

結合的 H-空間の type について

九大理 菅原民生

§1. H-空間の type

ここで扱う H-空間はすべて 単連結な有限 CW 複体と同じ homotopy 型をもつ 結合的 H-空間とする。

Hopf の定理によって このような H-空間 X は

$$H^*(X, \mathbb{Q}) = \Lambda_{\mathbb{Q}}(x_1, \dots, x_r), \quad \deg x_i = 2m_i - 1$$

となる。このときの r を X の rank, $(2m_1 - 1, \dots, 2m_r - 1)$ を X の type という。

問題は、上のような H-空間の type はすべて compact な Lie 群の type として得られるものだけかということである。

これについて Ewing [2] は Clark の結果 [1] を拡張することによって、かなり進展させた。それを紹介する。

簡単のため、次のように考察を制限する。二つの H-空間 X_1, X_2 の type を A_1, A_2 とするとき、 $X_1 \times X_2$ の type は $A_1 \cup A_2$ となる。type A が $A_1 \cup A_2$ と分解されないとき simple という。ここでは simple な type のみ扱う。

定理 A.

rank l の H-空間の type は

$1 \leq l \leq 4$ のとき Lie 群の type のみ.

$l=5$ のとき Lie 群の type 又は

$$\{(3, 5, 7, 11, 15), (3, 7, 11, 11, 15), (3, 5, 5, 7, 9)\}$$

$l=6$ のとき Lie 群の type 又は

$$\left\{ \begin{array}{l} (3, 5, 7, 11, 15, 19), (3, 7, 7, 11, 15, 19) \\ (3, 7, 7, 9, 11, 15), (3, 7, 7, 11, 11, 15) \\ (3, 7, 9, 11, 11, 15) \end{array} \right\}$$

定理 B.

各 entry は高々 1 つとし, 最高の entry $2n-1$ は $2n-1 > 59$ とする. このようは H-空間の type は

(i) n が奇数のとき $\{2k-1; 2 \leq k \leq n\}$ はすべて entry $= \lambda_3$

(ii) n が偶数のとき

(a) $n \neq 3^k$ ($k \geq 3$) のとき

$\{4k-1; 1 \leq k \leq \frac{n}{2}\}$ はすべて entry $= \lambda_3$.

(b) $n = 3^k$ ($k \geq 3$) のとき

$\{4k-1; 1 \leq k \leq \frac{n}{2}, k \neq \frac{n}{2}-1\}$ はすべて entry $= \lambda_3$

§2. A_p の多項式環への作用

B を $\mathbb{Z}_p$ 上の多項式環で $\text{mod } p$ Steenrod algebra A_p が作用しているとする。このとき次の定理が成り立つ。

定理 1

$\{x_1, \dots, x_k\}$ を B の生成元全体の部分集合, $\deg x_i = 2m_i$ 各 $m_i \not\equiv 0 \pmod{p}$ とする。 $m = (m_1, \dots, m_k)$ を最大公約数とする。このとき B の生成元の集合 $\{y_1, \dots, y_k\}$ で $\deg y_i = 2n_i$, $n_i \equiv 1-p \pmod{m}$ となるものが存在する

証明には次の代数的な補題を用いる。

補題

R を Noether 環, A をその ideal で r 個の base を持つとする。 A の任意の associated 素 ideal P は高々 r の height を持つ。

定理 1 の証明

各 m_i は p で割り切れないから $m_i = a_i + b_i p$, $1 \leq a_i < p$, $0 \leq b_i$ とする。 Adem relation によって

$$a_i x_i^p = a_i p^{m_i} x_i = p^i p^{m_i-1} x_i$$

えうる.

$$C = \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_k]$$

$$I = \langle \{x_1, \dots, x_k\}^C \rangle$$

をそれぞれ, $x_1, \dots, x_k$ で生成される B の部分環, $x_1, \dots, x_k$ 以外で生成される B の ideal とする。任意の生成元 y について $\rho'y \in I$ とすると $x_i^p \in I$ となり矛盾であるから ある生成元 y について $\rho'y \notin I$. このとき $\rho'y = c + s$; $c \in C$, $s \in I$ と分解され, $\deg y + 2(p-1) = \alpha \cdot 2m$ すなわち

$$\frac{\deg y}{2} \equiv 1-p \pmod{m}$$

えうる。 $\{y_1, \dots, y_d\} \in \frac{\deg y_i}{2} \equiv 1-p \pmod{m}$ なる y_i 全体とする。 $\rho'y_i = c_i + s_i$; $c_i \in C$, $s_i \in I$ と分解しておく。 $y \notin \{y_1, \dots, y_d\}$ ならば $\rho'y \in I$ に注意しよう。
 $a_i x_i^p = \rho' \rho^{m_i-1} x_i$ だから

$$\frac{1}{a_i} \rho^{m_i-1} x_i = a_{i1} y_1 + \dots + a_{id} y_d + T_i$$

$$a_{ij} \in C, T_i \in I$$

と表わすことができる。これに ρ' をほどくと

$$x_i^p = a_{i1} c_1 + \dots + a_{id} c_d, \quad i=1, \dots, k$$

えうる.

$$J = \langle c_1, \dots, c_d \rangle$$

$c_1, \dots, c_d$ で生成される C の ideal とすると $J \ni x_i^p$ だから J の根基 $\text{rad } J$ は各 x_i を含む。よって

$$\text{rad } J = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$$

この height は k だから補題によって $k \leq d$, すなわち $y_1, \dots, y_k$ が存在する。

§3 Ewingの定理とその系

X を p -torsion を持たない H -空間とする。 BX を X の分類空間とすると Borel の定理によって

$$H^*(BX; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[y_1 \cdots y_e], \quad \deg y_i = 2n_i$$

となる。 $A = (2n_1, \dots, 2n_e)$ とする。

定理 2

$A \ni 2m_1, \dots, 2m_d$; $m = (m_1, \dots, m_d)$ とするとき $(k, m) = 1$ なる各 k について

$$2n_1, \dots, 2n_d \in A, \quad n_i \equiv k+1 \pmod{m_i}$$

が成り立つ。

証明 $-k+tm = p$ となる素数 p が無数に存在する。

(Dirichlet). p は十分大きく, 従って 各 $m_i \not\equiv 0 \pmod{p}$

で, X は p -torsion を持たないとしてよい。 よって定理 1 によって定理 2 もうる。

$d=1$ とする = により次の系をうる。

系3

$A \ni 2m$ とする. $(k, m) = 1$ なる各 k について
 $\exists 2n \in A, n \equiv k+1 \pmod{m}$.

A の最高の entry $2M$ について系3は次のようになる。

系4.

$(k, M) = 1, 2 \leq k < M$ なる各 k について $2(k+1) \in A$.

定理 A, B は. 系4, 系3, 定理2を使うことにより導かれるが、非常に複雑なので省略する。

参考文献

- [1] A. Clark, On π_3 of finite dimensional H-spaces.
Ann. of Math, 78, (1963), 193-196
- [2] J. Ewing, On the type of associative H-spaces.
Aarhus univ. Preprint series 1970/71 No.15