

あ と か き

上智大理工学部 河田 敬義

(1) non-standard methods というのは、その創始者である Abraham Robinson の名を挙げたわけにはいかならない。彼は 1918 年 10 月 6 日 ドイツに生れ、イスラエルの Hebrew Univ. に学ぶ、Univ. of London で学位をとった。次後、イギリスで取手得て、後に Univ. of Toronto (カナダ) 1951-57, Hebrew Univ. (イスラエル) 1957-62, Univ. of California, Los Angeles (USA) 1962-67, Yale Univ. (U.S.A.) 1967-74 の Prof. となった、1974 年 4 月 11 日に亡くなった。K. Gödel は "A. Robinson was the ^{one} mathematical logician who accomplished incomparably more than anybody else in making this science fruitful for mathematics" と言評している。彼の初期の研究はイギリスにおける流体力学とその応用に向けられていた。1949 年の学位論文以来、model theory の研究に転じ、1960 年以降 non-standard analysis の研究に入った。

Robinson の論文 21 は文献 [9] p.4~13 に挙げられている。(著書 9 篇, 論文 135 篇)。Robinson 教授は、かつてもし各地大学で講義した。1963 年の Nagoya Math. J. 22 に著稿している。

竹内外氏の non-standard analysis に因る初期の論文 [10] も、このことである。

(2) Non-standard method が 整數論に適用され、いさしき成果を得たのは、まず J. Ax - S. Kochen [1] の p -進体上の Diophantine problem に因る Artin 予想への解答があげられる (これは ultraproduct の応用という方がよいかも知れない)。Robinson 自身にもある (つかの論文があり、例えば [4])。これらの中でいさしきところのか A. Robinson - P. Roquette [6] である。この代數曲線上の整數点の有限性に関する論文は、大工、反響を呼んだ。1977年 1月~4月 に、日本学術振興会の招きで、P. Roquette 教授が来日。東大での連続講演の他、名大、北大、九大で講演し、京大数理研でのこのシンポジウムに出陣し、さらに 1977年 4月の日本数学会年会で学会講演を行った。これは「数論」に報告されたであろう。

(3) P. Roquette 教授の東大での講義は、次のようなものであった。(5回 毎回 2時間)

Chap I. General remark on enlargement (2回)

Chap II. Irreducibility theorem of Hilbert (2回)

Chap III. Mordel-Weil finiteness theorem. (1回)

I は整數論でなく 一般的事考え方についてであった。

II は論文 [7] に因るものであり、III は今回のシンポジウム

あとの年會講演と会せて、一つのまとまりである。

Non-standard method は、我が国ではまだ全く知られていない。奇藤彦彦氏は、19~~75~~⁷⁵/10~76/2 の東大数学科に於ける講義にもとづいて、[8] を著わした。内容は同じ時期に、ultraproduct のせによつて A. Robinson-P. Roquette [6] の紹介を講義した。それに、今回の Roquette 教授の講演、今回のシンポジウム等を、ぜひとも覚えてほしい。今後次第に広く知られていくような事々として期待したい。

(4) 今回のシンポジウムの中で、才2日午後、一般論討論を行った。そこで、二つのテーマについて話し合われた。

A. "Non-standard method は、どのように

導入されるのか？ わかり易いか？"

non-standard の考え方にはなれない者にとって、まずその一つの model として、ultraproduct から入っていくのか、合りやすいことは確かである。例えば、B で述べるように、整域 $\mathbb{Z}$ の enlargement ${}^*\mathbb{Z}$ は、どのようなものであるか、という問題に対しても、 $\mathbb{Z}$ の ultrapower

$\prod \mathbb{Z} / \sim$ を考えれば、その性質を理解することはできる。また、多くの non-standard 理論も、もっぱら ultraproduct のせを用いて、説明することはできる。(例えば A. Robinson-P. Roquette [6] についても、ultraproduct で

けて理解される)。しかし、Roquette 教授の意見は、non-standard の方法を理解するにあたって、なるべく早く ultra-product と区別して、これは Axiomatic な方法で理解するのかもしれないことである。事実、Roquette 教授自身は、Heidelberg 大学で、A. Robinson 教授との会話によって、Axiomatic な考え方を会得したとのことである。但し、Axiomatic な方法であっても、今日までこの“最も普通な”方法が、樹立されてはいない。

(1) enlargement の公理化に依るもの

一つの universe A を定め、集合 $S \subset A$ に対して

$$S \longrightarrow {}^*S \subset B \quad (B)。$$

を定め、 $S = T \iff {}^*S = {}^*T$,

$$(a) \quad {}^*\phi = \phi, \quad {}^*(S \vee T) = {}^*S \vee {}^*T, \quad {}^*(S \wedge T) = {}^*S \wedge {}^*T,$$

$${}^*(S - T) = {}^*S - {}^*T,$$

$$(b) \quad S = \{x_1, \dots, x_n\} \text{ (finite set)} \implies {}^*S = \{{}^*x_1, \dots, {}^*x_n\}$$

一般に $x \in S \implies {}^*x \in {}^*S$. 故に $S \hookrightarrow {}^*S$ である。

$$(c) \quad S: \text{infinite} \implies S \subsetneq {}^*S \quad ({}^*x: \text{standard ele.})$$

$$(d) \quad {}^* \text{ is relation } \ni \{ \frac{x}{y} \}. \quad \text{e.g. } {}^*(x, y) = ({}^*x, {}^*y),$$

$${}^*(S \times T) = {}^*S \times {}^*T, \quad \text{rel } R \subset S \times T \rightarrow {}^*R \subset {}^*S \times {}^*T$$

$$R: \text{ordering relation} \implies {}^*R: \text{ordering relation}, \quad \text{特 } x < y \implies {}^*x < {}^*y$$

$$f: \text{function} \implies {}^*f: \text{function}, \quad \text{特 } f(x) = y \implies {}^*f({}^*x) = {}^*y$$

R : module, ring, field, ... $\Rightarrow$ *R : module, ring, field, ...

(e) R : concurrent relation である. $D_R = \{x \in S \mid \exists y \in T, (x, y) \in R\}$
 であることは, $R \subset S \times T$ であること, $\forall$ finite $x_1, \dots, x_n \in D_R$
 $\exists y \in T$: $(x_i, y) \in R$ for $i=1, \dots, n$ であること.

(Axiom) For every concurrent relation $R \exists \eta \in {}^*T$ such that
 $({}^*x, \eta) \in {}^*R$ for $\forall x \in D_R$.

(存在定理) $\forall$ universe A であること, $\exists$ universe B であること
 enlargement functor $*$: $A \rightarrow B$ があること (e.g. ultraproduct
 method を用いる).

(定理). If a "statement" about set (and structure) is true
 in A , then it remains true in the enlargements.

但し quantifier $\forall, \exists$ は $\forall x \in S, \exists x \in S, (S \subset A)$ であること

(定義) $S \in A, {}^*S \in B$ であること. *S の $z \in$ internal element であること

ある $T \in A$ であること ${}^*p(T)$ の $z \in$ internal set (in B) であること

である. $S = \{x \in T \mid \alpha(x) \text{ holds where } \alpha \text{ is a formula in the formal language}\} \Rightarrow {}^*S = \{x \in {}^*T \mid {}^*\alpha(x) \text{ holds}\}$ where ${}^*\alpha$ is a formula by the same def. as α .

(ii) Robinson - Zakon [5] は set theoretic charact.
 of enlargements であること

である Brinkman による Lecture Note, etc. がある

(iii) 最近 Princeton Univ. の Edward Nelson [3] は

Non-standard analysis への導入は、 $\mathcal{L}$ の標準モデル $\mathcal{M}$ に対して、 $\mathcal{M}$ の内部 set theory と呼ばれる ZF (Zermelo-Fraenkel set theory) のように、 $\mathcal{L}$ の内部に $\mathcal{M}$ の standard という predicate を加える。この theory の Axiom は、3.2 の ZF の axiom のように、 $\exists$ の $\mathcal{M}$ の axiom を $\mathcal{L}$ に加える。この formula を internal とし、ZF の formula を standard といふ predicate を含みぬものを $\mathcal{L}$ の external formula とする。

Axiom T (transfer principle): $A(x, t_1, \dots, t_k)$ internal formula with free variables $x, t_1, \dots, t_k$ and no other free var.
 (T) $\forall^{st} t_1 \dots \forall^{st} t_k (\forall^{st} x A(x, t_1, \dots, t_k)) \Rightarrow \forall x A(x, t_1, \dots, t_k)$
 即ち $\forall^{st} x$ for $\forall x$ (x standard) となる。

Axiom I (principle of idealization) = (Axiom for concurrent rel.)
 $B(x, y)$ internal formula, x, y free var, y の free var. がある。
 (I) $\forall^{st} x \exists y \forall z \in z B(x, y) \Leftrightarrow \exists x \forall^{st} y B(x, y)$

Axiom S (principle of standardization) $C(z)$ は internal z は external z とし、 z free variable, C は $\mathcal{L}$ の var. を含みぬもの。

(S) $\forall^{st} x \exists^{st} y \forall^{st} z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge C(z))$

この Nelson の $\mathcal{L}$ は、今後 $\mathcal{L}$ として用いられる。この $\mathcal{L}$ は $\mathcal{L}$ の $\mathcal{L}$ である。

$\mu = (\text{monad of } 0) = \text{ideal of } {}^*\mathbb{Z} = \bigcap \text{ standard ideals}$
 $\nexists$ nonstandard prime q : $\mu \nsubseteq {}^*\mathbb{Z}q$.

(13) M : external maximal ideal containing μ . $\Rightarrow M$ is a nonprincipal ultrafilter on the set of primes P of $\mathbb{Z}$.

$${}^*\mathbb{Z}/M = \prod_{p \in P} \mathbb{F}_p / U_M = \text{Ax field (of char 0)}$$

$K = {}^*\mathbb{Z}/M$ has the following structures:

(i) $\text{Gal}(K^a/K) \cong \hat{\mathbb{Z}} = A(\mathbb{Z}) = \prod_{p \in P} \hat{\mathbb{Z}}_p$

(ii) (pseudo alg. closed)

$\forall$ abs. irred $f(x, y) = 0$ over K has infinitely many solutions $x, y \in K$.

Conversely, (i), (ii) characterize K .
 etc.

文 献

- [1] J Ax and S. Kochen. Diophantine problems over local fields I. Amer. J. of Math. 87 (1965), II. ibid., 605-698
 III. Annals of Math., 83 (1966).
- [2] Edward Nelson. Internal set theory: A new approach to non-standard analysis. Lecture Note (1977). An expanded version of an invited address given at Summer Meeting 1976 in Toronto.
- [3] A. Robinson. Non-standard analysis, North-Holland, 1966

- [4] A. Robinson, Non-standard arithmetic, Bull Amer. Math. Soc. 73 (1967), 818 - 843.
- [5] A. Robinson - E. Zakon, A set-theoretical characterization of enlargements. Applications of model theory to algebra, analysis and probability, Holt, Rinehart and Winston, New York (1969), 109 - 122
- [6] A. Robinson - P. Roquette. On the finiteness theorem of Siegel and Mahler concerning Diophantine equations J. of Number Theory, 7 (1975), 121 - 176
- [7] P. Roquette, Non-standard aspects of Hilbert's irreducibility theorem, Springer Lecture Note No 498, (1975), 231 - 275
- [8] 斎藤正彦, 超積と超準解析, 1976
- [9] D. H. Saracino - V. B. Weispfenning (ed.) Model theory and algebra. A memorial tribute to Abraham Robinson Springer Lecture Notes in Math. No. 498 (1975)
- [10] G. Takeuti, Dirac spaces. Proc. Japan Acad. 38 (1962), 414 - 418
- [11] G. Takeuti,