンが半整数の場合の方が整数の場合よりも、磁性的な秩序が現れ易いのではないかと予想している。

□ その他

Hsu と Schofield は、ハミルトニアンを $SU(2)$ フェルミオンを用いて書き直した後、基底状態に対する BCS タイプの試行波動関数を構成した [11]。また、Yang らは、ハミルトニアンをフラックスのついたフェルミオンを使って書き直し、Kalmeyer-Laughlin タイプの試行波動関数を構成した [13]。両研究において、それぞれの試行関数と有限系の基底状態の波動関数との重なり等が評価されている。

Wang は二次元のジョルダン-ウィグナー変換を用いて、ハミルトニアンを非局所的な相互作用をもつフェルミオン系に書き換えた [12]。平均場近似による計算の結果から、彼は、この系の基底状態は無秩序で、しかも、励起はギャップレスであろうと予想している。

新しいタイプの基底状態の存在を予想している結果もある。Chandra と Coleman はこの系をスピン超流動体として扱い、モーメントの現れない新しい磁性の存在を予想している [14]。また、Chandra らは、異方性がある場合はスピングラス秩序が現れるのではないかと考えている [15]。

さらに、Huse と Rutenberg [18] 及び Chalker ら [17] によって、籠目格子上の反強磁性古典ハイゼンベルグモデルの $T \rightarrow 0$ における隠れた秩序の研究も行なわれている。

以上、籠目格子上の反強磁性ハイゼンベルグモデルをめぐる研究を概観した。特に、スピンの大きさ S が小さい場合には、基底状態に磁性的秩序がないことを予想する研究結果が多いようである。とは言え、まだ決着がついたとは言い難い。仮に、磁性的に無秩序であるにしても、それ以外の秩序があるのかなのか、また、基底状態の上のエネルギーギャップの有無についてはどうか、といった点については見解が大きく分かれている。まして、基底状態や低励起状態の性質が、スピン S の値に依存するかという問題については、答えが出ていない。つまり、系の物理的性質が、 S の大きさや、 S が整数か半整数かということに影響されるかという問題は未解決である。これらの問題に答えを出すには、より一層の研究が必要である。

1.3 研究の経緯

この節では、私自身の籠目格子上の反強磁性ハイゼンベルグモデルに関する研究の経緯の概略をまとめる。この節の内容は、私の修士論文の概要でもある。

○ $S = 1$ の系のトライマー状態からの摂動展開

この研究は、籠目格子上の反強磁性ハイゼンベルグモデルの基底状態及び低励起状態の性質が、 S の値に依存するかどうかを調べる糸口を得ることを目的として行った。まず、摂動展開によって、 $S = 1$ の系の基底状態のエネルギー及びエネルギーギャップを評価した。次に、ヒルベルト空間を制限することにより、籠目格子上の解けるスピンモデルを $S = 1$ と $S = 1/2$ の場合について構成した。

この研究の詳細については、H. Asakawa and M. Suzuki: "Perturbational expansion of the antiferromagnetic Heisenberg model with $S = 1$ around the trimer state on the kagomé lattice", Physica A 198 (1993) 210-226 を参照していただきたい。

○ 線形スピン波理論における副格子磁化の可能性

前節でも述べた通り、線形スピン波理論でこの系のスタガードを評価すると、その量子補正は発散する。しかしながら、副格子についての対称性が破れることを仮定すると、線形近似の範囲内でも、副格子のうちの一つについて有限のスタガード磁化が評価できることを示した。まず、副格子についての対称性が破れることを仮定して、線形スピン波のハミルトニアンの長波長近似を行った。次に、この長波長有効ハミル

トニアンを用いて、実際にスタガード磁化の量子補正を評価した。その結果、一つの副格子について、その値は有限であった。

この研究の詳細については、H.Asakawa and M.Suzuki: "Possibility of a sublattice order of the kagomé antiferromagnet", Physica A 205 (1994) 687-701 を参照していただきたい。

○ 量子ゆらぎによるフラットモードの消失の可能性

この研究の内容は、この後の第 2,3,4 節で詳しく説明するが、ここでは、その概要をまとめておくことにする。

前述の通り、この系の線形スピン波の励起スペクトルの中には、フラットモード ($\omega(\mathbf{k}) \equiv 0$) が存在する。このことが、線形スピン波理論においてスタガードの磁化量子補正が発散する原因でもあった。このフラットモードが現れる起源を示し、高次の量子補正によってこれがリフトアップする可能性について考察するのがこの研究の目的である。まず、この線形スピン波のフラットモードが、なぜ現れるのかを、線形スピン波のハミルトニアンの対称性との関係から、定量的に考察する (第 2 節)。次に、スピン波の逆展開の方法を用いて、古典的基底状態の一つである $q=0$ 構造のからのスピン波展開を行う。その結果から、高次の量子効果によってフラットモードが通常のゴールドストーンモードにリフトアップする可能性を示す (第 3 節)。最後に、有限系の対角化 ($S=1/2$) によって、 $q=0$ 構造のスタガード磁化を評価する (第 4 節)。

○ その他

この系の低励起スペクトルを評価するために、スピン波理論以外の方法でも研究を行っている。長距離秩序の存在を仮定しない方法で低励起スペクトルを求めるために、シュインガーボゾンの方法や、修正スピン波の方法を用いて計算を行った。この結果の一部は、修士論文に示してある。

また、鈴木-トロッター展開を用いた量子モンテカルロ法により、比熱やスタガード磁化を求める計算も行った。低温において不符号問題が深刻になるため、物理的考察をするのに十分なデータを得るには至っていない。しかしながら、この系のシュミレーションのエルゴード性を保証するためには、一連のセミローカルなスピンプリップが必要であること等、新しくわかったことも少なくない。これらのことについては、別の機会に報告する予定である。

2 線形スピン波理論におけるハミルトニアンの対称性とフラットモードの存在

この節において、我々は、この系の線形スピン波ハミルトニアンのもつ対称性とフラットモードの存在との関係について考察する。

ハミルトニアンの対称性について議論するために、まず半局所的なエルミート演

算子 $\mathcal{L}$ を導入する。この演算子を生成子とするユニタリー変換のもとで線形スピン波のハミルトニアンは不変に保たれる。このような $\mathcal{L}$ を無数に作ることができることを示す。また、このエルミート演算子は、対応する古典系の基底状態において、エネルギーを不変に保つようなスピンの回転を引き起こす生成子からも導くことができる。次に、籠目格子上の格子点 $\mathbf{x}$ でラベルされる演算子 $\mathcal{L}$ の集合 $\{\mathcal{L}(\mathbf{x})\}$ を考える。この集合のそれぞれの元と、フラットモードの自由度との対応関係を明らかにする。最後に、(線形近似ではなくて) 高次の量子補正項まで考慮すると、このユニタリー変換のもとでの不変性がなくなること示す。

ホルスタイン-ブリマコフ変換を用いて、一つの古典的な基底状態 (120° 構造) のまわりで、系のハミルトニアンのスピン波展開をおこなう。 $(1/S)^{\frac{1}{2}}$ に関して高次の項を無視することによって、線形スピン波のハミルトニアンを得る。(計算の詳細は Appendix A を参照。)

$$\mathcal{H}_{\text{LSW}} = -S^2 N + \frac{S}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \left\{ (a_i^\dagger a_i + a_j^\dagger a_j) + \frac{1}{2} (a_i^\dagger a_j + a_i a_j^\dagger) - \frac{3}{2} (a_i a_j + a_i^\dagger a_j^\dagger) \right\}, \quad (2.1)$$

ここで、和は籠目格子上のすべての最近接格子点の組にわたってとる。また、 a_i ($a_i^\dagger$) は、サイト i におけるマグノンの消滅 (生成) 演算子である。スピンの大きさ及び系の格子点数をそれぞれ S, N で表す。系は、周期的境界条件をとるものとする。

まず、この線形スピン波ハミルトニアン $\mathcal{H}_{\text{LSW}}$ が $N/3$ 個の半局所的な変換のもとで不変であることを示す。その準備として、次のようなエルミート演算子を考える。

$$\mathcal{L}(C) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2}} \{ a_{2j-1} - a_{2j} + a_{2j-1}^\dagger - a_{2j}^\dagger \}. \quad (2.2)$$

ここで、記号 C は、つぎの二つの条件をみたす任意のループを表す。

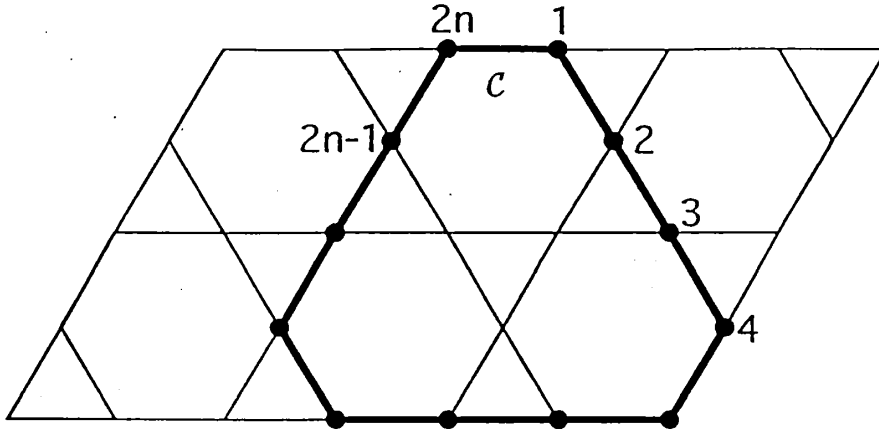
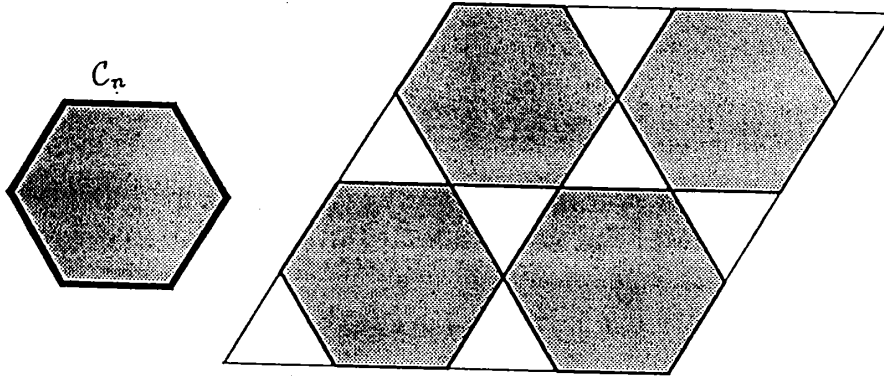
- 条件 1 : 籠目格子上の隣り合う偶数個 ($2n$) のサイトからなること。
- 条件 2 : 籠目格子上の三角セルと高々一辺しか共有しないこと。

従って、そのループ上のサイトに $1, 2, \dots, 2j-1, 2j, \dots, 2n-1, 2n$ と順に番号をふることができる。(図 3 を参照。) 式 (2.2) における和は、ループ上のこれらのサイトにわたる和である。このようにして構成される任意の演算子 $\mathcal{L}$ が、この系の線形スピン波のハミルトニアンと可換であることは、実際の計算によって容易に確かめることができる。すなわち、

$$[\mathcal{H}_{\text{LSW}}, \mathcal{L}(C)] = 0 \quad \text{for } \forall C \quad (2.3)$$

が成り立つ。ゆえに、このエルミート演算子 $\mathcal{L}$ を生成子とするユニタリー変換のもとで、この系の線形スピン波のハミルトニアンは不変である。

$$\mathcal{H}_{\text{LSW}} = U^\dagger(C) \mathcal{H}_{\text{LSW}} U(C); \quad U(C) = \exp(-i\Lambda \mathcal{L}(C)) \quad \Lambda \in \mathbf{R}. \quad (2.4)$$

図 3 : ループ C の例図 4 : ループ $\{C_n\}$ 

このユニタリー演算子 $U(C)$ は次のようにしても構成できる。スピン波展開の出発点であった古典的な基底状態において、エネルギーを変えない半局所的なスピンの回転に着目する。その回転を引き起こすユニタリー演算子を、スピン演算子を用いて構成する。しかる後に、この（スピン演算子で構成された）ユニタリー演算子に対してスピン波の線形近似を行うことによって $U(C)$ が得られる。しかしながら、このようにして構成する場合、結果的には、ループ C に、上記の二つの条件より強い制限がつくことになる。ある古典的な基底状態における、エネルギーを不変に保つスピンの変換で、回転が許されるスピンを結ぶ線は一般にループになる（系は周期的境界条件をとっている。）が、その可能なループの集合は、上の二条件をみたすものの一部でしかない。

次に、（上記の二つの条件をみたす）ループ $\{C\}$ の集合 $\{C_n\}$ を考える。以下の議論においては、具体的な考察をするために $\{C_n\}$ として、籠目格子上的六角セルをまわるループの集合を考える。（図 4 を参照。）このとき、集合 $\{C_n\}$ の元の個数は $N/3$ となる。また、 $\{\mathcal{L}(C_n)\}$ の各演算子は、つぎの関係をみたす。

$$[\mathcal{H}_{\text{LSW}}, \mathcal{L}(C_n)] = 0, \quad [\mathcal{L}(C_m), \mathcal{L}(C_n)] = 0 \quad \text{for } \forall m, \forall n. \quad (2.5)$$

左式は、定義より明らかである。また、一般に C_m と C_n とは、一つの格子点を共有

することもあるが、その場合でも右式は成立する。さらに、これらのエルミート演算子を用いて、線形スピン波のハミルトニアンを不変に保つ $N/3$ 個の半局所的なユニタリー変換が次のように構成できる。

$$\mathcal{H}_{\text{LSW}} = U^\dagger(C_n) \mathcal{H}_{\text{LSW}} U(C_n); \quad U(C_n) = \exp(-i\Lambda \mathcal{L}(C_n)) \quad \Lambda \in \mathbf{R}. \quad (2.6)$$

以上のことから、 $\mathcal{H}_{\text{LSW}}$ は $N/3$ 個の独立な半局所的な対称性をもっていることが明らかになった。そして、この対称性は、対応する古典系の基底状態における、半局所的な連続縮退（対称性）に由来していることがわかった。

つぎに、線形スピン波理論においてフラットモードが現れることの、数式上の意味合いについて考察する。古典的基底状態の一つである $q=0$ 構造からのスピン波展開を用いて議論を進めることにする。従来の線形スピン波理論を用いることによって [2,5]、この系の線形スピン波の励起スペクトルを得ることができる。それは、三つのブランチからなることが知られている。（計算は Appendix B を参照。パラメーター $\gamma=0$ とすれば、線形スピン波の計算となる。）ここでは、ノーマルモード展開の結果だけを示す。

$$\mathcal{H}_{\text{LSW}} = -S(S+1)N + \mathcal{H}_{\text{Goldstone}} + \mathcal{H}_{\text{flat}}; \quad (2.7)$$

$$\mathcal{H}_{\text{Goldstone}} = \sum_{\mathbf{k}, \mu=1,2} S \omega_{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) \left(\alpha_{\mu}^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_{\mu}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right), \quad (2.8)$$

$$\mathcal{H}_{\text{flat}} = \frac{3}{2} S \sum_{\mathbf{x}} \left[P^2(\mathbf{x}) + \omega_f^2 Q^2(\mathbf{x}) \right], \quad (2.9)$$

$$\omega_{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) = \sqrt{2 \sum_{i=1}^3 \sin^2 k_i}, \quad \omega_f \equiv 0; \quad (2.10)$$

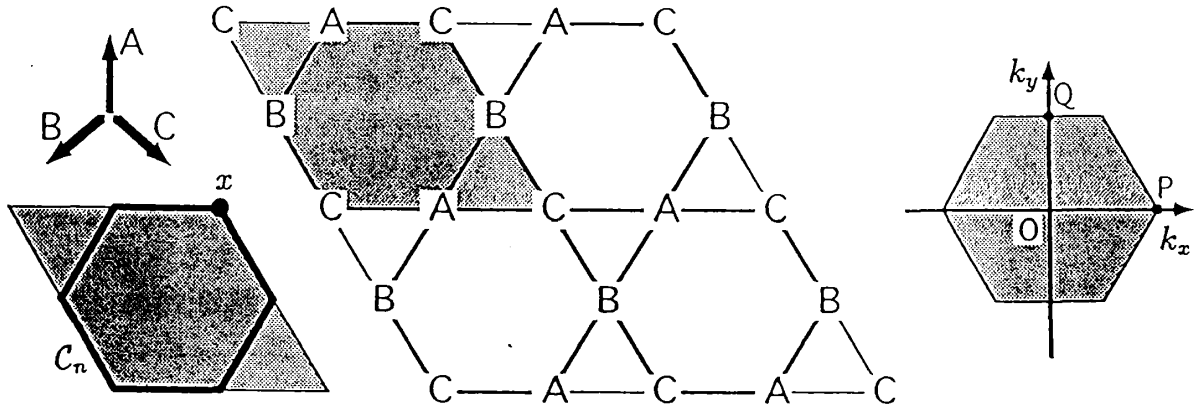
$$k_1 = (-k_x + \sqrt{3}k_y)/2, \quad k_2 = k_x, \quad k_3 = (-k_x - \sqrt{3}k_y)/2. \quad (2.11)$$

ここで、 $\mathcal{H}_{\text{Goldstone}}$ は二つの（縮退した）ギャップレスリニアモード、すなわち従来のゴールドストーンモードを表している。実際に、 $k \sim 0$ のとき、 $\omega_{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) \sim k$ である。一方、 $\mathcal{H}_{\text{flat}}$ がフラットモードを表している。その右辺において、 $\mathbf{x}$ に関する和は、 $q=0$ 構造における $N/3$ 個のブラベ格子点（ここでは C 副格子とする。）にわたるものとする。（図 5 を参照。）また、 $P(\mathbf{x})$ 、 $Q(\mathbf{x})$ は正準共役な演算子であるが、その定義をこれから説明する。ノーマルモード展開を行う過程において、フラットモードに対応するマグノンの演算子のフーリエ空間表示 $d_f(\mathbf{k})$ を得る。（計算の詳細は Appendix B を参照。ここでの $d_f(\mathbf{k})$ は Appendix B の $d_3(\mathbf{k})$ に対応している。）このマグノンは、副格子に対応する三種類のマグノンの線形結合として表現される。

$$d_f(\mathbf{k}) = \sum_{\nu=1,2,3} u_{\nu}(\mathbf{k}) a_{\nu}(\mathbf{k}); \quad (2.12)$$

$$(u_{\nu}(\mathbf{k})) = N_0(\mathbf{k}) (-\sin k_1, -\sin k_2, -\sin k_3), \quad (2.13)$$

図 5 : $q = 0$ 構造とその第一ブリルアンゾーン
(図中の P, Q はそれぞれ $(2\pi/3, 0), (0, \pi/\sqrt{3})$)



$$N_0(\mathbf{k}) = [\sin^2 k_1 + \sin^2 k_2 + \sin^2 k_3]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.14)$$

ここで、 $\nu = 1, 2, 3$ は三副格子 A, B, C にそれぞれ対応している。すなわち、 $a_\nu(\mathbf{k})$ は、副格子 ν 上の波数 $\mathbf{k}$ をもったマグノンの消滅演算子である。次に、 $d_f(\mathbf{k})$ を逆フーリエ変換することにより、実空間における演算子 $d_f(\mathbf{x})$ を構成し、これを用いて、次のような演算子 $P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})$ を定義する。

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (d_f(\mathbf{x}) + d_f^\dagger(\mathbf{x})), \quad Q(\mathbf{x}) = \frac{i}{\sqrt{2}} (d_f(\mathbf{x}) - d_f^\dagger(\mathbf{x})), \quad (2.15)$$

このとき、これらの演算子が正準共役であることがわかる。

$$[P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}')] = -i\delta_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'}. \quad (2.16)$$

以上のことから、 $\mathcal{H}_{\text{flat}}$ は、 $\mathbf{x}$ でラベルされる $N/3$ 個の独立な非相対論的自由粒子のハミルトニアンとなることがわかる。このとき、 $\mathcal{H}_{\text{flat}}$ には $\{Q(\mathbf{x})\}$ が含まれないことから、 $N/3$ 個の演算子 $\{P(\mathbf{x})\}$ は $\mathcal{H}_{\text{flat}}$ すなわち $\mathcal{H}_{\text{LSW}}$ と可換になる。従って、線形スピン波理論においてフラットモードが存在することは、その自由度に対応するだけの "マグノン" が自由粒子になることであり、その結果として、フラットモードの自由度分の "運動量演算子" が、線形スピン波のハミルトニアンと可換になることがわかった。

以上の考察をふまえて、線形スピン波のハミルトニアンの半局所的な対称性と、線形スピン波理論におけるフラットモードの存在との関係について考える。この点を明らかにするために、二つの演算子の集合 $\{\mathcal{L}\}$ と $\{P\}$ の関係を明らかにしたい。以下の計算において、六角形のループ C_n を、その右肩の座標 $\mathbf{x}$ を用いて表すことにする。(図 5 を参照。) このとき、六角セルを指定する座標の集合 $\{\mathbf{x}\}$ は、前述の場合と同様に $q = 0$ 構造のブラベ格子である C 副格子となる。この定義により、 $\mathcal{L}(C_n)$ を、以下では $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ と表すことにする。ここで、 $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ と $P(\mathbf{x})$ とは次の関係式で結

び付けられる。

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{3}{N}} \sum_{\mathbf{x}'} w(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) P(\mathbf{x}'), \quad (2.17)$$

$$w(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{3}{N}} \sum_{\mathbf{k}} 2ie^{-ik_3} N_0^{-1}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.18)$$

ここで、 $\mathbf{x}$ 及び $\mathbf{k}$ に関する和は、それぞれ、すべてのブラベ格子点及び第一ブリルアンゾーンにわたるものとする。すなわち、 $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ は $P(\mathbf{x})$ の線形変換によって得られる。また、この逆変換も構成することができる。この式の意味する所は明らかである。つまり、 $N/3$ 個の $\{P(\mathbf{x})\}$ が $\mathcal{H}_{\text{LSW}}$ と可換であるとき、 $N/3$ 個の $\{\mathcal{L}(\mathbf{x})\}$ もまた $\mathcal{H}_{\text{LSW}}$ と可換になる。大雑把な言い方をすれば、 $N/3$ 個の $\{P(\mathbf{x})\}$ が $\mathcal{H}_{\text{LSW}}$ と可換であることは、 $N/3$ の自由度のフラットモードが存在することであり、 $N/3$ 個の $\{\mathcal{L}(\mathbf{x})\}$ が $\mathcal{H}_{\text{LSW}}$ と可換であることは、 $N/3$ 個の対称性が存在することであった。従って、線形スピン波のハミルトニアンの中局所的な対称性と、線形スピン波理論におけるフラットモードの存在とは、表裏一体のものであると言える。

今度は、線形近似をせずに、スピン波展開したハミルトニアンにおいて、 $(1/S)^{\frac{1}{2}}$ に関する高次の量子補正項まで考慮する。スピン系のハミルトニアンに、ホルスタイン-プリマコフ変換を行って得られる（近似なしの）スピン波のハミルトニアンは次のようになる。（計算の詳細は、Appendix A を参照。）

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{SW}} = & -S^2 N + \sum_{i \rightarrow j} \left[\frac{S}{2} (n_i + n_j) - \frac{1}{2} n_i n_j \right. \\ & + \frac{1}{4} S (f_i a_i a_j^\dagger f_j + a_i^\dagger f_i f_j a_j) - \frac{3}{4} S (f_i a_i f_j a_j + a_i^\dagger f_i a_j^\dagger f_j) \\ & \left. - \frac{\sqrt{6}}{4} S^{\frac{1}{2}} \left\{ (f_i a_i + a_i^\dagger f_i) n_j - n_i (f_j a_j + a_j^\dagger f_j) \right\} \right]; \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$n_i = a_i^\dagger a_i, \quad f_i = \left[1 - \frac{n_i}{2S} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.20)$$

ここで、和は、籠目格子上の最近接サイトの組についてとるものとする。但し、 $i \rightarrow j$ における矢印は、A 副格子から B 副格子へ、B 副格子から C 副格子へ、C 副格子から A 副格子へと向き付けられている。このハミルトニアン $\mathcal{H}_{\text{SW}}$ は次のように書くことができる。

$$\mathcal{H}_{\text{SW}} = \mathcal{H}_{\text{LSW}} + \mathcal{H}_{\text{NLSW}}. \quad (2.21)$$

ただし、 $\mathcal{H}_{\text{NLSW}}$ 高次の量子補正項である。実際の計算によって、つぎのことが確かめられる。

$$[\mathcal{H}_{\text{SW}}, \mathcal{L}(\mathbf{x})] = [\mathcal{H}_{\text{NLSW}}, \mathcal{L}(\mathbf{x})] \neq 0. \quad (2.22)$$

すなわち、 $\mathcal{H}_{\text{SW}}$ は $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ と非可換である。つまり、 $\mathcal{H}_{\text{SW}}$ には、高次の量子補正のために、 $\mathcal{H}_{\text{LSW}}$ に現れていた半局所的な対称性がもはや存在しないことがわかる。もち

ろん、このことは $\mathcal{H}_{\text{SW}}$ と可換な半局所的エルミート演算子が存在しないことを主張するものではない。したがって、高次の量子補正項まで考慮した場合、フラットモードがリフトアップするかどうかについては、なんら情報が得られたわけではない。そこで、次の節においては、この点を定量的に考察する。

3 逆スピン波展開

この節では、高次の量子効果まで考慮に入れた場合、線形スピン波理論におけるフラットモードに対応するマグノンのエネルギーがどれだけになるのかを、スピン波の逆展開の方法を用いて定量的に考察する。

一般に、スピン波理論において、高次の量子補正項の効果を系統的に評価するには、 $1/S$ を結合定数とする摂動展開を行えばよいのではないかと考えられる。つまり、マグノンで書かれたスピン波のハミルトニアン $\mathcal{H}_{\text{SW}}$ において、線形スピン波の部分 $\mathcal{H}_{\text{LSW}}$ を非摂動項、非線形の部分 $\mathcal{H}_{\text{NLSW}}$ に含まれる各項を摂動項として摂動計算をするのはどうであろうか。しかしながら、その方法はこの系において破綻している。たとえば、マグノンのエネルギーの摂動展開級数を評価するにしても、非摂動項にフラットモードが存在することに由来して、その級数の各項は発散する。そこで、従来の摂動展開に代わる方法を考えなければならない。このような摂動展開級数の発散を回避して、高次の量子効果を定量的に評価する方法として導入したのが、スピン波の逆展開の方法である。

具体的な計算を行う前に、スピン波の逆展開の方法のアウトラインを説明する。ここで、もう一度、 $q=0$ 構造からのスピン波展開を例として考察する。

- $\varepsilon_3(\mathbf{k})$: 線形スピン波におけるフラットモードの分散関係。(恒等的に 0。)
- $\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k})$: フラットモードに対応する真の分散関係。

と書くことにする。また、線形スピン波における二つのギャップレスリニアモードを $\varepsilon_1(\mathbf{k}), \varepsilon_2(\mathbf{k})$ と書く。(つまり、 $\varepsilon_1(\mathbf{k}) = \varepsilon_2(\mathbf{k}) = \omega_{\text{G}}(\mathbf{k})$ 。) この定義を用いると、フラットモードに対応するマグノンのエネルギーの、従来の摂動展開級数は、

$$\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}) = \varepsilon_3(\mathbf{k}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S}\right)^n [\varepsilon_3(\mathbf{k}) \text{ に依存する係数}]_n. \quad (3.1)$$

と表せる。(但し、右辺の $\varepsilon_1(\mathbf{k}), \varepsilon_2(\mathbf{k})$ 依存性をあらわには書いていない。) しかしながら、この級数の各項の係数が発散するのである。そこで、次のような展開級数を考える。

$$\varepsilon_3(\mathbf{k}) = \bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S}\right)^n [\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}) \text{ に依存する係数}]_n. \quad (3.2)$$

すなわち、 $\varepsilon_3(\mathbf{k})$ を、未知の $\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k})$ で展開しているものであり、これは従来の摂動展開の逆展開である。(ここでも、右辺の $\varepsilon_1(\mathbf{k}), \varepsilon_2(\mathbf{k})$ 依存性をあらわには書いていない。)

もしもこの展開式が構成できたとしたら、その左辺 $\epsilon_3(\mathbf{k})$ がフラットモードであることから、

$$\bar{\epsilon}_3(\mathbf{k}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S}\right)^n [\bar{\epsilon}_3(\mathbf{k}) \text{に依存する係数}]_n \equiv 0 \quad (3.3)$$

を得る。これがまさに、 $\bar{\epsilon}_3(\mathbf{k})$ の決定方程式となる。以上が、スピン波の逆展開の考え方のアウトラインである。実際に、上記の逆展開の式をどのようにして作るかは、以下で詳しく説明する。引き続き、 $q=0$ 構造のまわりでの展開に関して計算を行っていくが、他の構造からの展開についても同様に計算できる。

スピン系のハミルトニアンを古典的な基底状態のまわりでスピン波展開をして、マグノンのハミルトニアンに書き直すことから計算をはじめめる。前節での計算と同様にホルスタイン-ブリマコフ変換を用いてスピン波のハミルトニアン $\mathcal{H}_{\text{SW}}$ を構成し、これを $(1/S)^{\frac{1}{2}}$ のべきに関して展開する。(計算の詳細は Appendix A を参照。)

$$\mathcal{H}_{\text{SW}} = -S^2 N + S \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{S}}\right)^m \mathcal{H}^{(m+2)}. \quad (3.4)$$

ここで、 $\mathcal{H}^{(p)}$ はマグノンの生成、消滅演算子の p 次の多項式からなる部分である。

次に、 $\mathcal{H}_{\text{SW}}$ 中の調和項 $\mathcal{H}^{(2)}$ をノーマルモード展開することを考える。しかし、このままノーマルモード展開すれば、線形スピン波理論の計算をすることになり、フラットモードが現れる。そこで、計算のはじめの段階でフラットモードを出さないために、真の調和項 $\mathcal{H}^{(2)}$ に、無限小の調和項 $\gamma \mathcal{H}_{\text{add}}^{(2)}$ を加え、

$$\mathcal{H}^{(2)}(\gamma) = \mathcal{H}^{(2)} + \gamma \mathcal{H}_{\text{add}}^{(2)} \quad (3.5)$$

を、ノーマルモード展開する。ここで、 γ は十分に小さい正の値である。この無限小の付加項としては、つぎの二つの条件をみたすものであれば、どのようなものを採用しても十分である。

- 条件 1: γ が十分に小さい限り、スピン波展開の出発点である古典的な基底状態を変えない。
- 条件 2: γ が 0 でない限り、すべてのノーマルモードの分散関係がギャップレスリニアモードとなる。(フラットモードが現れない。)

このような、無限小の付加項をつけて、計算のはじめの段階でフラットモードを出さない手続きを以下では、“正則化”と呼ぶことにする。ここでは、次のような $\gamma \mathcal{H}_{\text{add}}^{(2)}$ を用いて、正則化を行うことにする。

$$\mathcal{H}_{\text{add}}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_\alpha} \sigma(\mathbf{k}) \left(a_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) a_\alpha(\mathbf{k}) + a_\alpha(-\mathbf{k}) a_\alpha^\dagger(-\mathbf{k}) \right); \quad (3.6)$$

$$\sigma(\mathbf{k}) = \frac{2}{3} \sum_{i=1,2,3} \sin^2 k_i. \quad (3.7)$$

ここで、 $a_\alpha(\mathbf{k})$ は、副格子 α 上の波数 $\mathbf{k}$ をもったマグノンの消滅演算子である。この無限小の付加項は、次近接格子点上で、しかも同じ副格子に属するスピン間の、強磁性ハイゼンベルグ相互作用から得られる。この相互作用のスピン波展開における調和項が、この $\gamma \mathcal{H}_{\text{add}}^{(2)}$ である。無限小の相互作用がない場合でも、同じ副格子上的スピンは平行であるから、付加した相互作用によって、古典的な基底状態が変更を受けることはない。従って、条件 1 をみたしている。また、 $\mathcal{H}^{(2)}(\gamma)$ をノーマルモード展開すると、次のようになる。(計算の詳細は Appendix B を参照。)

$$\mathcal{H}^{(2)}(\gamma) = -N + \sum_{\mathbf{k}_\mu} \varepsilon_\mu(\mathbf{k}; \gamma) \left(\alpha_\mu^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_\mu(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right); \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_\mu(\mathbf{k}; \gamma) = \sqrt{D_\mu^{(+)}(\mathbf{k}; \gamma) D_\mu^{(-)}(\mathbf{k}; \gamma)}, \quad (3.9)$$

$$D_\mu^{(\pm)}(\mathbf{k}; \gamma) = 2 + \frac{1}{2} \lambda_\mu + \gamma \sigma \pm \frac{-3}{2} \lambda_\mu, \quad (3.10)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \left(9 - 4 \sum_i \sin^2 k_i \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad \lambda_3 = -1 \quad (3.11)$$

このとき確かに、分散関係の三つのブランチはすべて、ギャップレスリニアモードとなっている。つまり、条件 2 をみたしている。尚、これらの分散関係において、 $\gamma \rightarrow 0$ の極限をとると、従来の線形スピン波の結果を再現する。

$$\varepsilon_{1,2} \rightarrow \sqrt{2 \sum_i \sin^2 k_i} \quad \varepsilon_3 \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

一般に、上記の二つの条件をみたす $\gamma \mathcal{H}_{\text{add}}^{(2)}$ はこの他にも作ることにはできるが、どのような正則化をするにせよ、以下の考察はなんら変更を受けない。

次に、パラメーター γ を有限に保ったままで、 $\tilde{\varepsilon}_3$ を $1/S$ について展開することを考える。つまり、 $\gamma \mathcal{H}_{\text{add}}^{(2)}$ ($m \leq n$) を非摂動項、 $\{\mathcal{H}^{(p)}\}$ ($p \geq 3$) を摂動相互作用項として、結合定数 $1/S$ に関して展開する。この展開級数を次のように書くことにする。

$$\tilde{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma) = \varepsilon_3(\mathbf{k}; \gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S} \right)^n F_n(\mathbf{k}; \gamma). \quad (3.13)$$

ここで、 $\{F_n\}$ を評価する処方せんを示す。一般に、粒子 μ の (真の) エネルギー $\tilde{\varepsilon}_\mu$ は、グリーン関数 $G_{\mu\mu}(\mathbf{k}, \omega)$ の、複素 $-\omega$ 平面の極として与えられる。従って、 $\tilde{\varepsilon}_3$ の摂動展開級数を得るには、 $G_{33}(\mathbf{k}, \omega)$ の極の $1/S$ に関する展開を行えばよい。この計算を実行するために、マグノンのグリーン関数と自己エネルギーを導入する必要がある。まず、グリーン関数 $G_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega)$ は、次式で与えられる実時間上のグリーン関数 $G_{\mu\nu}(\mathbf{k}, t)$ の、時間に関するフーリエ変換によって定義される。

$$G_{\mu\nu}(\mathbf{k}, t) = -i \langle T \left(\alpha_\mu(\mathbf{k}, t) \alpha_\nu^\dagger(\mathbf{k}, 0) \right) \rangle. \quad (3.14)$$

次に、ダイソン方程式を用いて、自己エネルギー $\Sigma_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega)$ を次式で定義する。

$$G_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) = G_{\mu\nu}^0(\mathbf{k}, \omega) + \sum_{\rho\sigma} G_{\mu\rho}^0(\mathbf{k}, \omega) \Sigma_{\rho\sigma}(\mathbf{k}, \omega) G_{\sigma\nu}(\mathbf{k}, \omega), \quad (3.15)$$

但し、

$$G_{\mu\nu}^0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{\omega - \varepsilon_{\mu}(\mathbf{k}; \gamma) + i\eta} \quad \text{for } \eta \rightarrow +0. \quad (3.16)$$

(以上の定義から明らかであるように、グリーン関数や自己エネルギーは γ に依存している。式が煩雑になるので、その依存性をあらわには書かないことにする。) この自己エネルギーを $1/S$ に関して摂動展開することによって、 n 次の自己エネルギーを次のように定義することができる。

$$\Sigma_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S}\right)^n \Sigma_{\mu\nu}^{(n)}(\mathbf{k}, \omega) \quad (3.17)$$

この摂動展開は、パラメーター γ が 0 でないときに可能となる。 $\gamma=0$ のときはフラットモードが現れることに起因して、一般に任意の次数の自己エネルギーは発散する。従来のスピン波の摂動展開が破綻する原因がここにある。すなわち、正則化の手続きによってフラットモードが現れなくしてはじめて、発散を含まない自己エネルギーの摂動展開級数が得られるのである。以上の議論から、 $\gamma > 0$ において $\{F_n\}$ を求める処方せんは次の通りである。ダイソン方程式を用いて、グリーン関数の極を $1/S$ について展開する。このとき、極の n 次の展開係数として F_n が得られる。 F_n は n 次以下の自己エネルギー $\{\Sigma_{\mu\nu}^{(m)}\}$ と、非摂動項のマグノンのエネルギー $\{\varepsilon_{\mu}\}$ とを用いて表現される。また、 n 次の自己エネルギーは、 $\gamma > 0$ である限り、摂動展開によって求められる。つまり、 $\gamma \mathcal{H}_{\text{odd}}^{(2)}$ を非摂動項、 $\{\mathcal{H}^{(p)}\}$ ($p \geq 3$) を摂動相互作用項とみなし、結合定数 $1/S$ に関して n 次のダイアグラムからの寄与を評価すればよい。ここで、 $\{F_n\}$ が ε_3 に依存していることをあらわに示すために $\bar{\varepsilon}_3$ の展開式を次のように書くことにする。

$$\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma) = \varepsilon_3(\mathbf{k}; \gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S}\right)^n F_n[\varepsilon_3(\mathbf{k}; \gamma)]. \quad (3.18)$$

(もちろん、 $\{F_n\}$ は $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ にも依存しているが、そのことをあらわには示さない。) これはまさに、 $\bar{\varepsilon}_3$ を ε_3 を用いて表現した式であることと見ることができる。

今度は、パラメーター γ を有限に保ったまま、 ε_3 を $1/S$ について展開することを考える。この展開級数は、上式において、 ε_3 を $\bar{\varepsilon}_3$ を用いて逆に解くことにより求められる。その展開式を次のように書くことにする。

$$\varepsilon_3(\mathbf{k}; \gamma) = \bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S}\right)^n E_n[\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma)]. \quad (3.19)$$

(ここで, $\{E_n\}$ も $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ に依存している。) 上述の処方せんで $\{F_n\}$ が分かっているとき, $\{E_n\}$ はいかなる不定性もなく求められる。

以上の方法で, スピン波の逆展開 ($\bar{\varepsilon}_3$ を用いて ε_3 を展開すること) は原理的に, 任意の次数まで行うことができる。しかしながら, ここで最も簡単な近似を考える。つまり, $1/S$ の二次以上を無視する。

$$\varepsilon_3(\mathbf{k}; \gamma) \simeq \bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma) - \frac{1}{S} E_1 [\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma)]. \quad (3.20)$$

この近似式の両辺において, $\gamma \rightarrow 0$ の極限をとる。このとき, 左辺 ε_3 は, フラットモードに移行する。つまり, $\varepsilon_3 \rightarrow 0$ である。一方, この極限で $\bar{\varepsilon}_3$ が $S^{-\phi}$ ($0 < \phi < 1$) の大きさをもつモードに移行すると考える。従って, 上記の式は, 次のような $\bar{\varepsilon}_3$ を $\gamma = 0$ において決定する方程式となる。(但し, $\simeq$ を $=$ に置き換えて。)

$$\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; 0) = \frac{1}{S} E_1 [\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; 0)]. \quad (3.21)$$

この式を解析するには, E_1 がわからなければならない。上述の方法を用いると次のような関係式を得る。

$$E_1 [\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma)] = F_1 [\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma)]. \quad (3.22)$$

また,

$$F_1 = \Sigma_{33}^{(1)}(\mathbf{k}, \varepsilon_3(\mathbf{k}; \gamma)). \quad (3.23)$$

よって, $\Sigma_{33}^{(1)}$ を求めなければならない。

ダイソン方程式によれば $\Sigma_{\mu\mu}^{(1)}$ は, グリーン関数 $G_{\mu\mu}$ の $1/S$ 次の項から外線を外すことによって得られる。そして, この $1/S$ 次の項を評価するには, 二つの寄与を考慮しなければならない。つまり, スピン波ハミルトニアン $\mathcal{H}_{\text{SW}}$ において, 三次の摂動相互作用 (頂点は $1/\sqrt{S}$) の二次摂動の寄与と四次の摂動相互作用 (頂点は $1/S$) の一次摂動の寄与とを計算することになる。まず, パラメーター γ を有限にしたまま, 摂動相互作用項 $\mathcal{H}^{(3)}, \mathcal{H}^{(4)}$ を, 非摂動項 $\mathcal{H}^{(2)}(\gamma)$ のノーマルモードマグノンを用いて書き直す。その結果を示すと,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(3)} = & \sqrt{\frac{3}{N}} \sum_{\{\mathbf{k}_i, \nu_i\}} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \\ & \left(\frac{1}{3} A_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \nu_1, \nu_2, \nu_3) \alpha_{\nu_1}^\dagger(-\mathbf{k}_1) \alpha_{\nu_2}^\dagger(-\mathbf{k}_2) \alpha_{\nu_3}^\dagger(-\mathbf{k}_3) + \text{h.c.} \right. \\ & \left. + A_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3; \nu_1, \nu_2, \nu_3) \alpha_{\nu_1}^\dagger(-\mathbf{k}_1) \alpha_{\nu_2}^\dagger(-\mathbf{k}_2) \alpha_{\nu_3}(\mathbf{k}_3) + \text{h.c.} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

及び,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(4)} = & \text{const.} + \sum_{\mathbf{k}, \nu_1, \nu_2} \left(B_1(\mathbf{k}, \nu_1, \nu_2) \alpha_{\nu_1}^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_{\nu_2}(\mathbf{k}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} B_2(\mathbf{k}, \nu_1, \nu_2) \alpha_{\nu_1}^\dagger(-\mathbf{k}) \alpha_{\nu_2}^\dagger(\mathbf{k}) + \text{h.c.} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{N} \sum_{\{k_i, \nu_i\}} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\
 & \quad (C_1(k_1, k_2, k_3, k_4; \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \\
 & \quad \times \alpha_{\nu_1}^\dagger(-k_1) \alpha_{\nu_2}^\dagger(-k_2) \alpha_{\nu_3}(k_3) \alpha_{\nu_4}(k_4) \\
 & + 2/3 C_2(k_1, k_2, k_3, k_4; \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \\
 & \quad \times \alpha_{\nu_1}^\dagger(-k_1) \alpha_{\nu_2}^\dagger(-k_2) \alpha_{\nu_3}^\dagger(-k_3) \alpha_{\nu_4}(k_4) + \text{h.c.} \\
 & + 1/6 C_3(k_1, k_2, k_3, k_4; \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \\
 & \quad \times \alpha_{\nu_1}^\dagger(-k_1) \alpha_{\nu_2}^\dagger(-k_2) \alpha_{\nu_3}^\dagger(-k_3) \alpha_{\nu_4}^\dagger(-k_4) + \text{h.c.}) . \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

ここで、頂点上の関数 A_1, A_2, B_1 の詳細は Appendix C に示す。(因みに、 γ を 0 とすれば、頂点の中に発散するものが現れる。) これらを用いて、グリーン関数 $G_{\mu\mu}(k, t)$ の $1/S$ 次における二種類の寄与を実際に評価できる。三次の摂動相互作用の二次摂動の寄与は、

$$\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \langle T \mathcal{H}^{(3)}(t_1) \mathcal{H}^{(3)}(t_2) \alpha_\mu(k, t) \alpha_\mu^\dagger(k, 0) \rangle_c \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
 & = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{3}{N} \sum_{p, \rho\sigma} \\
 & \quad G_{\mu\mu}^0(k, \omega) G_{\rho\rho}^0(p, p_0) G_{\sigma\sigma}^0(-p - k, -p_0 - \omega) G_{\mu\mu}^0(k, \omega) \\
 & \quad \times 2|A_1(k, p, -p - k; \mu, \rho, \nu)|^2 \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + G_{\mu\mu}^0(k, \omega) G_{\rho\rho}^0(p, p_0) G_{\sigma\sigma}^0(-p + k, -p_0 + \omega) G_{\mu\mu}^0(k, \omega) \\
 & \quad \times 2|A_2(p, k - p, -k; \rho, \nu, \mu)|^2. \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

四次の摂動相互作用の一次摂動の寄与は、

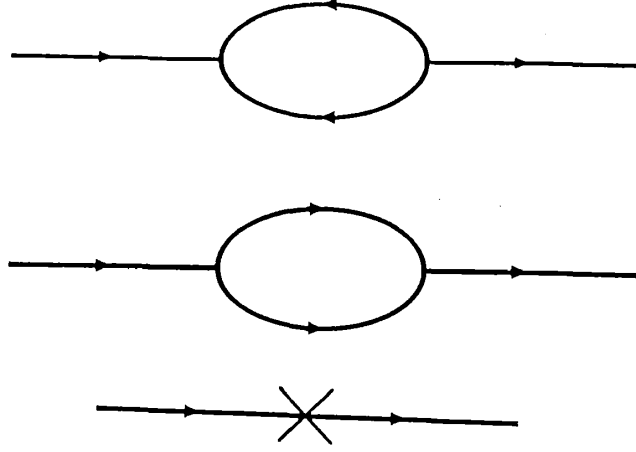
$$- \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \langle T \mathcal{H}^{(4)}(t_1) \alpha_\mu(k, t) \alpha_\mu^\dagger(k, 0) \rangle_c \quad (3.29)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} G_{\mu\mu}^0(k, \omega) B_1(k; \mu, \mu) G_{\mu\mu}^0(k, \omega). \quad (3.30)$$

ここで、波数 p に関する和は、原点を除く第一ブリルアンゾーンにわたる。また、 $\langle \dots \rangle_c$ は、連結したダイアグラムからの寄与についての真空期待値を表している。上の式に示したのは、0 でない寄与を与える項だけであり、それぞれ図 6 のダイアグラムに対応している。これらの式において、時間 t に関するフーリエ変換をした後、外線を外す(つまり、それぞれの項において、二個の $G_{\mu\mu}^0(k, \omega)$ を消す)。こうして得られた項の和が、一次の自己エネルギー $\Sigma_{\mu\mu}^{(1)}$ である。

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\mu\mu}^{(1)}(k, \omega) & = B_1(k; \mu, \mu) \\
 & + \frac{3}{N} \sum_{p, \rho\sigma} \left(\frac{2|A_2(p, k + p, k; \rho, \sigma, \mu)|^2}{\omega - \varepsilon_\rho(p; \gamma) - \varepsilon_\sigma(p + k; \gamma)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2|A_1(p, k + p, k; \rho, \sigma, \mu)|^2}{\omega + \varepsilon_\rho(p; \gamma) + \varepsilon_\sigma(p + k; \gamma)} \right) \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

図 6 : ダイアグラムは上から順に (3.27) (3.28) (3.30) に対応



ここで、頂点上の関数 A_1, A_2, B_1 が $\exp 2\theta_\mu$ を通じて ε_μ に依存していることに注意する。(詳細は Appendices B, C を参照。)

$$\exp 2\theta_\mu(\mathbf{k}; \gamma) = \frac{\varepsilon_\mu(\mathbf{k}; \gamma)}{D_\mu^{(+)}(\mathbf{k}; \gamma)}. \quad (3.32)$$

この関係を用いて、頂点上の関数に現れる $\exp 2\theta_\mu$ を $\varepsilon_\mu/D_\mu^{(+)}$ で置き換えることにより、これらの関数の ε_μ 依存性をあらわに見ることができる。また、 $D_\mu^{(+)}$ が ($\gamma \rightarrow 0$ としても) $O(S^0)$ の大きさをもつことは、以下の計算で重要である。

一次の自己エネルギー $\Sigma_{33}^{(1)}$ が得られたので、 E_1 をあらわに書き下すことができる。

$$E_1[\tilde{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma)] = E_1^{(3)}[\tilde{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma)] + E_1^{(4)}[\tilde{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma)], \quad (3.33)$$

ここで、

$$E_1^{(3)}[\tilde{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma)] = \frac{3}{N} \sum_{\mathbf{p}, \rho, \sigma} \left(\frac{2|A_2(\mathbf{p}, \mathbf{k} + \mathbf{p}, \mathbf{k}; \rho, \sigma, \mu)|^2}{\tilde{\varepsilon}_3(\mathbf{k}) - \tilde{\varepsilon}_\rho(\mathbf{p}) - \tilde{\varepsilon}_\sigma(\mathbf{p} + \mathbf{k})} - \frac{2|A_1(\mathbf{p}, \mathbf{k} + \mathbf{p}, \mathbf{k}; \rho, \sigma, \mu)|^2}{\tilde{\varepsilon}_3(\mathbf{k}) + \tilde{\varepsilon}_\rho(\mathbf{p}) + \tilde{\varepsilon}_\sigma(\mathbf{p} + \mathbf{k})} \right), \quad (3.34)$$

$$E_1^{(4)}[\tilde{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma)] = B_1(\mathbf{k}; 3, 3). \quad (3.35)$$

両式の右辺において、 A_1, A_2, B_1 に現れる ε_3 はすべて、 $\tilde{\varepsilon}_3$ で置き換えられているものとする。これらの式を、 $\gamma \rightarrow 0$ で $\tilde{\varepsilon}_3$ を決定する方程式に代入すると、

$$(\tilde{\varepsilon}_3(\mathbf{k}))^2 = \frac{1}{S} \tilde{\varepsilon}_3 E_1[\tilde{\varepsilon}_3(\mathbf{k})] \quad (3.36)$$

$$= \frac{1}{S} (I_0(\mathbf{k}) + I_1 + \text{higher-order terms}). \quad (3.37)$$

ここで, $\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma \rightarrow 0)$ を $\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k})$ と表し, その大きさは $S^{-\phi}$ ($0 < \phi < 1$) としている。また, I_0 と $I_1(\mathbf{k})$ は, それぞれ $\tilde{\epsilon}_3 E_1^{(3)}[\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k})]$ と $\tilde{\epsilon}_3 E_1^{(4)}[\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k})]$ の最大の寄与をする項であり, 以下に定義する通りである。

$$\begin{aligned}
 \tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k}) E_1^{(3)}[\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k})] = & \\
 & -\frac{3}{N} \sum_{\mathbf{p}} \frac{27}{32} \frac{1}{\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \omega(\mathbf{p})} \\
 & \quad \times \left(X_1^2(\mathbf{k}, \mathbf{p}) e^{2\theta_1(\mathbf{p})} + X_2^2(\mathbf{k}, \mathbf{p}) e^{2\theta_2(\mathbf{p})} \right) \\
 & -\frac{3}{N} \sum_{\mathbf{p}} \frac{27}{32} \frac{1}{\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p}) \omega(\mathbf{p} + \mathbf{k})} \\
 & \quad \times \left(Y_1^2(\mathbf{k}, \mathbf{p}) e^{2\theta_1(\mathbf{p} + \mathbf{k})} + Y_2^2(\mathbf{k}, \mathbf{p}) e^{2\theta_2(\mathbf{p} + \mathbf{k})} \right) \\
 & + \frac{3}{N} \sum_{\mathbf{p}} \frac{9}{32} \frac{\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p}) + \tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p} + \mathbf{k})}{(\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k}))^2 - (\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k}) + \tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p} + \mathbf{k}))^2} \\
 & \quad \times \left(X_3(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \frac{\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p})}{\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p} + \mathbf{k})} + Y_3(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \frac{\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p} + \mathbf{k})}{\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p})} \right)^2 \\
 & + \frac{3}{N} \sum_{\mathbf{p}} \frac{9}{32} \frac{\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p}) + \tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p} + \mathbf{k})}{(\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k}))^2 - (\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k}) + \tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p} + \mathbf{k}))^2} \\
 & \quad \times Z_3^2(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \frac{(\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k}))^2}{\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p}) \tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p} + \mathbf{k})} \\
 & + \frac{3}{N} \sum_{\mathbf{p}} \frac{9}{32} \frac{-2\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k})}{(\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k}))^2 - (\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k}) + \tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p} + \mathbf{k}))^2} \\
 & \quad \times Z_3(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \left(X_3(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \frac{\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k})}{\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p})} + Y_3(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \frac{\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k})}{\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p} + \mathbf{k})} \right) \\
 & + \text{higher-order terms} \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

$$\equiv I_0(\mathbf{k}) + \text{higher-order terms}, \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k}) E_1^{(4)}[\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k})] = & \\
 & \frac{3}{N} \sum_{\mathbf{p}} \frac{9}{8} \frac{1}{\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{p})} + \text{higher-order terms} \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

$$\equiv I_1 + \text{higher-order terms}. \tag{3.41}$$

ここで, 係数 X_i, Y_i, Z_i は Appendix D に示す。また, これらの式の中で, $\epsilon_1(\mathbf{k}; \gamma \rightarrow 0)$ ($= \epsilon_2(\mathbf{k}; \gamma \rightarrow 0)$) を $\omega(\mathbf{k})$ で表している。以上の計算によって, $\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k})$ の最大主要項を決定するあらわな関係式が得られた。

まず, $\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k})$ が $S^{-\frac{1}{3}}$ のおおきさをもつことを示す。前述の通り $\tilde{\epsilon}_3(\mathbf{k})$ が $S^{-\phi}$ ($0 < \phi < 1$) の大きさをもつとすると, (3.36) 式の両辺の大きさは次のように評価さ

れる。

$$\text{l.h.s.} = (\bar{\varepsilon}_3)^2 \sim O(S^{-2\phi}), \quad (3.42)$$

$$\text{r.h.s.} = \frac{1}{S} \bar{\varepsilon}_3 E_1[\bar{\varepsilon}_3] \sim \frac{1}{S} \sum_p \frac{1}{\bar{\varepsilon}_3} \sim O(S^{\phi-1}) \quad (3.43)$$

次元解析によって、次の結果が得られる。

$$\phi = \frac{1}{3}. \quad (3.44)$$

つまり、フラットモードは高次の量子効果により $(1/S)^{\frac{1}{3}}$ の大きさのモードにリフトアップすることがわかる。

つぎに、 $\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k})$ がギャップレスモードになることを示す。第一ブリルアンゾーンの原点近傍 $\mathbf{k} \rightarrow 0$ における $I_0(\mathbf{k})$ のふるまいを調べると、

$$I_0(\mathbf{k}) \rightarrow -\frac{3}{N} \sum_p \frac{9}{8} \frac{1}{\bar{\varepsilon}_3(p)}. \quad (3.45)$$

ここで、 $I_0(0)$ と I_1 の和をとることで、 $\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k})$ がその最大主要項において、

$$(\bar{\varepsilon}_3)^2 \rightarrow 0 \quad \text{for } \mathbf{k} \rightarrow 0 \quad (3.46)$$

であることがわかる。つまり、フラットモードは高次の量子効果により、ギャップレスモードになる。

この節の以下の部分では、式 (3.20) の右辺において、 $1/S$ の二次以上の項を無視したことの妥当性について考察する。すなわち、この近似をしないとすれば、 ϕ の評価がかわってくるかを考えたい。実際に、 $1/S$ より小さい項を無視しないなら、 $\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}, 0)$ の決定方程式は次のようになる。

$$\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S}\right)^n E_n[\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}, 0)]. \quad (3.47)$$

一般に、任意の n に対して E_n の $\bar{\varepsilon}_3$ 依存性を評価するのはきわめて困難である。従って、次のような大雑把な評価をする。

まず、 F_n が次のように表現できることに着目する。

$$F_n[\varepsilon_3(\mathbf{k}; \gamma)] = \Sigma_{33}^{(n)}(\mathbf{k}, \varepsilon_3(\mathbf{k}; \gamma)) + \left[\text{a part which depends on } \left\{ \Sigma_{\mu\nu}^{(m)} \right\} (m < n) \right]. \quad (3.48)$$

従って、

$$E_n[\bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma)] = \tilde{\Sigma}_{33}^{(n)}(\mathbf{k}, \bar{\varepsilon}_3(\mathbf{k}; \gamma)) + \left[\text{a part which depends on } \left\{ \tilde{\Sigma}_{\mu\nu}^{(m)} \right\} (m < n) \right]. \quad (3.49)$$

ここで、 $\tilde{\Sigma}_{33}^{(n)}(\mathbf{k}, \tilde{\epsilon}_3)$ は、 $\Sigma_{33}^{(n)}(\mathbf{k}, \epsilon_3)$ の中に現れる（陰及び陽に依存する）すべての ϵ_3 を $\tilde{\epsilon}_3$ に置き換えることによって得られる。そこで今度は $\tilde{\Sigma}_{33}^{(n)}(\mathbf{k}, \tilde{\epsilon}_3)$ を評価することを考える。しかしながら、 $\Sigma_{33}^{(n)}$ は $(1/S)^n$ なる大きさの多くの摂動項からの寄与の和となっているので、任意の n に対してその表式を求めることは、一般には困難である。例えば、 $n=1$ の場合には、 $\mathcal{H}^{(4)}$ の一次の摂動と $\mathcal{H}^{(3)}$ の二次の摂動を評価しなければならなかった。また、 $n=2$ の場合には、 $\mathcal{H}^{(6)}$ の一次の摂動と $\mathcal{H}^{(4)}$ の二次の摂動と $\mathcal{H}^{(3)}$ の四次の摂動の他に、異なった相互作用頂点を含む摂動 $\mathcal{H}^{(3)}\mathcal{H}^{(5)}$ 及び $\mathcal{H}^{(3)}\mathcal{H}^{(3)}\mathcal{H}^{(4)}$ を評価しなければならない。つまり、 n が大きくなるにつれて複雑になってゆく。しかし、任意の n に対して、 $\Sigma_{33}^{(n)}$ は $\mathcal{H}^{(2n+2)}$ の一次の摂動と、 $\{\mathcal{H}^{(m)}\} (m \leq 2n+1)$ に含まれる複数の相互作用頂点からなる摂動との寄与の和となっている。ここで、 $\mathcal{H}^{(2n+2)}$ の一次摂動項において、 ϵ_3 を $\tilde{\epsilon}_3$ で置き換えた後、極限 $\gamma \rightarrow 0$ をとったものを $(\mathcal{H}^{(2n+2)})^1$ と表すことにする。このとき、 $(\mathcal{H}^{(2n+2)})^1$ の $\tilde{\epsilon}_3$ 依存性は次のように求められる。

$$(\mathcal{H}^{(2n+2)})^1 \sim (e^{\theta_3})^{2n+2} \sim \frac{1}{(\tilde{\epsilon}_3)^{n+1}}. \quad (3.50)$$

パラメーター γ が 0 に近づくと、 E_n が $(\mathcal{H}^{(2n+2)})^1$ より大きな項を含まないと仮定すれば、 $\gamma \rightarrow 0$ のときの E_n の $\tilde{\epsilon}_3$ 依存性がわかる。

$$\begin{aligned} E_n &= \Sigma_{33}^{(n)} + \text{the other terms} = (\mathcal{H}^{(2n+2)})^1 + \text{the other terms} \\ &\sim \frac{1}{(\tilde{\epsilon}_3)^{n+1}} + \text{higher-order terms} \end{aligned} \quad (3.51)$$

この仮定は、 $n=1$ のとき成立している。上記の E_n の評価を用いると $\gamma \rightarrow 0$ における次の関係式を得る。

$$(\tilde{\epsilon}_3)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S}\right)^n \tilde{\epsilon}_3 E_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(S\tilde{\epsilon}_3)^n}. \quad (3.52)$$

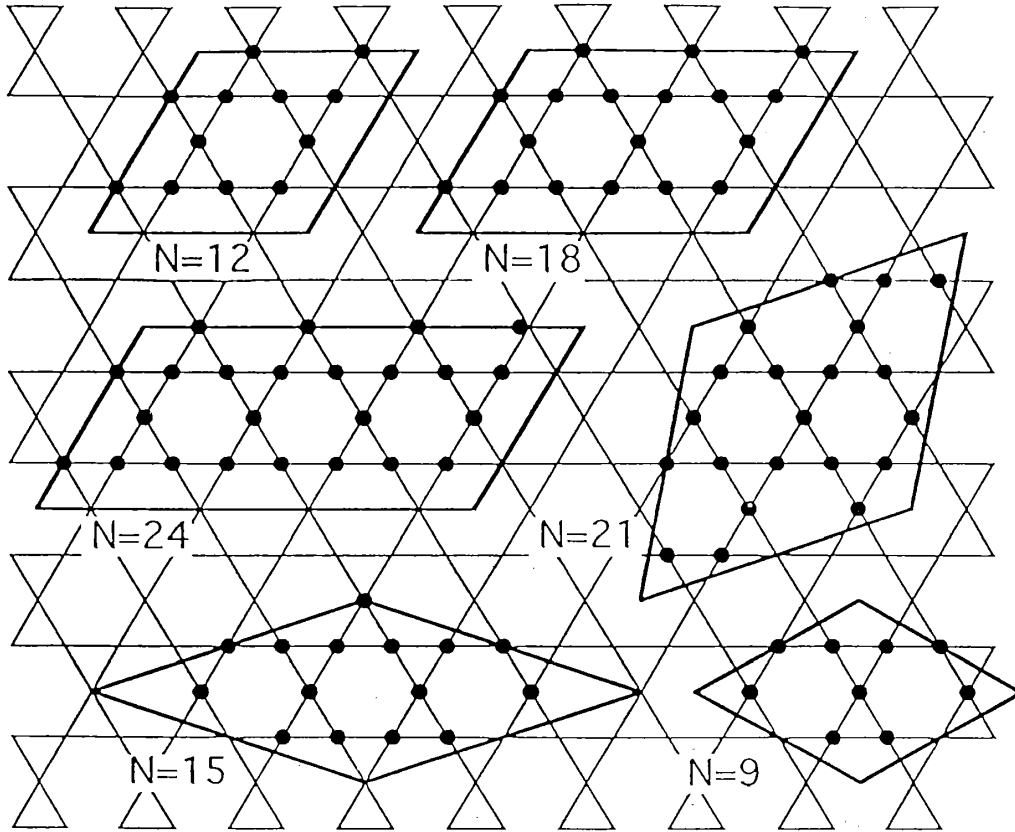
ここで、再び $\tilde{\epsilon}_3 \sim O(S^{-\phi})$ ($0 < \phi < 1$) とすると、最右辺の級数における第 n 項の大きさは、

$$\frac{1}{(S\tilde{\epsilon}_3)^n} \sim O(S^{-n(1-\phi)}). \quad (3.53)$$

この場合、必ず第 n 項は第 $(n+1)$ 項より大きくなる。従って、 ϕ を求める際に第 2 項以上を無視しても、その評価になんら影響はない。つまり、上述の仮定の範囲で $\phi = 1/3$ の評価は正当化される。

この節のスピン波の逆展開を用いた考察によって、次のことが示唆される。線形スピン波展開で現れていたフラットモードは、高次の量子補正によって $S^{-\frac{1}{3}}$ の大きさをもつギャップレスモードにリフトアップする可能性がある。このことは、古典的基底状態の縮退に由来して現れていた線形スピン波ハミルトニアン半局所的対称性

図 7 : 数値対角化に用いたクラスターの形



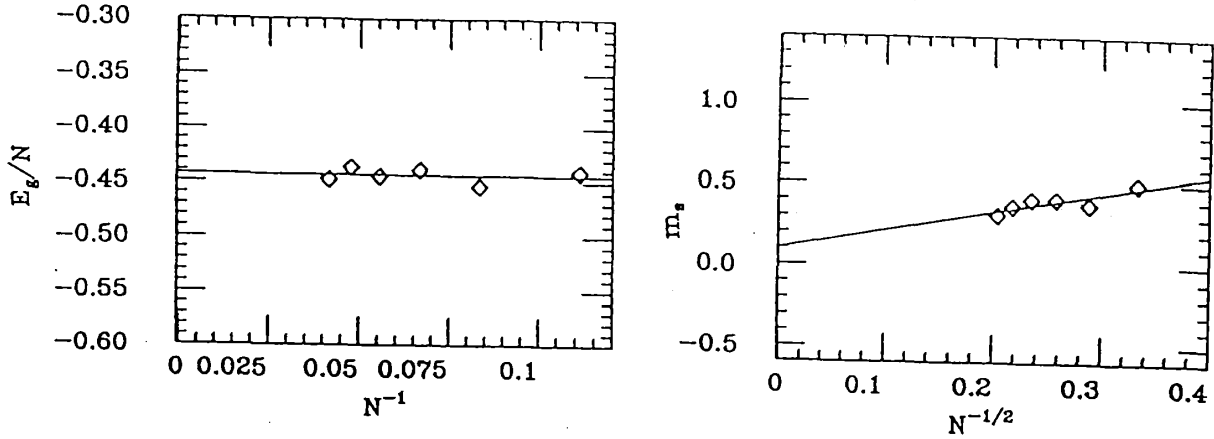
が、高次の量子効果によって破れ、その古典的縮退が解かれる可能性を示唆している。しかしながら、これは系の基底状態に長距離秩序が存在することを、必ずしも意味するものではない。なぜなら、古典的基底状態は複数存在するからであり、ここで考察したのはそのうちの一つである $q = 0$ 構造についてでしかないからである。スピン波の逆展開の方法の枠組みの中で長距離秩序の存在を主張するには、何らかの方法で、古典的基底状態のすべてについて、フラットモードがリフトアップすることを調べる必要がある。そして、その中で最も低い基底エネルギーを構造が、量子系の真の基底状態の候補と考えられる。

4 有限系数値対角化

この節では、 $S = 1/2$ の有限系ハミルトニアンの数値対角化の結果を示す。前節では、スピン波展開により S が十分大きい場合について考察したのに対して、本節ではその対局の場合について議論することになる。

計算した物理量は、サイト当りの基底状態のエネルギーと $q = 0$ 構造のスタガード磁化、用いたクラスターは、周期的境界条件を課した 9,12,15,18,21,24 サイトの計 6 個である。(形状は図 7 を参照。) クラスターの基底状態のエネルギー E_g 及びス

図 8 : 有限系の数値対角化による結果



タガード磁化 m_s の定義は次の通り。

$$\frac{E_g}{N} = \left\langle \frac{H}{N} \right\rangle, \quad m_s = \sqrt{3 \left\langle \left(\frac{M_A^z}{N_A} \right)^2 \right\rangle}. \quad (4.1)$$

ここで H は有限クラスターのハミルトニアン, M_A^z はクラスターの A 副格子の磁化の z -成分を表している。また, N はクラスターの総格子点数, N_A クラスターに含まれる A 副格子の格子点数であり, N は N_A の三倍である。さらに, $\langle \dots \rangle$ は, H の基底状態における期待値を表す。

それぞれのクラスターに対する計算結果を図 8 に示す。これらの, 熱力学的極限への外挿値は次の通りである。

$$E_g/N = -0.443, \quad m_s = 0.102. \quad (4.2)$$

スタガード磁化は, 古典値 $S = 1/2$ に比べて非常に小さいが正の値に外挿される。しかしながら, 図 8 におけるデータ点には, ばらつきが大きく, 計算に用いた系がまだあまり大きくないことを示唆している。この意味において, 上記の m_s の値が信用に足るとは, まだ言い難く, さらに大きなクラスターを用いた計算が必要である。

5 まとめ

まず, 第 2,3,4 節で得られた結果について考察する。

(1) 線形スピン波理論における自由度 $N/3$ のフラットモードの存在は, 線形スピン波のハミルトニアンのもつ $N/3$ 個の半局所的対称性に由来するものであることが分かった。この半局所的対称性は, 対応する古典系の基底状態における連続縮退と密接な関係をもつものであった。

(2) 線形スピン波のハミルトニアンのもつ半局所的対称性は, 高次の量子補正項まで考慮すると, もはや存在しなくなる。しかしながら, このことは真のハミルトニアンに半局所的対称性が存在しないことを意味するものではない。とはいえ, 高次の量子補正項がフラットモードをリフトアップさせる可能性も, 現段階では否定できない。

(3) 高次の量子補正項からの寄与を考慮するために、スピン波の逆展開の方法を導入した。この方法を用いて $q = 0$ 構造におけるフラットモードに対応するマグノンのエネルギーを評価した。その結果、このフラットモードが $S^{-\frac{1}{2}}$ の大きさをもつギャップレスモードにリフトアップする結果を得た。このことは、古典的基底状態の縮退に由来して現れていた線形スピン波ハミルトニアン of 半局所的対称性が、高次の量子効果によって破れ、その古典的縮退が解かれる可能性を示唆している。

(4) しかしながら、前項の内容は、系の基底状態に長距離秩序が存在することを、必ずしも意味するものではない。なぜなら、古典的基底状態は複数存在するからであり、ここで考察したのはそのうちの一つである $q = 0$ 構造についてでしかないからである。スピン波の逆展開の方法の枠組みの中で長距離秩序の存在を主張するには、何らかの方法で、古典的基底状態のすべてについて、フラットモードがリフトアップするかどうかを調べる必要がある。

(5) 有限系の数値対角化によって、基底状態のエネルギーとスタガード磁化を評価した。スタガード磁化は、古典値 $S = 1/2$ に比べて非常に小さいが正の値に外挿される。しかしながら、計算に用いた系がまだあまり大きくないので、データ点には有限サイズの効果が大きく反映している。従って、ここで求めた値が信用に足るとはまだ言い難く、さらに大きなクラスターを用いた計算が必要である。

(6) スピン波の逆展開、有限系の数値対角化という相異なる方法で得た結果は共に、基底状態に長距離秩序が存在する可能性もまだ否定できないことを示唆するものであった。しかしながら、上記の理由から、基底状態に長距離秩序が存在することを主張するには、まだ至っていない。

(7) 三次元以上の格子系における反強磁性ハイゼンベルグモデルの中にも、線形スピン波の分散関係にフラットモードをもつものが知られている。これらの系に対しても、第 2,3 節で述べた方法が使えるであろう。さらに、最近話題になっているフラットバンドをもつ電子系の考察にも、第 2,3 節の方法が有効であると思われる。例えば、籠目格子上的のハバードモデルの場合

$$\mathcal{H} = -t \sum_{\sigma, \langle i, j \rangle} (c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + c_{j\sigma}^\dagger c_{i\sigma}) + U \sum_i \left(n_{i+} - \frac{1}{2} \right) \left(n_{i-} - \frac{1}{2} \right); \quad n_{i\sigma} = c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma} \quad (5.1)$$

(ここで、 $\langle i, j \rangle$ についての和は、籠目格子上的のすべての最近接格子点の組にわたり、 i についての和は、籠目格子上的のすべての格子点にわたるものとする。) においても、逆展開の方法が役に立つことが期待される。

第 1 節にも示した通り、籠目格子上的の反強磁性ハイゼンベルグモデルについては、多くの研究が行なわれているにもかかわらず、未解決の問題が少なくない。これらの問題解決に少しでも寄与するため、私自身、今後とも一層の努力をしたいと考えている。

謝辞

ここにまとめる研究ができたのも、研究室にはいつ以来今日に至るまで、鈴木増雄先生が熱心にご指導してくださり、絶え間ない激励をしてくださるおかげであると、心から感謝しております。

Appendix A

この節では、籠目格子上の反強磁性ハイゼンベルグモデルにおいて、もともとのスピン系のハミルトニアンから、マグノンのハミルトニアンを構成する方法を述べる。この系のハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j. \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $\mathbf{S}_i$ はサイト i 上の、大きさが S のスピンオペレーターである。和は、籠目格子上の最近接サイトの組にわたってとる。

対応する古典系の基底状態は 120° 構造 (すべてのとなりあうスピンのなす角が 120° となる構造) であり、無数に存在している。ここでは、その中でも共平面的な構造に限って考察する。(共平面的 120° 構造も複数存在する。) この構造では、スピンはその向きによって 3 種類に分類される。そのそれぞれに A, B, C と名前を付けることで、格子点を 3 副格子に分けることができる。つまり、同じ副格子に属する (古典) スピンは平行であり、異なる副格子に属するものは 120° の角をなす。このような共平面的 120° 構造からマグノンをもちいて、スピン波展開を行うことになる。

スピン空間の z -軸 (つまり量子化軸) を格子面内にとり、スピン空間の y -軸を格子面と垂直にとる。この y -軸のまわりに (zx -平面内で), A, B, C 副格子上的スピンをそれぞれ z -軸から $0^\circ, +120^\circ, -120^\circ$ ずつ回転する。その結果ハミルトニアンは次のようになる。

$$\mathcal{H} = \sum_{i \rightarrow j} \left[S_i^y S_j^y - \frac{1}{2} (S_i^x S_j^x + S_i^z S_j^z) + \frac{\sqrt{3}}{2} (S_i^x S_j^z - S_i^z S_j^x) \right]. \quad (\text{A.2})$$

ここで、和は籠目格子上の最近接格子点の組にわたるものとする。ただし、 $i \rightarrow j$ における矢印は A 副格子から B 副格子, B 副格子から C 副格子, C 副格子から A 副格子へと向き付けられているとする。ここで、サイト j 上のホルスタイン-ブリマコフ ボゾン (マグノン) a_j を次のように定義する。

$$S_j^+ = \sqrt{2S} f_j a_j, \quad S_j^- = \sqrt{2S} a_j^\dagger f_j, \quad S_j^z = S - a_j^\dagger a_j; \quad (\text{A.3})$$

$$S_j^\pm = S_j^x \pm i S_j^y, \quad f_j = \left[1 - \frac{a_j^\dagger a_j}{2S} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.4})$$

これを用いて、スピンのハミルトニアンはマグノンのハミルトニアンに書き換えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{SW}} = & -S^2 N + \sum_{i \rightarrow j} \left[\frac{S}{2} (n_i + n_j) - \frac{1}{2} n_i n_j \right. \\ & + \frac{1}{4} S (f_i a_i a_j^\dagger f_j + a_i^\dagger f_i f_j a_j) - \frac{3}{4} S (f_i a_i f_j a_j + a_i^\dagger f_i a_j^\dagger f_j) \\ & \left. - \frac{\sqrt{6}}{4} S^{\frac{1}{2}} \{ (f_i a_i + a_i^\dagger f_i) n_j - n_i (f_j a_j + a_j^\dagger f_j) \} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

さらに、このハミルトニアンを $(1/S)^{\frac{1}{2}}$ のべきで展開すると、

$$\mathcal{H}_{\text{SW}} = -S^2 N + S \left[\mathcal{H}^{(2)} + \left(\frac{1}{\sqrt{S}} \right) \mathcal{H}^{(3)} + \left(\frac{1}{\sqrt{S}} \right)^2 \mathcal{H}^{(4)} + \dots \right]. \quad (\text{A.6})$$

但し、 $\mathcal{H}^{(k)}$ はマグノンの生成、消滅演算子の k 次の多項式から成る部分である。例えば、

$$\mathcal{H}^{(2)} = \sum_{i \rightarrow j} \left(\frac{1}{2} (a_i^\dagger a_i + a_j^\dagger a_j) + \frac{1}{4} (a_i^\dagger a_j + a_i a_j^\dagger) - \frac{3}{4} (a_i^\dagger a_j^\dagger + a_i a_j) \right), \quad (\text{A.7})$$

$$\mathcal{H}^{(3)} = \sum_{i \rightarrow j} \frac{\sqrt{6}}{4} (a_i^\dagger a_i a_j^\dagger + a_i^\dagger a_i a_j - a_i^\dagger a_j^\dagger a_j - a_i a_j^\dagger a_j), \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(4)} = & \sum_{i \rightarrow j} \left(-\frac{1}{2} a_i^\dagger a_i a_j^\dagger a_j \right. \\ & - \frac{1}{16} (a_i^\dagger a_i a_i a_j^\dagger + a_i^\dagger a_i^\dagger a_i a_j + a_i^\dagger a_j^\dagger a_j a_j + a_i a_j^\dagger a_j^\dagger a_j) \\ & \left. + \frac{3}{16} (a_i^\dagger a_i a_i a_j + a_i^\dagger a_i^\dagger a_i a_j^\dagger + a_i a_j^\dagger a_j a_j + a_i^\dagger a_j^\dagger a_j^\dagger a_j) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

特に、線形スピン波のハミルトニアン $\mathcal{H}_{\text{LSW}}$ は、次の通り。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{LSW}} = & -S^2 N + S \mathcal{H}^{(2)} = -S^2 N \\ & + S \sum_{\langle i, j \rangle} \left\{ \frac{1}{2} (a_i^\dagger a_i + a_j^\dagger a_j) + \frac{1}{4} (a_i^\dagger a_j + a_i a_j^\dagger) - \frac{3}{4} (a_i a_j + a_i^\dagger a_j^\dagger) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

また、 $\mathcal{H}_{\text{SW}}$ におけるすべての非線形項を $\mathcal{H}_{\text{NLSW}}$ と表すことにする。つまり、

$$\mathcal{H}_{\text{SW}} = \mathcal{H}_{\text{LSW}} + \mathcal{H}_{\text{NLSW}} \quad (\text{A.11})$$

となる。

Appendix B

この節では、正則化した調和項 $\mathcal{H}^{(2)}(\gamma) = \mathcal{H}^{(2)} + \gamma \mathcal{H}_{\text{add}}^{(2)}$ の、ノーマルモード展開の計算を示す。

まず、ハミルトニアン $\mathcal{H}^{(2)}(\gamma)$ のフーリエ空間表示を作る。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(2)}(\gamma) = & -N + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left(\mathcal{A}_1^\dagger(\mathbf{k}) \mathcal{A}_2^\dagger(\mathbf{k}) \right) \\ & \times \begin{pmatrix} (2 + \gamma\sigma(\mathbf{k}))I + \frac{1}{2}\Lambda(\mathbf{k}) & -\frac{3}{2}\Lambda(\mathbf{k}) \\ -\frac{3}{2}\Lambda(\mathbf{k}) & (2 + \gamma\sigma(\mathbf{k}))I + \frac{1}{2}\Lambda(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1(\mathbf{k}) \\ \mathcal{A}_2(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

但し、

$$\mathcal{A}_1(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} a_1(\mathbf{k}) \\ a_2(\mathbf{k}) \\ a_3(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} a_1^\dagger(-\mathbf{k}) \\ a_2^\dagger(-\mathbf{k}) \\ a_3^\dagger(-\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

$$\Lambda(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & \cos k_3 & \cos k_2 \\ \cos k_3 & 0 & \cos k_1 \\ \cos k_2 & \cos k_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

ここで、 $a_\alpha(\mathbf{k})$ ($a_\alpha^\dagger(\mathbf{k})$) は、副格子 α 上の運動量 $\mathbf{k}$ をもった消滅 (生成) 演算子である。つまり、 $a_\alpha(\mathbf{k})$ は、実空間のマグノン演算子 a_j をフーリエ変換して得られる。(但し、サイト j は副格子 α に属するとする。) ノーマルモード展開の第一段階として、マグノンの種類について対角化する。

$$\mathcal{H}^{(2)}(\gamma) = -N + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_\mu} \left(d_\mu^\dagger(\mathbf{k}) d_\mu(-\mathbf{k}) \right) \quad (\text{B.4})$$

$$\times \begin{pmatrix} 2 + \gamma\sigma(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\lambda_\mu(\mathbf{k}) & -\frac{3}{2}\lambda_\mu(\mathbf{k}) \\ -\frac{3}{2}\lambda_\mu(\mathbf{k}) & 2 + \gamma\sigma(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\lambda_\mu(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_\mu(\mathbf{k}) \\ d_\mu^\dagger(-\mathbf{k}) \end{pmatrix}.$$

このとき、つぎのユニタリ変換 $U(\mathbf{k})$ を用いた。

$$d_\mu(\mathbf{k}) = \left(V^{-1}(\mathbf{k}) \right)_{\mu\nu} a_\nu(\mathbf{k}); \quad U(\mathbf{k}) = (u_1(\mathbf{k}), u_2(\mathbf{k}), u_3(\mathbf{k})), \quad (\text{B.5})$$

$$U^\dagger(\mathbf{k}) \Lambda(\mathbf{k}) U(\mathbf{k}) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (\text{B.6})$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{9 - 4 \sum_i \sin^2 k_i} \right), \quad \lambda_3 = -1, \quad (\text{B.7})$$

但し、

$$u_\mu \equiv \begin{pmatrix} u_{1\mu} \\ u_{2\mu} \\ u_{3\mu} \end{pmatrix} = w_\mu^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} y_{1\mu} z_{1\mu} \\ y_{2\mu} z_{2\mu} \\ y_{3\mu} z_{3\mu} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

$$y_{1\mu} = \cos k_2 \cos k_3 + \lambda_\mu \cos k_1, \quad z_{1\mu} = \lambda_\mu^2 - \cos^2 k_1, \dots \quad (\text{B.9})$$

$$w_\mu^{-1} = y_{1\mu} y_{2\mu} y_{3\mu} (z_{1\mu} + z_{2\mu} + z_{3\mu}). \quad (\text{B.10})$$

第二段階として、ボゴリューボフ変換 $W_\mu(\mathbf{k})$ を行うことでノーマルモード展開が完了する。

$$\mathcal{H}^{(2)}(\gamma) = -N + \sum_{\mathbf{k}_\mu} \varepsilon_\mu(\mathbf{k}; \gamma) \left(\alpha_\mu^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_\mu(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right); \quad (\text{B.11})$$

$$\varepsilon_\mu(\mathbf{k}; \gamma) = \sqrt{D_\mu^{(+)}(\mathbf{k}; \gamma) D_\mu^{(-)}(\mathbf{k}; \gamma)}, \quad (\text{B.12})$$

但し,

$$D_\mu^{(\pm)}(\mathbf{k}; \gamma) = 2 + \frac{1}{2} \lambda_\mu + \gamma \sigma \pm \frac{-3}{2} \lambda_\mu \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{pmatrix} a_\mu(\mathbf{k}) \\ a_\mu^\dagger(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = W_\mu^{-1}(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} d_\mu(\mathbf{k}) \\ d_\mu^\dagger(-\mathbf{k}) \end{pmatrix}; \quad W_\mu^{-1}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \cosh \theta_\mu(\mathbf{k}) & \sinh \theta_\mu(\mathbf{k}) \\ \sinh \theta_\mu(\mathbf{k}) & \cosh \theta_\mu(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

$$\exp 2\theta_\mu(\mathbf{k}) = \frac{\varepsilon_\mu(\mathbf{k}; \gamma)}{D_\mu^{(+)}(\mathbf{k}; \gamma)}. \quad (\text{B.15})$$

この節の終わりに、副格子 α 上のマグノン $a_\alpha(\mathbf{k})$ と、ノーマルモードのマグノン $\alpha_\mu(\mathbf{k})$ との関係を示す。

$$a_\alpha(\mathbf{k}) = \sum_\mu u_{\alpha\mu}(\mathbf{k}) (\cosh \theta_\mu(\mathbf{k}) \alpha_\mu(\mathbf{k}) + \sinh \theta_\mu(\mathbf{k}) \alpha_\mu(-\mathbf{k})). \quad (\text{B.16})$$

この関係式は、Appendix C の計算で用いられる。

Appendix C

この節では、第三節に現れた相互作用頂点上の関数 A_1, A_2, B_1 の表式を示す。Appendix A に示した $\mathcal{H}^{(3)}$ 及び $\mathcal{H}^{(4)}$ を、Appendix B で導いたノーマルモードを用いて書き直す。ここでは、結果だけを示す。

$$A_1 = \frac{\sqrt{6}}{8} (\kappa(123) \exp(\theta_{\nu_1}(\mathbf{k}_1)) \sinh(\theta_{\nu_2}(\mathbf{k}_2) + \theta_{\nu_3}(\mathbf{k}_3)) \\ \kappa(231) \exp(\theta_{\nu_2}(\mathbf{k}_2)) \sinh(\theta_{\nu_3}(\mathbf{k}_3) + \theta_{\nu_1}(\mathbf{k}_1)) \\ \kappa(312) \exp(\theta_{\nu_3}(\mathbf{k}_3)) \sinh(\theta_{\nu_1}(\mathbf{k}_1) + \theta_{\nu_2}(\mathbf{k}_2))), \quad (\text{C.1})$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{6}}{8} (\kappa(123) \exp(\theta_{\nu_1}(\mathbf{k}_1)) \cosh(\theta_{\nu_2}(\mathbf{k}_2) + \theta_{\nu_3}(\mathbf{k}_3)) \\ \kappa(231) \exp(\theta_{\nu_2}(\mathbf{k}_2)) \cosh(\theta_{\nu_3}(\mathbf{k}_3) + \theta_{\nu_1}(\mathbf{k}_1)) \\ \kappa(312) \exp(\theta_{\nu_3}(\mathbf{k}_3)) \sinh(\theta_{\nu_1}(\mathbf{k}_1) + \theta_{\nu_2}(\mathbf{k}_2))), \quad (\text{C.2})$$

但し,

$$\kappa(123) = \sum_{\substack{\langle \alpha\beta \rangle = \\ \langle 12 \rangle, \langle 23 \rangle, \langle 31 \rangle}} 2\nu_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1) (u_{\beta\nu_1}(\mathbf{k}_1)u_{\alpha\nu_2}(\mathbf{k}_2)u_{\alpha\nu_3}(\mathbf{k}_3) \\ - u_{\alpha\nu_1}(\mathbf{k}_1)u_{\beta\nu_2}(\mathbf{k}_2)u_{\beta\nu_3}(\mathbf{k}_3)) \quad (\text{C.3})$$

$$\nu_{12} = \cos k_3, \quad \nu_{23} = \cos k_1, \quad \nu_{31} = \cos k_2; \quad (\text{C.4})$$

また,

$$B_1 = 4\delta_{\nu_1\nu_2} \left(\cosh(\theta_{\nu_1}(\mathbf{k}) + \theta_{\nu_2}(\mathbf{k})) \left(-\frac{1}{2}F - \frac{1}{4}f + \frac{3}{4}g + \frac{1}{4} \right) \right. \\ \left. + \sinh(\theta_{\nu_1}(\mathbf{k}) + \theta_{\nu_2}(\mathbf{k})) \left(\frac{3}{8}f - \frac{1}{8}g \right) \right) \\ + 2\lambda_{\nu_1}(\mathbf{k})\delta_{\nu_1\nu_2} \left(\cosh(\theta_{\nu_1}(\mathbf{k}) + \theta_{\nu_2}(\mathbf{k})) \left(-\frac{1}{4}F - \frac{1}{2}f + \frac{3}{8}G + \frac{1}{8} \right) \right. \\ \left. + \sinh(\theta_{\nu_1}(\mathbf{k}) + \theta_{\nu_2}(\mathbf{k})) \left(\frac{3}{4}F - \frac{1}{8}G - \frac{1}{2}g - \frac{3}{8} \right) \right), \quad (\text{C.5})$$

但し,

$$F = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}_\mu} \frac{1}{2} \cosh 2\theta_\mu(\mathbf{k}), \quad f = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}_\mu} \frac{1}{2} \frac{\lambda_\mu(\mathbf{k})}{2} \cosh 2\theta_\mu(\mathbf{k}), \quad (\text{C.6})$$

$$G = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}_\mu} \frac{1}{2} \sinh 2\theta_\mu(\mathbf{k}), \quad g = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}_\mu} \frac{1}{2} \frac{\lambda_\mu(\mathbf{k})}{2} \sinh 2\theta_\mu(\mathbf{k}). \quad (\text{C.7})$$

Appendix D

この節では、第三節に現れた係数 X_i , Y_i , Z_i の表式を示す。第三節に示した手続きに従って計算することで、以下の式を得る。

$$X_i = \sum_{\substack{\langle \alpha\beta \rangle = \\ \langle 12 \rangle, \langle 23 \rangle, \langle 31 \rangle}} 2\nu_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) (u_{\beta i}(\mathbf{p})u_{\alpha 3}(\mathbf{p} + \mathbf{k})u_{\alpha 3}(\mathbf{k}) \\ - u_{\alpha i}(\mathbf{p})u_{\beta 3}(\mathbf{p} + \mathbf{k})u_{\beta 3}(\mathbf{k})), \quad (\text{D.1})$$

$$Y_i = \sum_{\substack{\langle \alpha\beta \rangle = \\ \langle 12 \rangle, \langle 23 \rangle, \langle 31 \rangle}} 2\nu_{\alpha\beta}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) (u_{\beta i}(\mathbf{p} + \mathbf{k})u_{\alpha 3}(\mathbf{p})u_{\alpha 3}(\mathbf{k}) \\ - u_{\alpha i}(\mathbf{p} + \mathbf{k})u_{\beta 3}(\mathbf{p})u_{\beta 3}(\mathbf{k})), \quad (\text{D.2})$$

$$Z_i = \sum_{\substack{\langle \alpha\beta \rangle = \\ \langle 12 \rangle, \langle 23 \rangle, \langle 31 \rangle}} 2\nu_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) (u_{\beta i}(\mathbf{k})u_{\alpha 3}(\mathbf{p})u_{\alpha 3}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \\ - u_{\alpha i}(\mathbf{k})u_{\beta 3}(\mathbf{p})u_{\beta 3}(\mathbf{p} + \mathbf{k})), \quad (\text{D.3})$$

ここで、 $u_{\alpha\beta}$ や $\nu_{\alpha\beta}$ は、Appendices B 及び C に定義した通りである。

References

- [1] H.Asakawa and M.Suzuki, Physica A **198**, 210 (1993)
- [2] H.Asakawa and M.Suzuki, Physica A **205**, 687 (1994)
- [3] V.Elser, Phys. Rev. Lett. **62**, 2405 (1989)
- [4] C.Zeng and V.Elser, Phys. Rev. B **42**, 8436 (1990)
- [5] A.B.Harris, C.Kallin and A.J.Berlinsky, Phys. Rev. B **45**, 2899 (1992)
- [6] R.R.P.Singh and D.A.Huse, Phys. Rev. Lett. **68**, 1766 (1992)
- [7] A.Chubukov, Phys. Rev. Lett. **69**, 832 (1992)
- [8] P.W.Leung and V.Elser Phys. Rev. B **47**, 5459 (1993)
- [9] J.B.Marston and C.Zeng, J. Appl. Phys. **69**, 5962 (1991)
- [10] S.Sachdev, Phys. Rev. B **45**, 12377 (1992)
- [11] T.C.Hsu and A.J.Schofield, J. Phys. Condens. Matter **3**, 8067 (1991)
- [12] Y.R.Wang, Phys. Rev. B **45**, 12608 (1992)
- [13] K.Yang, L.K.Warman and S.M.Girvin, Phys. Rev. Lett. **70**, 2641 (1993)
- [14] P.Chandra and P.Coleman, Phys. Rev. Lett. **66**, 100 (1991)
- [15] P.Chandra, P.Coleman and I.Ritchey, J. Phys. I France **3**, 591 (1993)
- [16] J.T.Chalker and J.F.G.Eastmond, Phys. Rev. B **46**, 14201 (1992)
- [17] J.T.Chalker, P.C.W.Holdsorth and E.F.Shender, Phys. Rev. Lett. **68**, 855 (1992)
- [18] D.A.Huse and A.D.Rutenberg, Phys. Rev. B **45**, 7536 (1992)
- [19] J.Delft and C.L.Henley, Phys. Rev. Lett. **69**, 3236 (1992)
- [20] J.Delft and C.L.Henley, Phys. Rev. B **48**, 965 (1993)
- [21] K.Fukamachi and H.Nishimori, Phys. Rev. B **49**, 651 (1994)
- [22] D.Greywall and P.Busch, Phys. Rev. Lett. **62**, 1868 (1989)