

連続関数のある種の平均について

武蔵工大 伊藤隆司

奈良知恵

I を実数空間内の任意の区間とする。 I 上で定義された狭義単調（増加又は減少）な実数値連続関数 φ と $0 \leq t \leq 1$ なる数 t を固定して、区間 I 内の二数 a, b の平均値を Hardy-Littlewood-Polya [2] は

$$(1) \quad \varphi^{-1} \{ t \varphi(a) + (1-t) \varphi(b) \}$$

と定義している。

この定義は無次元にまで自然に拡張される。即ち X をコンパクトな空間、 X 上の I に値をとる連続関数の全体を $C(X; I)$ とする。上に述べた関数 φ と X 上の確率測度 μ を固定して、 $C(X; I)$ に属する関数 f の平均値を

$$(2) \quad \varphi^{-1} \left\{ \int_X \varphi \circ f \, d\mu \right\}$$

と定義する。勿論 X が二点よりなる場合 (2) は (1) となる。

この f の平均値を f の Hardy-Littlewood-Polya 型の平均値と呼び $M_{g,\mu}(f)$ と書くことにする。更に、 g と μ を固定し f を変数とみて $C(X;I)$ 上の汎関数 $M_{g,\mu}$ が得られるがこの様な汎関数を $C(X;I)$ 上の HLP-mean と呼ぶことにする。

$C(X;I)$ 上に一様収束の位相及び普通の意味の順序構造を考えた時、HLP-mean $M_{g,\mu} = M$ は $C(X;I)$ 上の汎関数として次の性質 I), II), III), (*) 及び IV) をもつ事は明らかである。

I) M は連続,

II) $M(a1) = a \quad (\forall a \in I),$

III) $M(f) \leq M(g) \quad (\forall f \leq g),$

更に Fubini の定理から

(*) $M_g[M_x[h(x,y)]] = M_x[M_g[h(x,y)]] \quad \forall h \in C(X \times X; I)$

が成立する。ここに M_x, M_g はそれぞれ x, y を変数とする関数に M を作用させる事とする。

特に μ の台が X 全体ならば

IV) $M(f) < M(g) \quad (\forall f \leq g \text{ かつ } f \neq g)$

が成立する。

そこで一般に $C(X;I)$ 上の汎関数 M での性質 I), II) 及び III)

を満足するものを $C(X; I)$ 上の mean と定義する。更に性質 IV) を満足するとき狭義単調増加な mean と呼ぶことにする。

(*) を bisymmetric equation と呼び、mean M が (*) を満足するとき bisymmetric mean と呼ぶ。

明らかに HLP-mean は bisymmetric mean であるが逆は一般に成立しない。しかし「狭義の単調増加な bisymmetric mean は HLP-mean である」事が成立する。即ち狭義単調増加という条件のもとでは、bisymmetric equation (*) が Hardy-Littlewood-Polya 型の mean を完全に特徴付けていることになる。

定理 $C(X; I)$ 上の mean M が狭義単調増加で bisymmetric equation (*) を満足しているならば、 I 上で定義された狭義単調連続関数 φ と X 上の確率測度 μ でその台が X 全体となるものが存在して

$$M(f) = \varphi^{-1} \left\{ \int_X \varphi \circ f \, d\mu \right\} \quad \forall f \in C(X; I)$$

が成立する。こゝに φ は affine 同値を除いて一意で μ も又一意に決まる。

証明の筋道 まず mean の間の 可換性 を導入する。 M を $C(X; I)$ 上の mean, L を $C(Y; I)$ 上の mean とする (X, Y は

コンパクトな空間)。 M と L が可換であるとはすべての $f \in C(X \times Y; I)$ に対して

$$L_y [M_x [f(x, y)]] = M_x [L_y [f(x, y)]]$$

が成立することとする。この様に定義すれば M が *bisymmetric mean* とは M が M 自身と可換なこととなる。

定理の証明は次の3段階に分けられる。

1. HLP-mean と可換な mean 大雑把に言って「HLP-mean と可換な mean は又 HLP-mean」が成立する。

Proposition 1 M, L をそれぞれ $C(X; I)$ 及び $C(Y; I)$ 上の mean とする。 M と L とが可換でかつ L が $C(Y; I)$ 上の point evaluation でない HLP-mean で $L = L_{\varphi, \mu}$ と表現されるとする。このとき M も又 $C(X; I)$ 上の HLP-mean で $M = M_{\varphi, \nu}$ と表現される。ここに ν は X 上の確率測度で一意的に決まる。

2. 二次元の mean X が二点よりなるとき $C(X; I)$ は $I \times I$ と同一視出来て、 $C(X; I)$ 上の mean は $I \times I$ 上の単調増加な連続関数 N で $N(a, a) = a$ ($\forall a \in I$) となるものになる。これを二次元の mean と呼ぶ。二次元の mean N が *bisymmetric* とはすべての $a, b, c, d \in I$ に対して

$N[N(a, b), N(c, d)] = N[N(a, c), N(b, d)]$ (b と c とが可換) が成立することである。

次の proposition は証明しようとしている定理の二次元の場合にあっている。しかしこの結果は J. Aczél の本 [1] の中ですでに知られている。

Proposition 2 $I \times I$ 上の二次元の mean N が狭義単調増加で bisymmetric ならば I 上で定義された狭義単調な連続関数 φ と $0 < t < 1$ なる t が存在して

$$N(a, b) = \varphi^{-1} \{ t \varphi(a) + (1-t) \varphi(b) \} \quad \forall a, b \in I$$

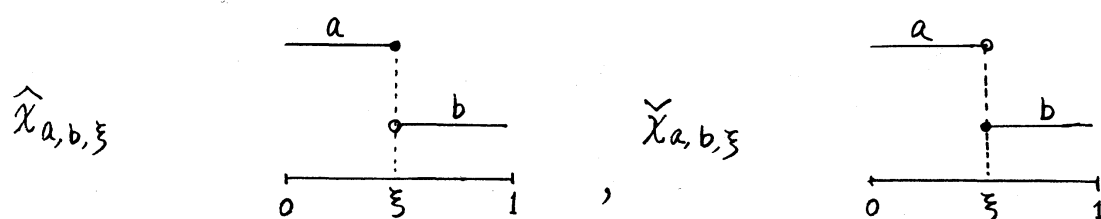
となる。こゝに φ は affine 同値を除いて一意でもも又一意に決まる。

これは次の様にしても示される。まず N が変数に関して対称: $N(a, b) = N(b, a)$ を仮定する。この場合は bisymmetric equation を用いて構成的に φ が作れて $N(a, b) = \varphi^{-1} \{ \frac{1}{2} \varphi(a) + \frac{1}{2} \varphi(b) \}$ ($a, b \in I$) が示される。非対称の場合は、 N から出発して帰納的に $N_{n+1}(a, b) = N[N_n(a, b), N_n(a, b)]$ として

$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(a, b) = N_\infty(a, b)$ を作る。このとき N_∞ が二次元の狭義単調増加な bisymmetric mean で対称であり、更に N_∞ と N とが可換なことが証明できる。よって Proposition 1 を用いればよい。

3. $C([0,1];I)$ 上の mean と可換な二次元の mean を作る事

M を $C([0,1];I)$ 上の mean とする。 M は もともと $C([0,1];I)$ 上で定義されているが、この定義域を $[0,1]$ 上の I に値をとる半(上半又は下半)連続関数の全体にまで自然に拡張される事に注意する。 $a, b \in I$ と $0 < \xi < 1$ に対して記号 $\hat{\chi}_{a,b,\xi}$ 及び $\check{\chi}_{a,b,\xi}$ で $[0,1]$ 上の次の様な上半及び下半連続関数を表わすものとする。



Proposition 3. M を $C([0,1];I)$ 上の狭義単調増加な bisymmetric mean とする。このとき高々可算個の $\xi \in (0,1)$ を除いて

$$M(\hat{\chi}_{a,b,\xi}) = M(\check{\chi}_{a,b,\xi}) \quad \forall a, b \in I$$

が成立する。この様な ξ に対して、この値をもって (a,b) における値として得られる $I \times I$ 上の関数 N は二次元の mean で狭義単調増加かつ bisymmetric である。更に N は M と可換となるだけでなく M と可換な mean とはすべて可換になる。

この Proposition の証明の主要な点は N が $I \times I$ 上連続なこと、 N が bisymmetric equation を満たし M と可換なこと、 N が $I \times I$ 上

狭義単調増加なことの三点である。

以上の三つの proposition を用いて定理の証明は次の様になる。 M を定理で与えられた mean とする。 Proposition 1 及び Proposition 2 から M と可換な二次元の mean N が狭義単調増加かつ bisymmetric なものの存在を示せばよい。 X が非連結のとき N の作り方は容易である。 X が連結のときは (X は二点以上よりなるとしてよい) X から区間 $[0,1]$ の上への連続写像 τ をとって、 $M^\tau(g) = M(g \circ \tau)$ ($g \in C([0,1]; I)$) として M を $C([0,1]; I)$ 上の mean M^τ に移す事が出来る。このとき M^τ は mean として M の性質をすべて受継ぎ M と可換になる。ここで Proposition 3 を M^τ に適用して N が作れる (詳しい証明は [3] 参照)。

以上。

References

- [1] J. Aczél, Lectures on functional equations and their applications, Academic Press, New York and London, 1966.
- [2] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Pólya, Inequalities, Cambridge University Press, 1934.
- [3] T. Ito and C. Nara, Hardy-Littlewood-Pólya's means of continuous functions, to appear.