

Hecke operator on some K-groups related with finite groups

北海道大学理学研究科 翁長良成 (Yoshishige Onaga)

(Department of Mathematics, Hokkaido University)

本稿は有限群に関連する Grothendieck 群のあいだのある写像についての計算結果を紹介するものである。目立った進展が得られていないため、内容は講演時のものと同一であることを予め断っておく。

G を有限群、 H, K, L 等はその部分群とする。また、 $R(H)$ を H の一般指標環とする。 $R(H)$ から $R(K)$ への写像 $[H, x, \alpha, K]$ (但し、 $x \in G, \alpha \in R(H^x \cap K)$ とする) を次のように定義すると、 $[H, x, \alpha, K]$ は $\mathbb{Z}$ 線型写像となる。

$$[H, x, \alpha, K](\mu) = (\mu^x_{H^x \cap K} \cdot \alpha)^K \quad (\forall \mu \in R(H)).$$

ここで、 μ^x は μ の x による共役、 $\mu^x_{H^x \cap K}$ は μ^x の $H^x \cap K$ への制限、 $\mu^x_{H^x \cap K} \cdot \alpha$ は $R(H^x \cap K)$ における積、 $(\mu^x_{H^x \cap K} \cdot \alpha)^K$ は K への誘導である。この写像については次の性質が知られている ([1])。

$$[H, x, \alpha, K] = [H, h x k, \alpha^k, K] \quad (h \in H, k \in K), \quad (1)$$

$$[H, x, \alpha_1 + \alpha_2, K] = [H, x, \alpha_1, K] + [H, x, \alpha_2, K] \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in R(H^x \cap K)), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & [H, x, \alpha, K][K, y, \beta, L] \\ &= \sum_{t \in \{H^{xy} \cap K^y \backslash K^y / K^y \cap L\}} [H, xyt, (\alpha^{xy}_{H^{xy} \cap K^y \cap L} \cdot \beta_{H^{xy} \cap K^y \cap L})^{H^{xy} \cap L}, L]. \end{aligned} \quad (3)$$

但し、(3) 式の $\{H^{xy} \cap K^y \backslash K^y / K^y \cap L\}$ は $H^{xy} \cap K^y \backslash K^y / K^y \cap L$ の完全代表系を意味する。また、 $[H, x, \alpha, K][K, y, \beta, L]$ は写像の合成 $[K, y, \beta, L] \circ [H, x, \alpha, K]$ のことである。

さて (2) 式より、(3) 式を $H^{xy} \cap L$ の既約指標たちの $\mathbb{Z}$ 係数の線型結合で表すことを考えるのは極めて自然であろう。そのために、いくつか記号を準備しておく。

まず、 $H^x \cap K, K^y \cap L, H^{xyt} \cap K^y \cap L, H^{xyt} \cap L$ の既約指標をそれぞれ次のようにおく。

$$\begin{aligned}
\text{Irr}(H^x \cap K) &= \{\eta_1, \dots, \eta_p\}, \\
\text{Irr}(K^y \cap L) &= \{\xi_1, \dots, \xi_q\}, \\
\text{Irr}(H^{xyt} \cap K^y \cap L) &= \{\theta_{t_1}, \dots, \theta_{t_l}\}, \\
\text{Irr}(H^{xyt} \cap L) &= \{\phi_1, \dots, \phi_n\}.
\end{aligned}$$

さらに、(3) 式を Mackey 分解や Frobenius の相互律を用いて計算していく過程で現れる $R(H^x \cap K)$ 、 $R(K^y \cap L)$ 、 $R(H^{xyt} \cap K^y \cap L)$ 、 $R(H^{xyt} \cap L)$ の元たちを次のように表しておく。

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{i=1}^p \langle \alpha, i \rangle \eta_i \quad (\alpha \in R(H^x \cap K)), \\
\beta &= \sum_{j=1}^q \langle \beta, j \rangle \xi_j \quad (\beta \in R(K^y \cap L)), \\
\eta_i^{yt}{}_{H^{xyt} \cap K^y \cap L} &= \sum_{r=1}^l \langle \eta_i, t_r \rangle \theta_{t_r}, \\
\xi_j{}_{H^{xyt} \cap K^y \cap L} &= \sum_{r'=1}^l \langle \xi_j, t_{r'} \rangle \theta_{t_{r'}}, \\
(\theta_{t_r} \cdot \theta_{t_{r'}})^{H^{xyt} \cap L} &= \sum_{s=1}^n \langle t_{rr'}, s \rangle \phi_s.
\end{aligned}$$

このとき、

$$\begin{aligned}
&[H, x, \alpha, K][K, y, \beta, L] \\
&= \sum_{t, s} \left(\sum_{i, j, r, r'} \langle \alpha, i \rangle \langle \beta, j \rangle \langle \eta_i, t_r \rangle \langle \xi_j, t_{r'} \rangle \langle t_{rr'}, s \rangle \right) [H, xyt, \phi_s, L]
\end{aligned}$$

となる。ここに現れる係数たちに有意義な意味付けが可能かどうかは、現段階ではわかっていない。

参考文献

- [1] 吉田知行, 『有限 G 集合のカテゴリのスパン』, 「代数的 K -理論」研究集会報告集, p.p.104-128, 1982.